

**Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Уфимский государственный авиационный технический университет**

СТАТИКА

**Методические указания
к выполнению контрольных работ
по теоретической механике**

Уфа 2007

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Требования, предъявляемые к выполнению и оформлению контрольной работы.....	4
2. Контрольная работа С1. Произвольная плоская система сил.....	6
2.1. Содержание контрольной работы	6
2.2. Краткие методические указания к выполнению.....	12
2.3. Пример выполнения контрольной работы	12
3. Контрольная работа С2. Сочлененная система тел.....	15
3.1. Содержание контрольной работы.....	15
3.2. Краткие методические указания к выполнению.....	24
3.3. Пример выполнения контрольной работы	24
4. Контрольная работа С3. Пространственная система сил	28
4.1. Содержание контрольной работы.....	28
4.2. Краткие методические указания к выполнению	34
4.3. Пример выполнения контрольной работы.....	34
Список литературы.....	37
Приложение.....	38

ВВЕДЕНИЕ

Выполнение контрольных работ позволит каждому студенту глубже изучить раздел теоретической механики «Статика» и приобрести навыки решения конкретных задач по статическому расчету элементов конструкций. Студенты знакомятся с различными типами опор, применяемыми в расчетных схемах, и их реакциями. Далее студенты составляют уравнения равновесия твердого тела или системы тел, решая которые определяют реакции опор. Следует отметить, что определение опорных реакций, как правило, является первым этапом расчета на прочность элементов конструкций. Навыки, полученные студентами при выполнении данной контрольной работы станут основой при решении инженерных задач, связанных с силовыми расчетами конструкций.

1. ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Каждая контрольная работа выполняется на сброшюрованных листах формата А4, строго по варианту, указанному преподавателем. Первый лист является титульным. Пример заполнения титульного листа приведен в приложении.

1.2. Все страницы должны иметь поля: слева – 20 мм, справа – 5 мм, сверху – 5 мм, снизу – 5 мм.

1.3. Перед выполнением задания необходимо записать его условие, выбранные исходные данные и в соответствии с ними изобразить расчетную схему.

1.4. Решение записывается подробно и аккуратно со всеми вычислениями, вспомогательными чертежами и пояснениями. Требуемые величины находятся сначала в алгебраической форме и записываются в виде формулы. Затем в эту формулу подставляются известные числовые величины в соответствии с их позицией в формуле и после знака равенства записывается результат и его размерность. Промежуточные вычисления при этом опускаются. Вычисления проводятся с точностью до третьей либо четвертой значащей цифры.

1.5. Расчетные схемы рисуются крупно на отдельной странице с помощью чертежных инструментов, строго в масштабе, с указанием всех размеров, числовых данных и осей. Углы должны вычерчиваться точно с использованием трапецидира. Многие величины, определяемые в ходе решения задач, являются векторными, поэтому следует определить не только их модули, но и построить (изобразить) эти векторы на рисунках.

1.6. Пометки, сделанные преподавателем при проверке не убираются. Следует иметь в виду, что преподаватель при проверке работы отмечает, как правило, лишь место появления ошибки и ее характер.

Разобравшись по учебнику с теоретическим материалом, студент должен исправить допущенную ошибку, а затем внести исправления во все расчеты, оказавшиеся ошибочными, начиная с места появления ошибки и до конца решения задачи.

1.7. К работе, высланной на повторную проверку, в обязательном порядке должен прилагаться ее первоначальный (незачтенный) вариант.

1.8. Работа считается зачетной только после ее *защиты* преподавателю, проводимой в форме собеседования.

1.9. *Работа, не соответствующая своему варианту, или выполненная с нарушением изложенных требований, не засчитывается и возвращается для исправления.*

2. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА С1 ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

2.1. Содержание контрольной работы

Рама, имеющая опоры, в виде заделки или неподвижного цилиндрического шарнира и невесомого стержня, нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q или линейно распределенной нагрузкой с максимальной интенсивностью q_{\max} , парой сил с моментом M и силами P_1 и P_2 , расположенными в плоскости рамы.

Определить реакции связей, действующих на раму.

Варианты расчетных схем в соответствии с вариантами контрольных работ изображены на рис. 2.1. Числовые значения параметров приведены в табл. 1.

Таблица 1

Числовые значения параметров контрольной работы С1

N	$a,$ м	$b,$ м	$c,$ м	$d,$ м	$M,$ Нм	$P_1,$ Н	$P_2,$ Н	$q_{\max},$ Н/м	$q,$ Н/м	$\alpha,$ °	$\beta,$ °
1	5	3	4	2	10	15	12	3	0,8	60	30
2	2	3	3	2	10	15	15	3	0,8	75	60
3	3	4	4	3	15	15	9	4	1,4	60	65
4	3	3	3	1	15	20	12	5	0,75	75	30
5	4	4	4	1	20	20	13	6	1,5	60	30
6	2	2	3	1	20	25	12	4	1,6	60	15
7	4	5	5	2	10	20	15	2	1,3	50	60
8	3	5	4	1	10	10	12	3	1,1	30	30

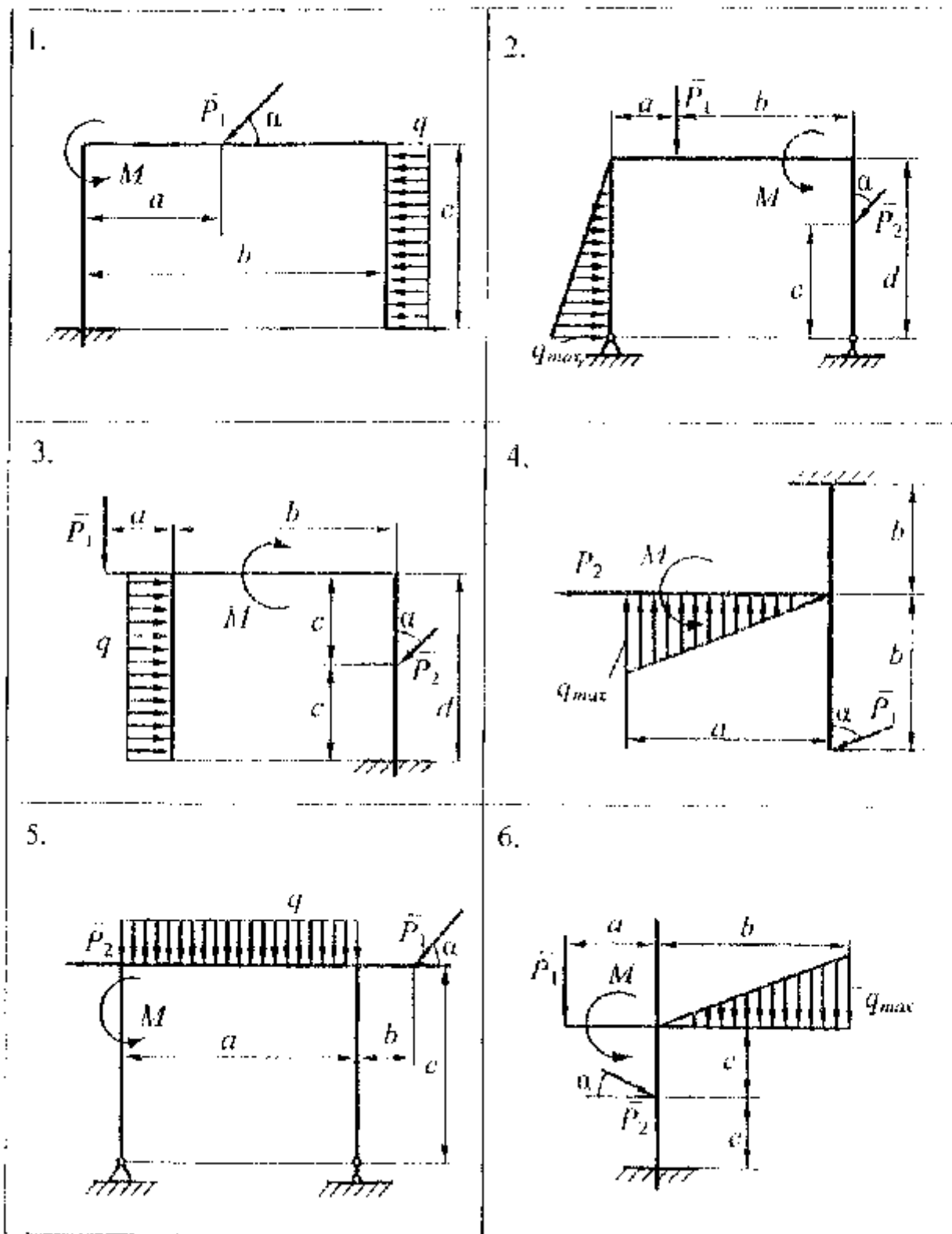
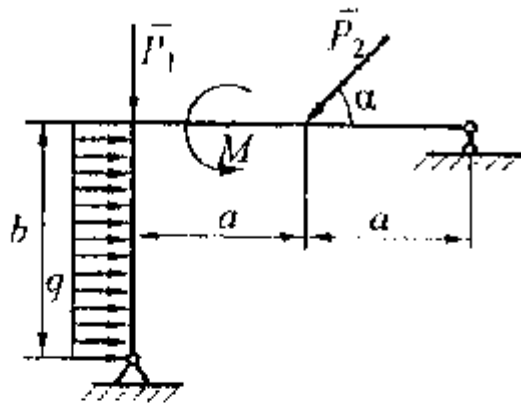
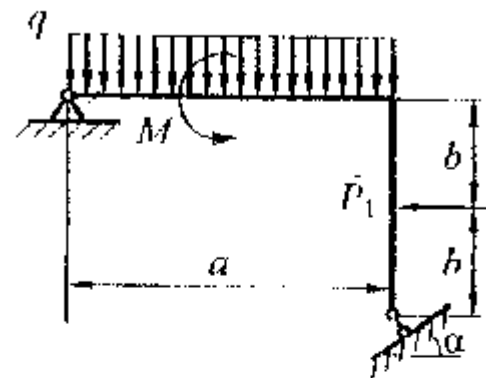


Рис. 2.1

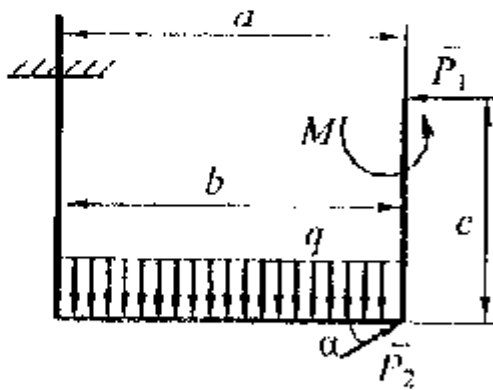
7.



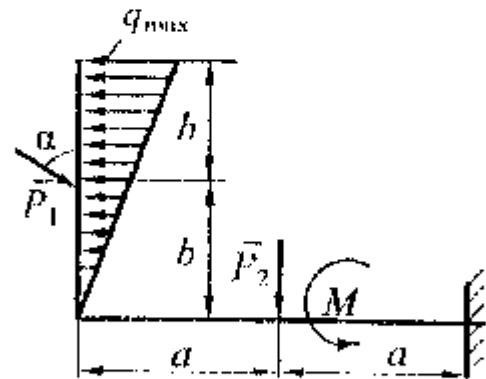
8.



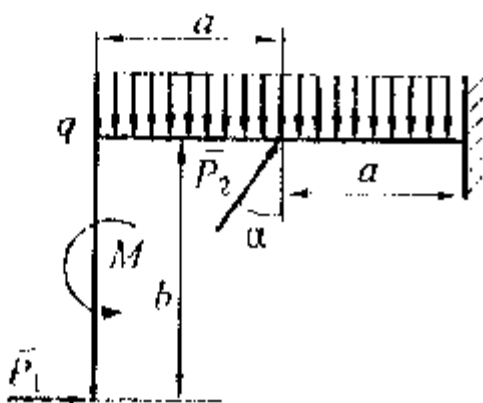
9.



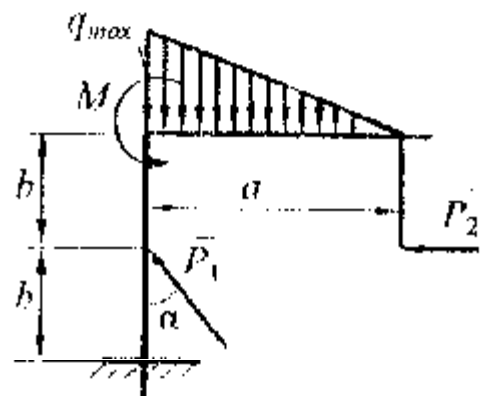
10.



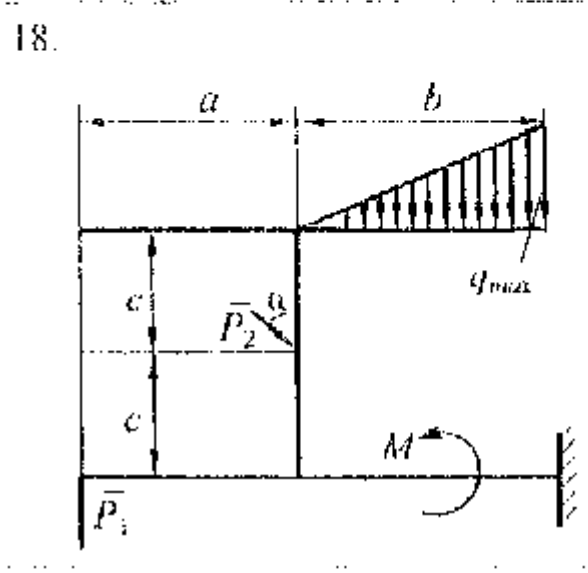
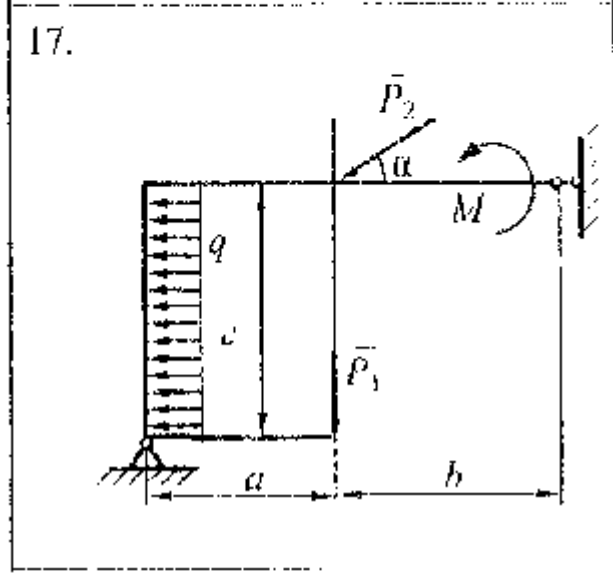
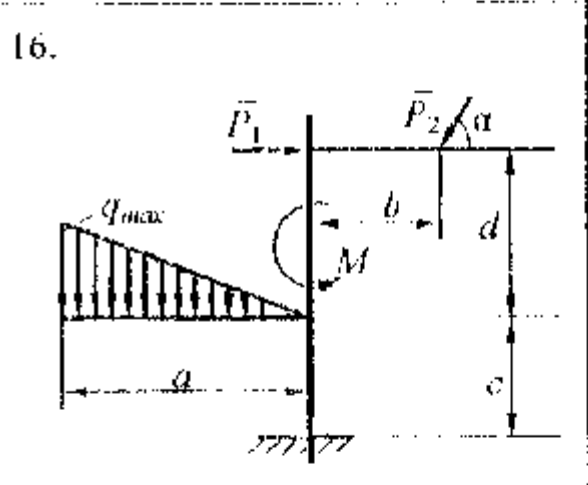
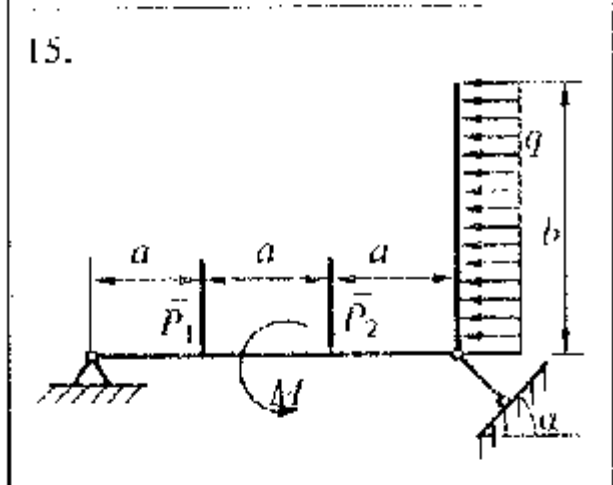
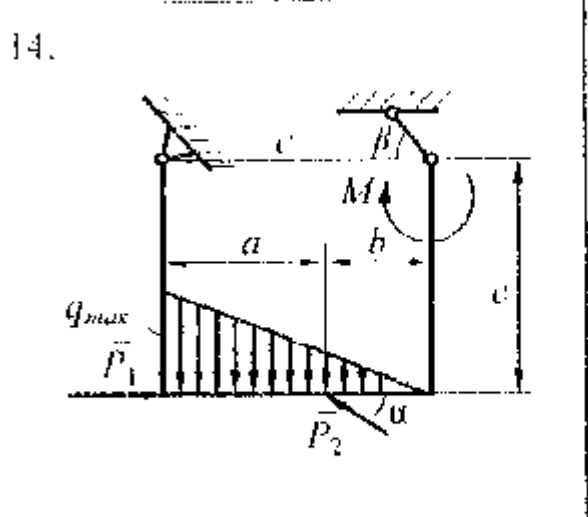
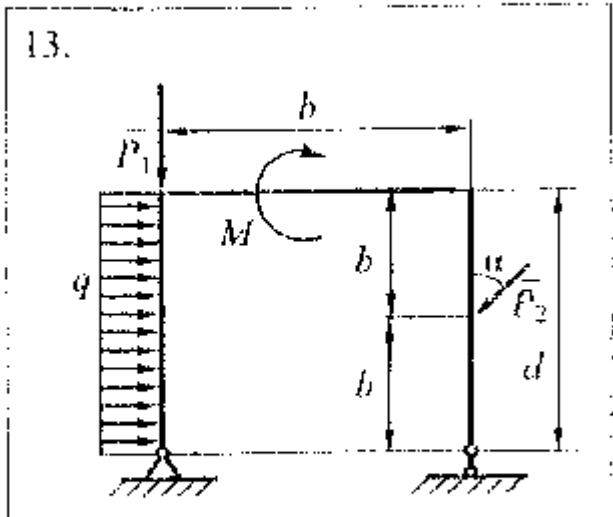
11.



12.

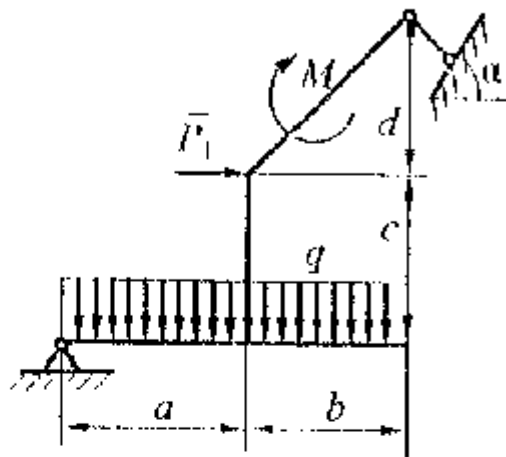


Продолжение рис. 2.1

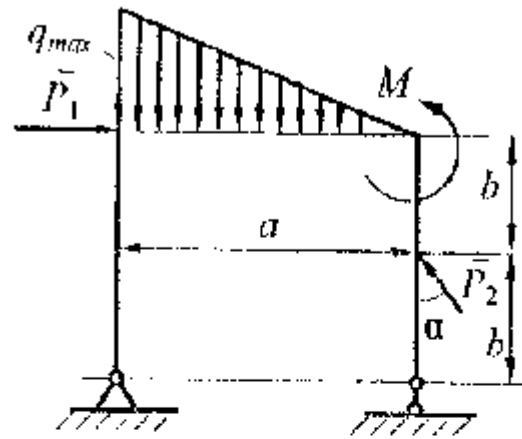


Продолжение рис. 2.1

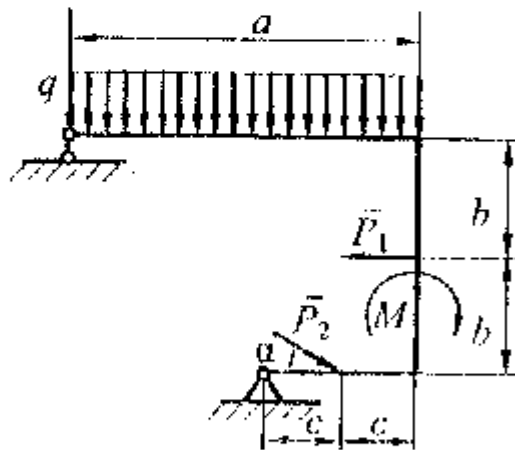
19.



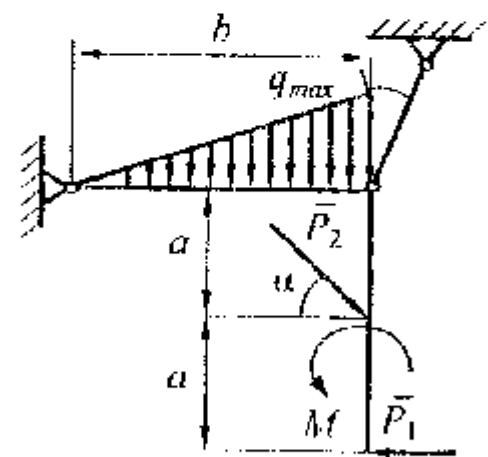
20.



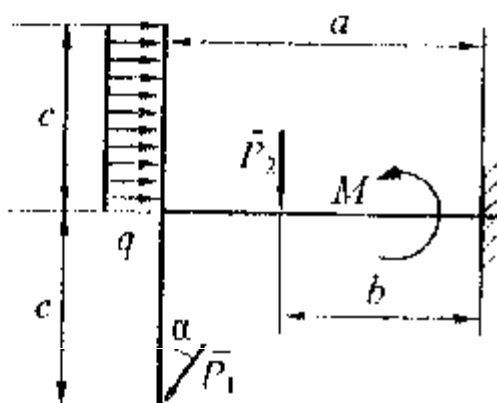
21.



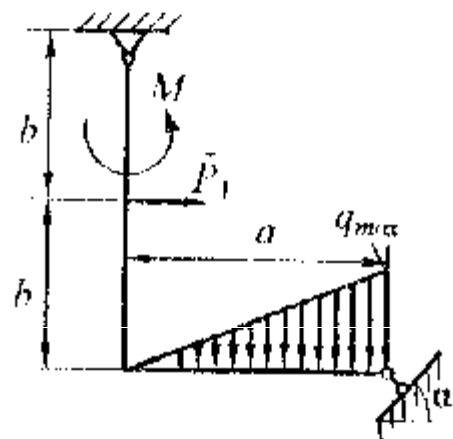
22.



23.

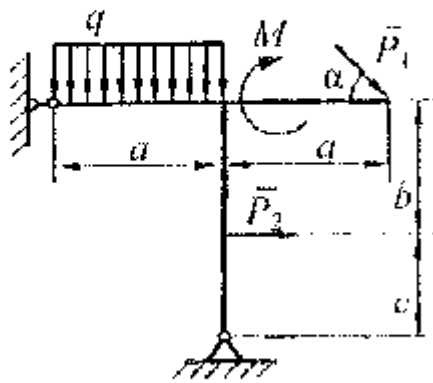


24.

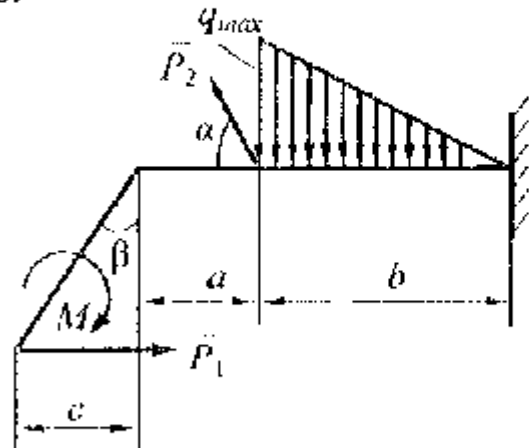


Продолжение рис. 2.1

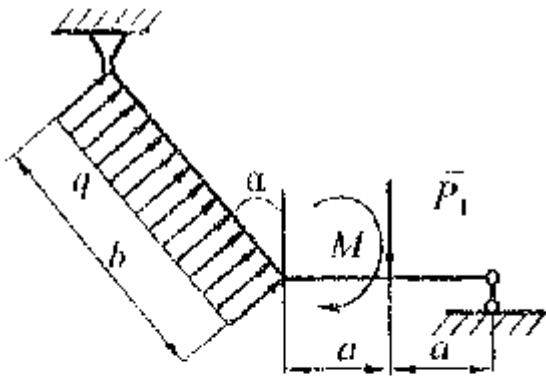
25.



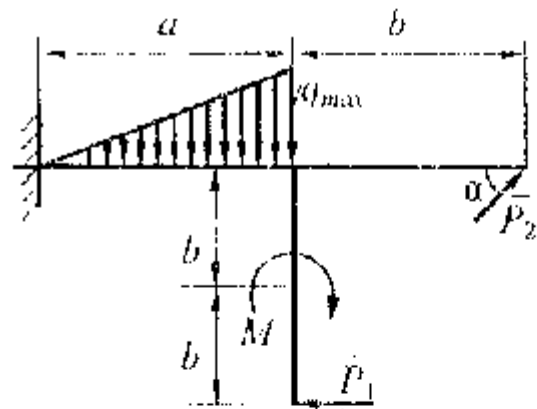
26.



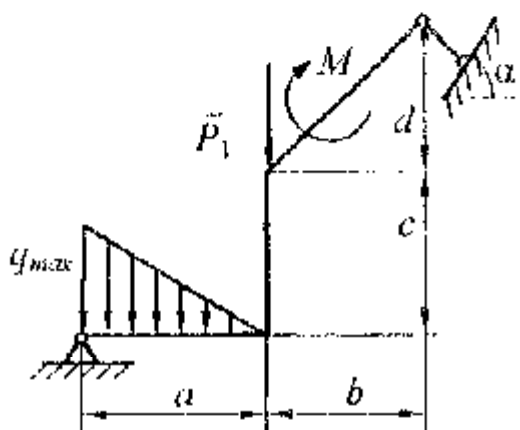
27.



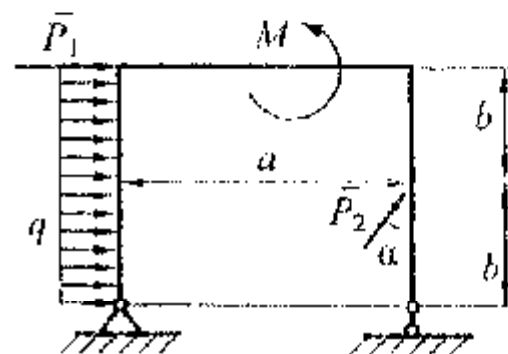
28.



29.



30.



Окончание рис. 2.1

2.2. Краткие методические указания к выполнению

2.2.1. Проработать раздел “Произвольная плоская система сил”, пользуясь конспектом лекций и рекомендуемыми учебниками [1]– [4].

2.2.2. Рассмотреть равновесие произвольной плоской системы сил, действующей на тело.

2.2.3. Приложить активные силы, причем распределенную нагрузку заменить сосредоточенной силой, определив ее величину и точку приложения.

2.2.4. Выбрать оси прямоугольной системы координат $Axу$.

2.2.5. Освободиться от действия связей, заменив их действие на раму силами реакций. Например, реакция заделки в некоторой точке A состоит из силы, составляющие которой обозначаются как \bar{X}_A , \bar{Y}_A и момента заделки M_A .

2.2.6. Составить три уравнения равновесия произвольной плоской системы сил и из них определить величины реакций.

2.3. Пример выполнения контрольной работы

2.3.1. Условие примера выполнения контрольной работы С1

Плоская невесомая прямоугольная рама (рис. 2.2) нагружена силами $P_1 = 1$ кН и $P_2 = 2$ кН, парой сил с моментом $M = 3$ кН/м и равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 4$ кН/м.

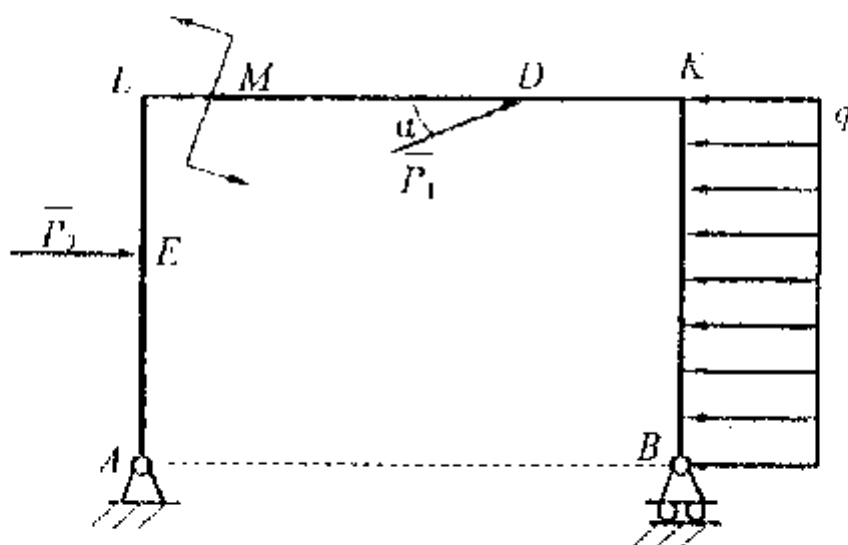


Рис. 2.2

Определить реакции неподвижного цилиндрического шарнира A и катка B , если $BK = 1,5$ м, $KD = 0,5$ м, $DL = 1,6$ м, $AE = 0,8$ м, $\alpha = 30^\circ$.

2.3.2. Решение примера выполнения контрольной работы С1

Объект равновесия - рама, на которую наложены две связи: неподвижный цилиндрический шарнир A и каток B . Мысленно отбрасываем связи и заменяем их действиями реакциями (рис. 2.3). Таким образом, рама находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, M, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_B$ и \vec{Q} . Здесь $Q = q \cdot l_1 = 4 \cdot 1,5 = 6$ кН - равнодействующая равномерно распределенной нагрузки и $BC = 0,5 \cdot BK = 0,75$ м. Строим оси прямоугольных декартовых координат. Начало координат располагаем в точке A (см. рис. 2.3).

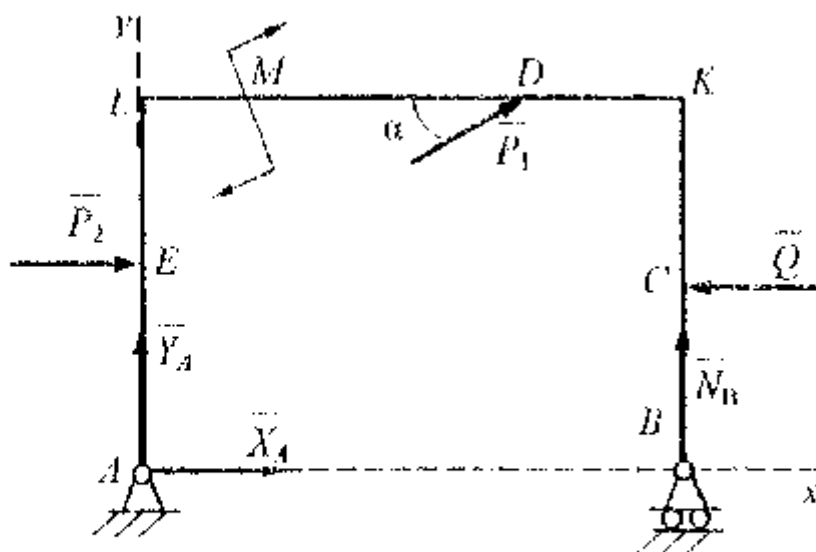


Рис. 2.3

Запишем уравнения равновесия рамы:

$$\sum X = X_A + P_2 + P_1 \cos \alpha - Q = 0, \quad (1.1)$$

$$\sum Y = Y_A + P_1 \sin \alpha + N_B = 0, \quad (1.2)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = -P_2 \cdot AE - M - P_1 \cos \alpha \cdot AL + \\ + P_1 \sin \alpha \cdot DL + Q \cdot BC + N_B AB = 0. \quad (1.3)$$

Здесь при определении момента силы P_1 относительно точки A применена теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

Из первого уравнения

$$X_A = Q - P_2 - P_1 \cos \alpha = 6 - 2 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3,13 \text{ кН}.$$

Из третьего уравнения

$$N_B = (P_2 \cdot AE + M + P_1 \cos \alpha \cdot AL - P_1 \sin \alpha \cdot DL - Q \cdot BC) / AB = \\ = (2 \cdot 0,8 + 3 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1,5 - 1 \cdot 0,5 \cdot 1,6 - 6 \cdot 0,75) / 2,1 \approx 0,285 \text{ кН}.$$

Из второго уравнения

$$Y_A = -P_1 \sin \alpha \cdot N_B = -1 \cdot 0,5 \cdot 0,285 = -0,1425 \text{ кН}.$$

Направление реакции Y_A противоположно тому, которое показано на рис. 2.3.

3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА С2 СОЧЛЕНЕННАЯ СИСТЕМА ТЕЛ

3.1. Содержание контрольной работы

Сочлененная система, состоит из двух стержней, соединенных неподвижным цилиндрическим шарниром либо свободно опирающихся друг на друга, и имеет внешние опоры, изображенные на рис. 3.1. Внешние опоры могут содержать жесткую заделку, неподвижный цилиндрический шарнир, невесомый стержень или штифт, подвижную опору. Система нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q и (или) линейно распределенной нагрузкой с максимальной интенсивностью q_{\max} , парой сил с моментом M_1 и силой F_1 .

Определить реакции внешних и внутренних связей, наложенных на перемещения точек заданной системы тел.

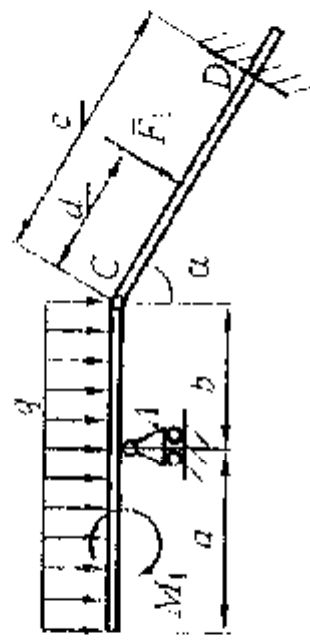
Варианты расчетных схем в соответствии с вариантами контрольных работ изображены на рис. 3.1. Числовые значения параметров приведены в табл. 2.

Таблица 2

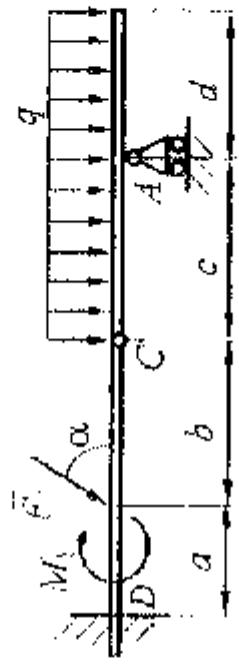
Числовые значения параметров контрольной работы С2

N	a , м	b , м	c , м	d , м	M_1 , кНм	F_1 , Н	q_{\max} , Н/м	q , Н/м	α , ^o	β , ^o	γ , ^o
1	5	3	4	2	10	15	3	0,8	60	30	120
2	4	3	4	2	10	15	3	0,8	85	60	150
3	3	4	4	3	15	15	4	1,4	60	45	90
4	6	3	3	1	15	20	5	0,75	75	30	120
5	7	4	4	1	20	20	6	1,5	45	30	135
6	5	2	3	1	20	25	4	1,6	50	15	120
7	8	5	5	2	10	20	2	1,3	90	60	100
8	9	5	4	1	10	10	3	1,1	75	45	120

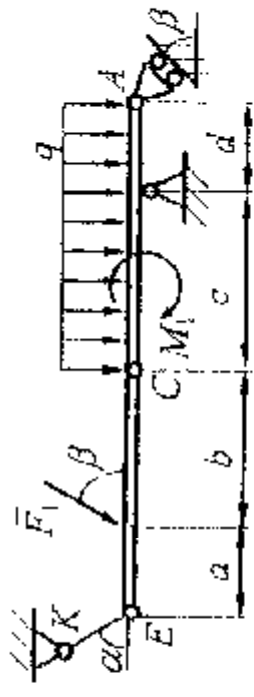
1.



2.



3.



4.

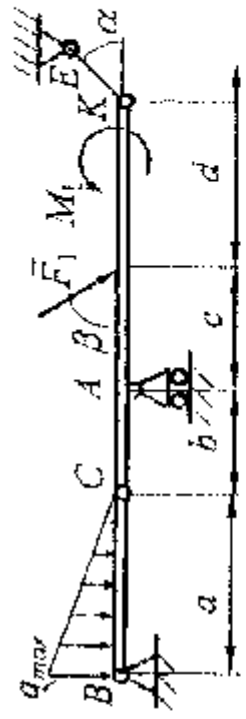
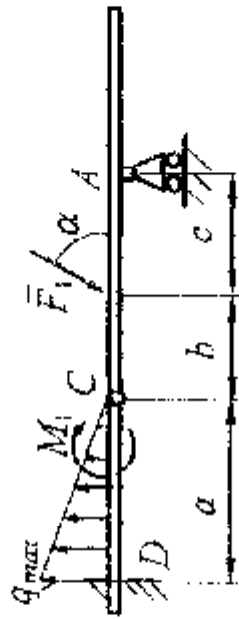
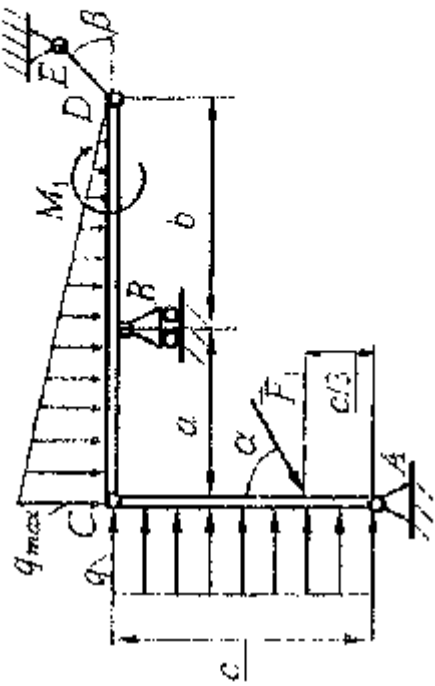


Рис. 3.1

5.

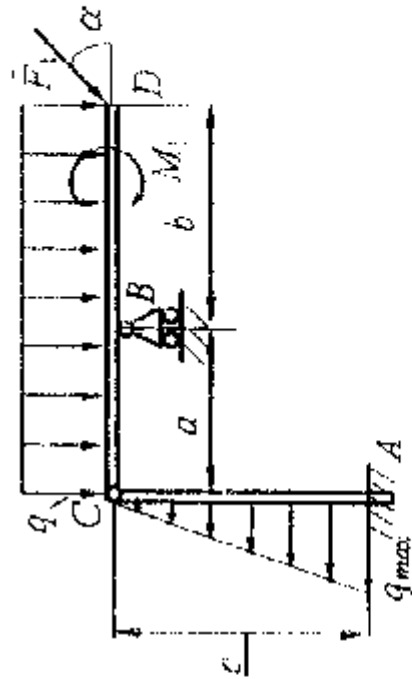


6.

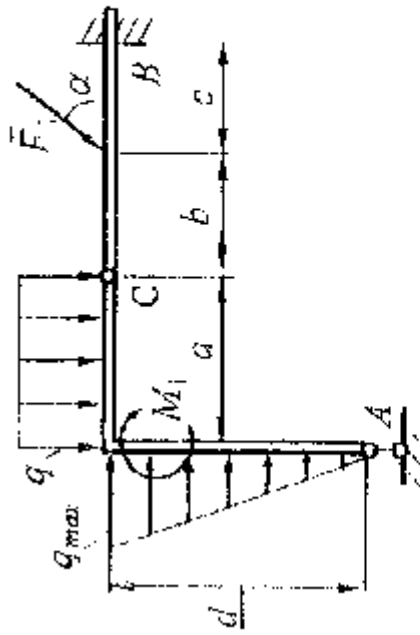


17

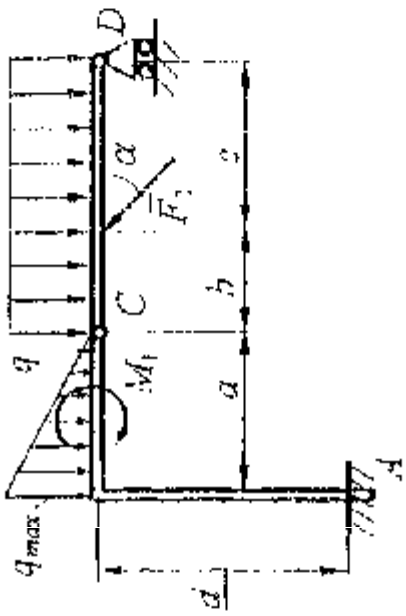
7.



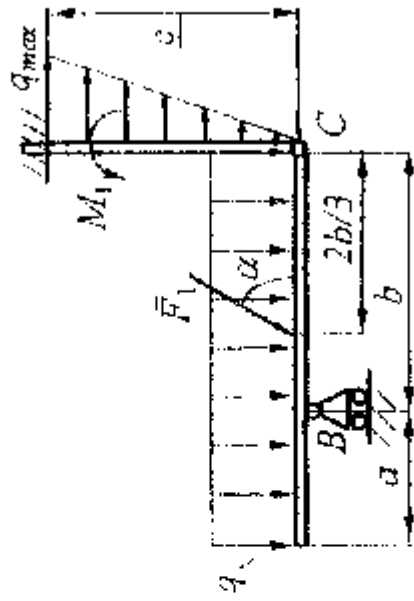
18.



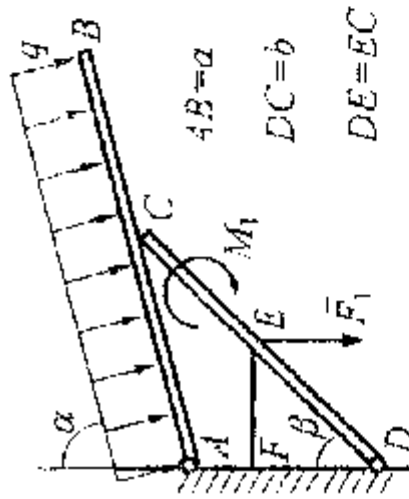
Продолжение рис. 3.1



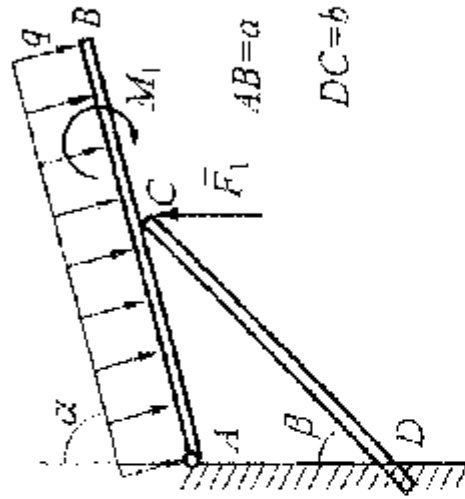
10.



11.

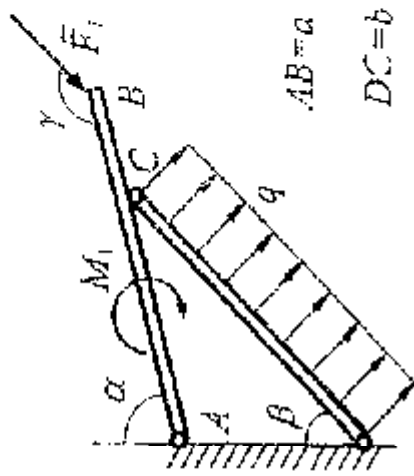


12.

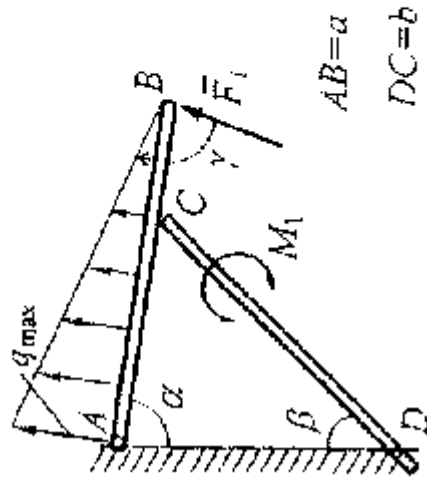


Продолжение рис. 3.1

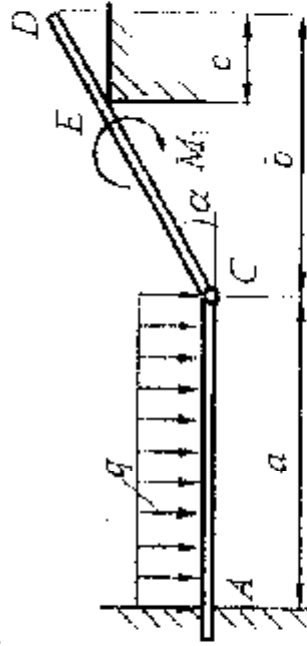
13.

 $AB=a$ $DC=b$

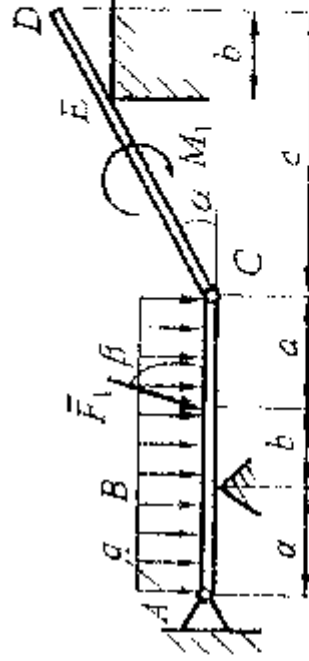
14.

 $AB=a$ $DC=b$

15.

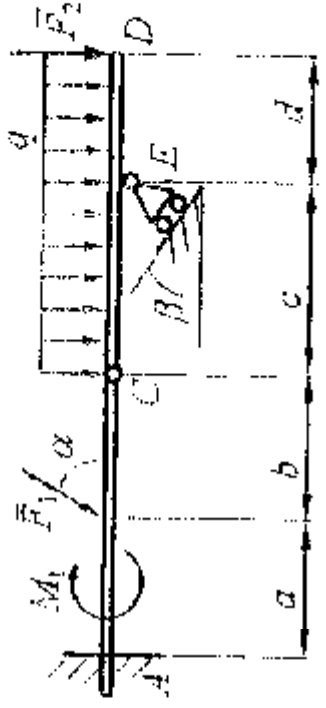


16.

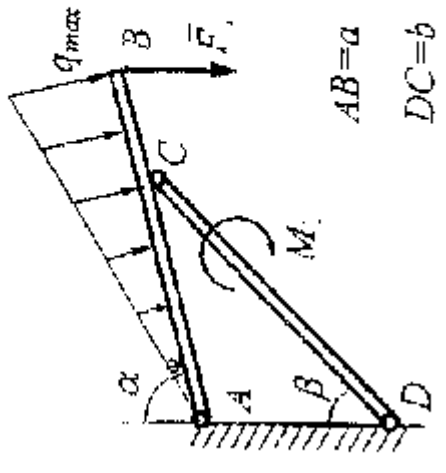


Продолжение рис. 3.1

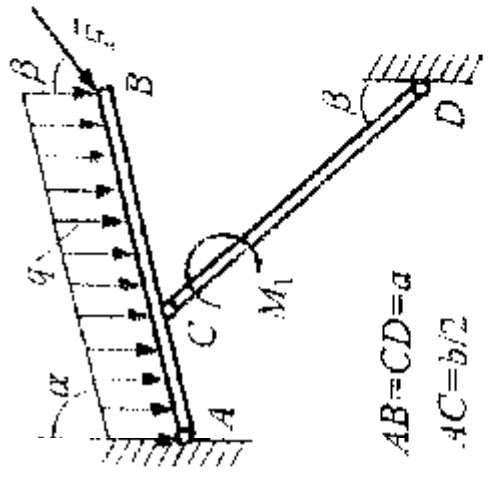
17.



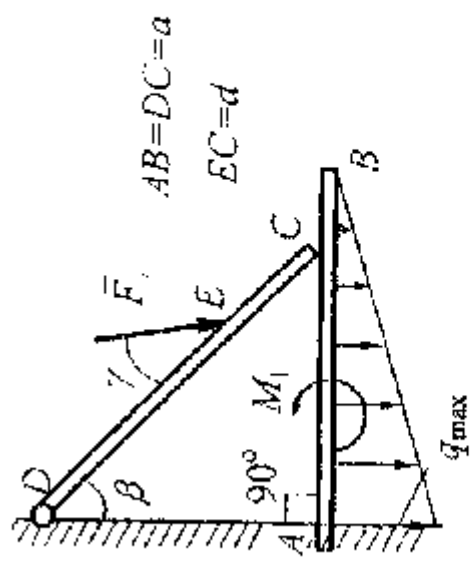
18.



19.

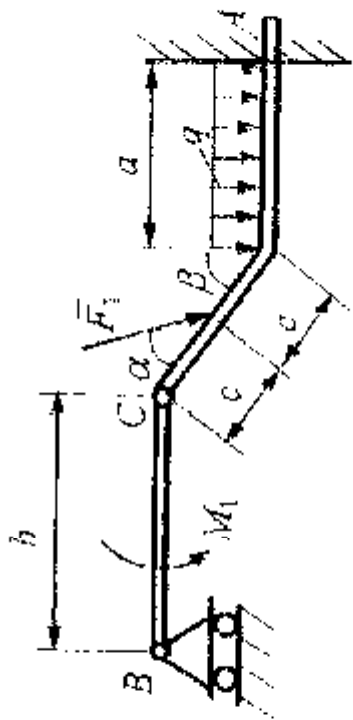


20.

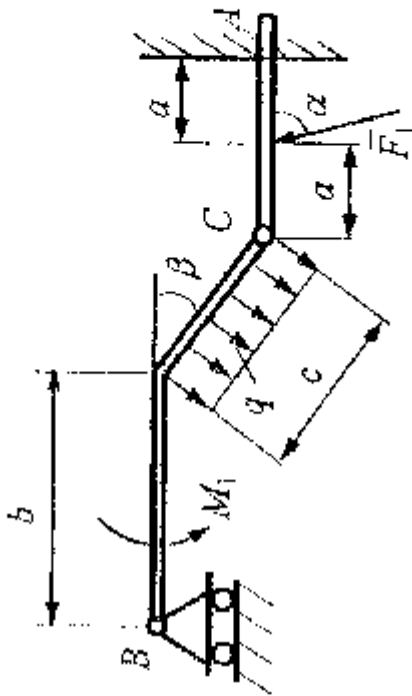


Продолжение рис. 3.1

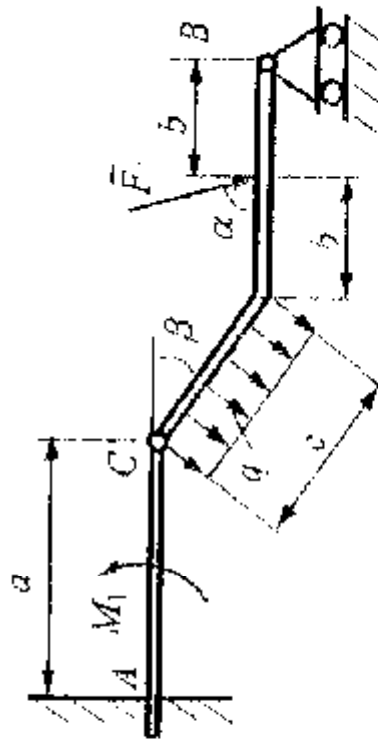
21.



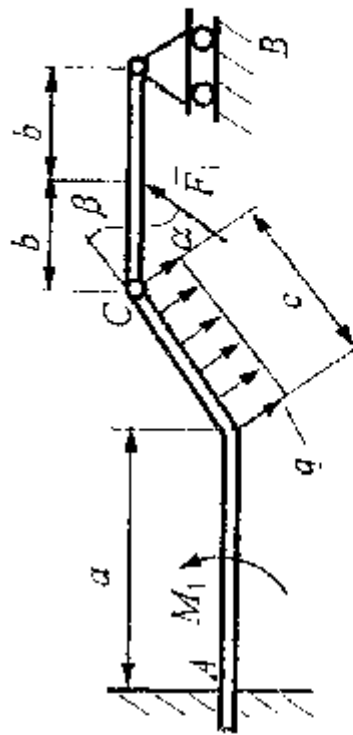
22.



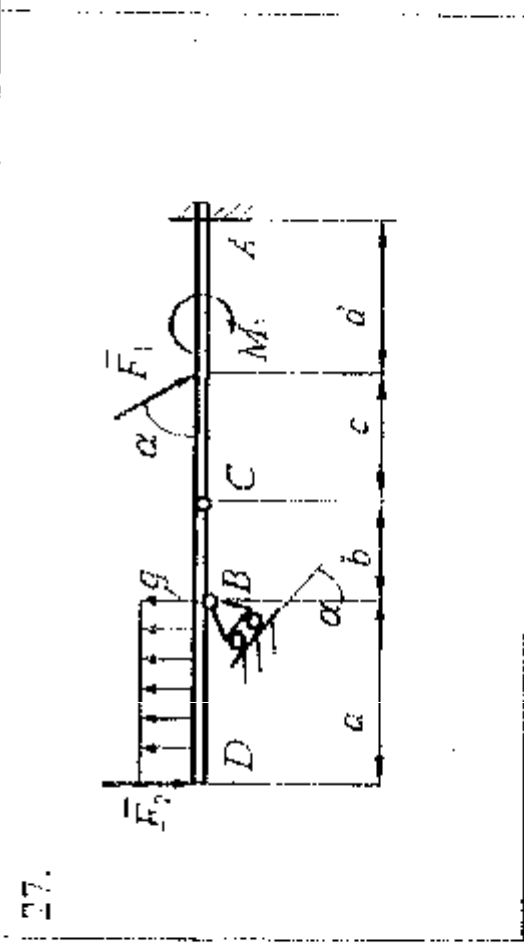
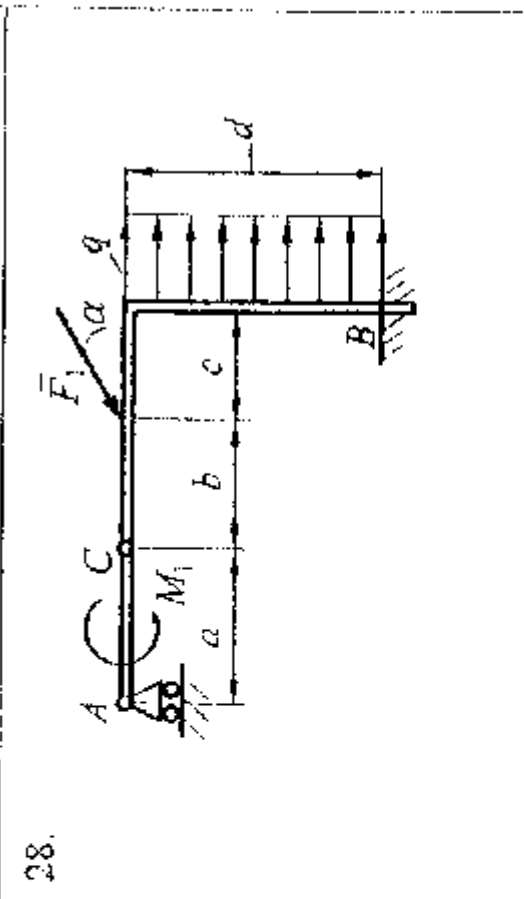
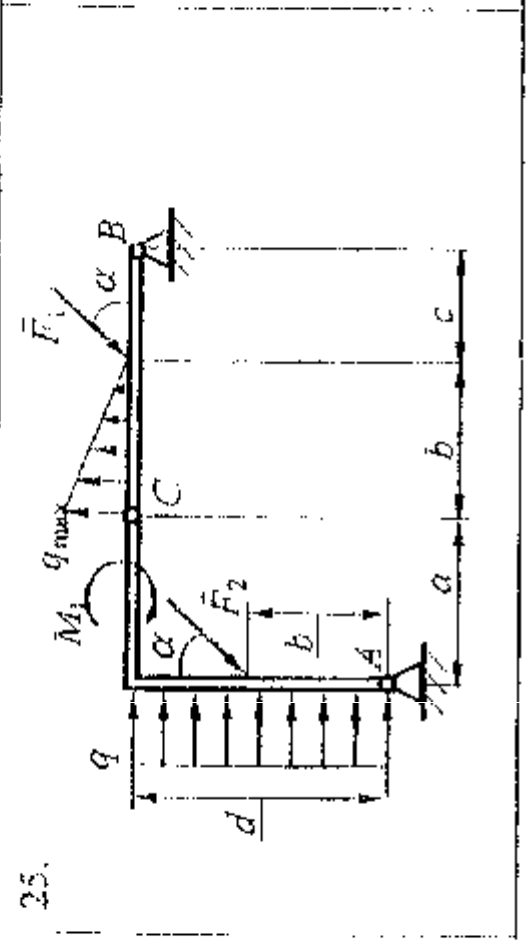
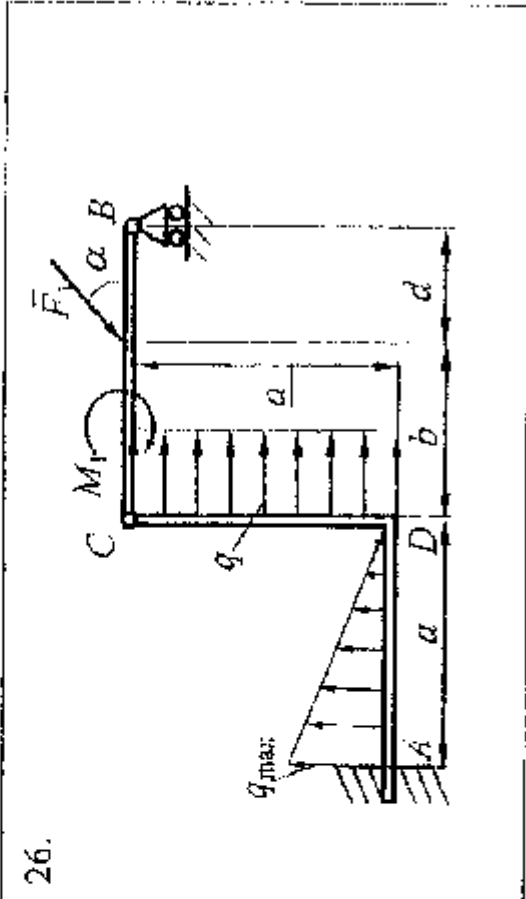
23.



24.

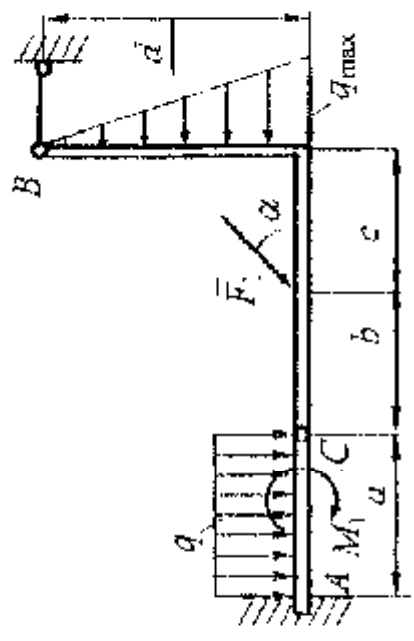


Продолжение рис. 3.1

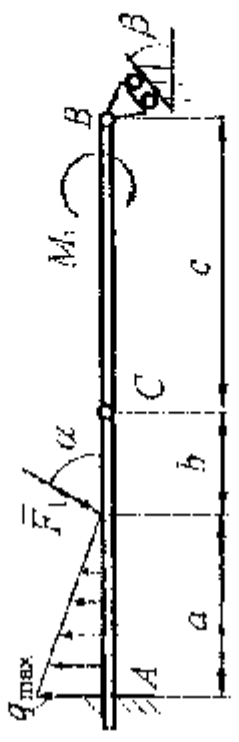


Продолжение рис. 3.1

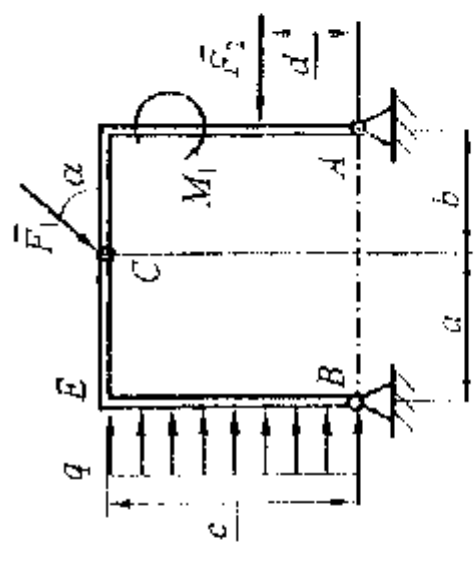
29.



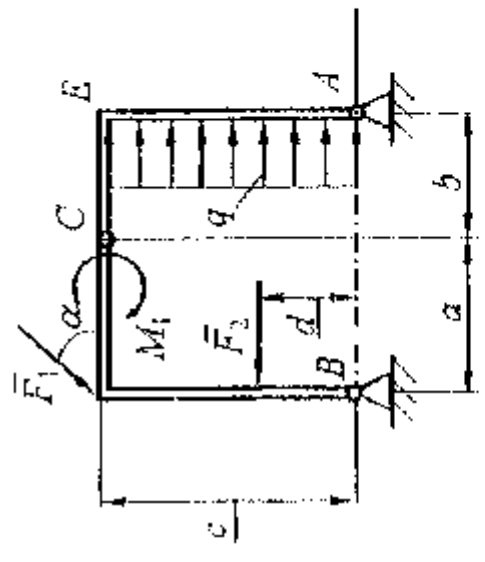
30.



31.



32.



Окончание рис. 3.1

3.2. Краткие методические указания к выполнению

3.2.1. Проработать раздел “Сочлененная система тел”, пользуясь конспектом лекций и рекомендуемыми учебниками [1]– [4].

3.2.2. Расчленить сочлененную систему тел на две части по внутренней связи. При этом должен соблюдаться аксиома равенства действия и противодействия, то есть сила действующая на первую часть системы со стороны второй ее части должна равняться ответной силе действующей со стороны первой части на вторую.

3.2.3. Расставить активные силы и реакции связей приложенные к каждой из частей системы. При этом распределенную нагрузку заменить сосредоточенной силой, определив ее величину и точку приложения.

3.2.4. Выбрать оси прямоугольной системы координат Axy .

3.2.5. Составить по три уравнения равновесия для каждой части системы и определить искомые реакции.

3.3. Пример выполнения контрольной работы

3.3.1. Условие примера выполнения контрольной работы С2

Определить реакции неподвижного цилиндрического шарнира A , катков B и C , и промежуточного шарнира D составной балки, изображенной на рис. 3.2, если $P = 3$ кН, $M = 5$ кНм, $q = 2$ кН/м, $q_{\max} = 4$ кН/м, $AE = 8$ м, $AB = 10$ м, $BD = 4$ м, $DC = 6$ м, $\alpha = 60^\circ$.

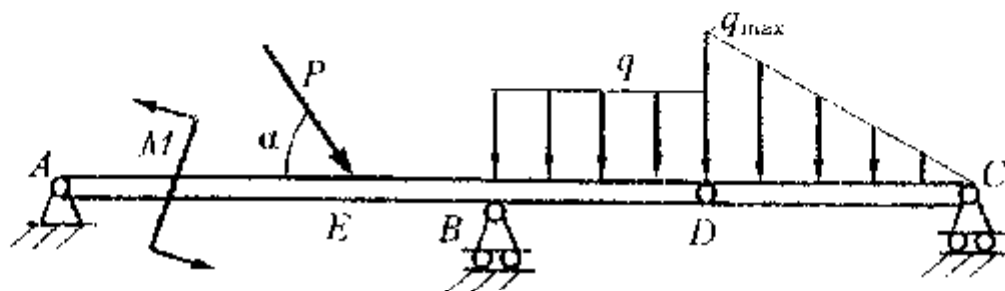


Рис. 3.2

3.3.2. Решение примера выполнения контрольной работы С2

В этой задаче рассматривается равновесие сочлененной системы. Здесь система состоит из двух частей: левой части AD и правой части DC , соединенных между собой с помощью цилиндрического шарнира D . Искомые реакции можно определить двумя способами. Первый способ решения задачи заключается в рассмотрении равновесия всей системы (составной балки) и одной из ее частей, а второй – в рассмотрении равновесия каждой части отдельно. При этом силы, с которыми одна часть действует на другую согласно аксиоме равенства действия и противодействия, равны по модулю и противоположны по направлению. Мы воспользуемся вторым способом решения.

Расчленим составную балку по цилиндрическому шарниру D на две части: левую AD и правую – DC . Силы, действующие на каждую из частей балки изображены на рис. 3.3.

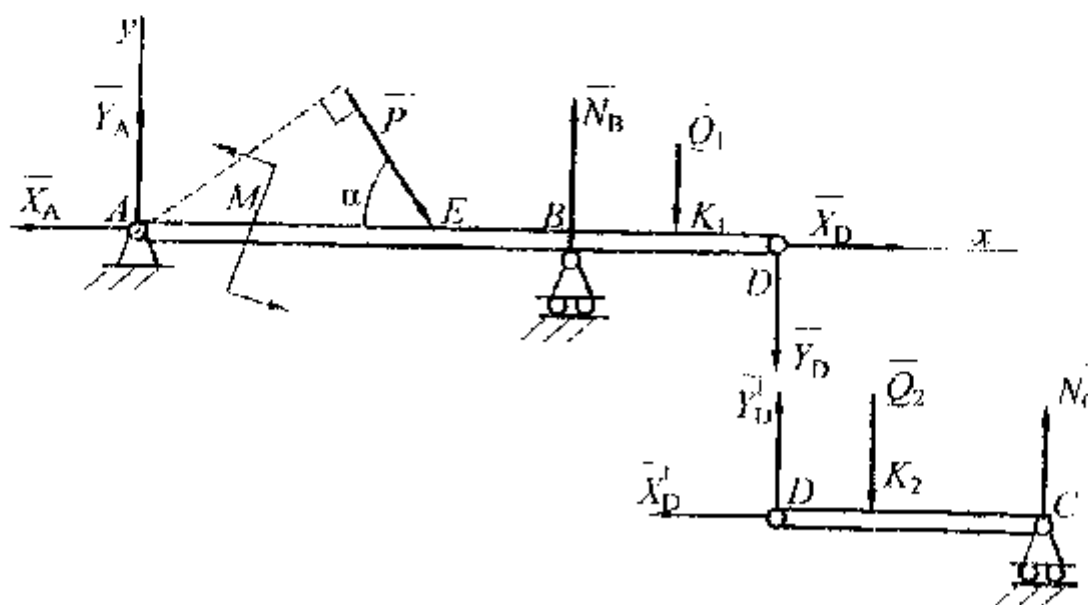


Рис. 3.3

Здесь силы взаимного давления одной части на другую логарно равны

$$X_D^I = X_D, Y_D^I = Y_D. \quad (3.1)$$

Распределенные нагрузки, действующие на левую и правую части балки, заменяем их равнодействующими Q_1 и Q_2 :

$$Q_1 = q \cdot BD = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН},$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} q_{\text{шхк}} \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12 \text{ кН},$$

линии действия которых проходят соответственно через точки K_1 и K_2 :

$$BK_1 = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ м}, \quad DK_2 = \frac{1}{3} DC = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 \text{ м}.$$

Из рис. 3.3 видно, что к левой части банки приложена произвольная плоская система сил, включающая восемь силовых факторов: \vec{P} , \vec{Q}_1 , M , \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{X}_D , \vec{Y}_D , \vec{N}_B , а к правой части — четыре силы: \vec{Q}_2 , \vec{X}_D , \vec{Y}_D , \vec{N}_C . Запишем уравнения равновесия для каждой из частей.

Левая часть

$$\sum X = -X_A + P \cos \alpha + X_D = 0, \quad (3.2)$$

$$\sum Y = Y_A - P \sin \alpha + N_B - Q_1 - Y_D = 0, \quad (3.3)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_K) = M - P \cdot AE \sin \alpha + N_B \cdot AB - Q_1 \cdot AK_1 - Y_D \cdot AD = 0 \quad (3.4)$$

Правая часть

$$\sum X = -X_D^I = 0, \quad (3.5)$$

$$\sum Y = Y_D^I - Q_2 + N_C = 0, \quad (3.6)$$

$$\sum m_D(\vec{F}_K) = N_C \cdot DC - Q_2 \cdot DK_2 = 0. \quad (3.7)$$

Решая уравнения (3.2) – (3.7) с учетом равенств (3.1), получаем

$$X_D^I = X_D = 0,$$

$$N_C = Q_2 \cdot \frac{DK_2}{DC} = 12 \cdot \frac{2}{6} = 4 \text{ кН},$$

$$Y_D^I = Y_D = Q_2 - N_C = 12 - 4 = 8 \text{ кН},$$

$$X_A = P \cos \alpha + X_D = 3 \cdot 0,5 + 0 = 1,5 \text{ кН},$$

$$N_B = \frac{(P \cdot AB \sin \alpha - M + Q_1 AK_1 + Y_D AD)}{AB} =$$

$$= \frac{(3 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 + 8 \cdot 12 + 8 \cdot 14)}{10} \approx 22,4 \text{ кН},$$

$$Y_A = P \sin \alpha - N_B + Q_1 + Y_D = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 22,4 + 8 + 8 \approx -3,8 \text{ кН}.$$

Направление реакции \overline{Y}_A противоположно показанному на рис. 3.3 направлению.

4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА С3 ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

4.1 Содержание контрольной работы

Изогнутая под прямыми углами пространственная рама концом A заделана в неподвижную опору и нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q или линейно распределенной нагрузкой с максимальной интенсивностью q_{\max} , парой сил с моментом M и силой P , расположенной в плоскости перпендикулярной участку рамы длиной l_d и образующей угол α с прямой изображенной на рисунке.

Определить опорные реакции рамы.

Варианты расчетных схем изображены на рис. 4.1.

Номер на рисунке соответствует варианту задания. Числовые значения параметров приведены в табл. 3.

Таблица 3

Числовые значения параметров контрольной работы С3

№ п/п	P , Н	M , Нм	q , (q_{\max}) Н/м	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	l_4 , м	α , град
1	800	1000	400	2	0,5	1	1,5	30
2	600	400	800	1,5	1	1	2	60
3	400	100	600	2	1	1,5	1,5	45
4	500	800	250	2	1,5	1,5	0,8	120
5	200	500	300	1,8	1,2	1,4	1	150
6	700	400	1000	1,6	1	1,2	1,2	-30
7	1000	400	700	1,4	1,2	0,8	1	-60
8	400	600	500	1,2	1	0,6	0,8	-45

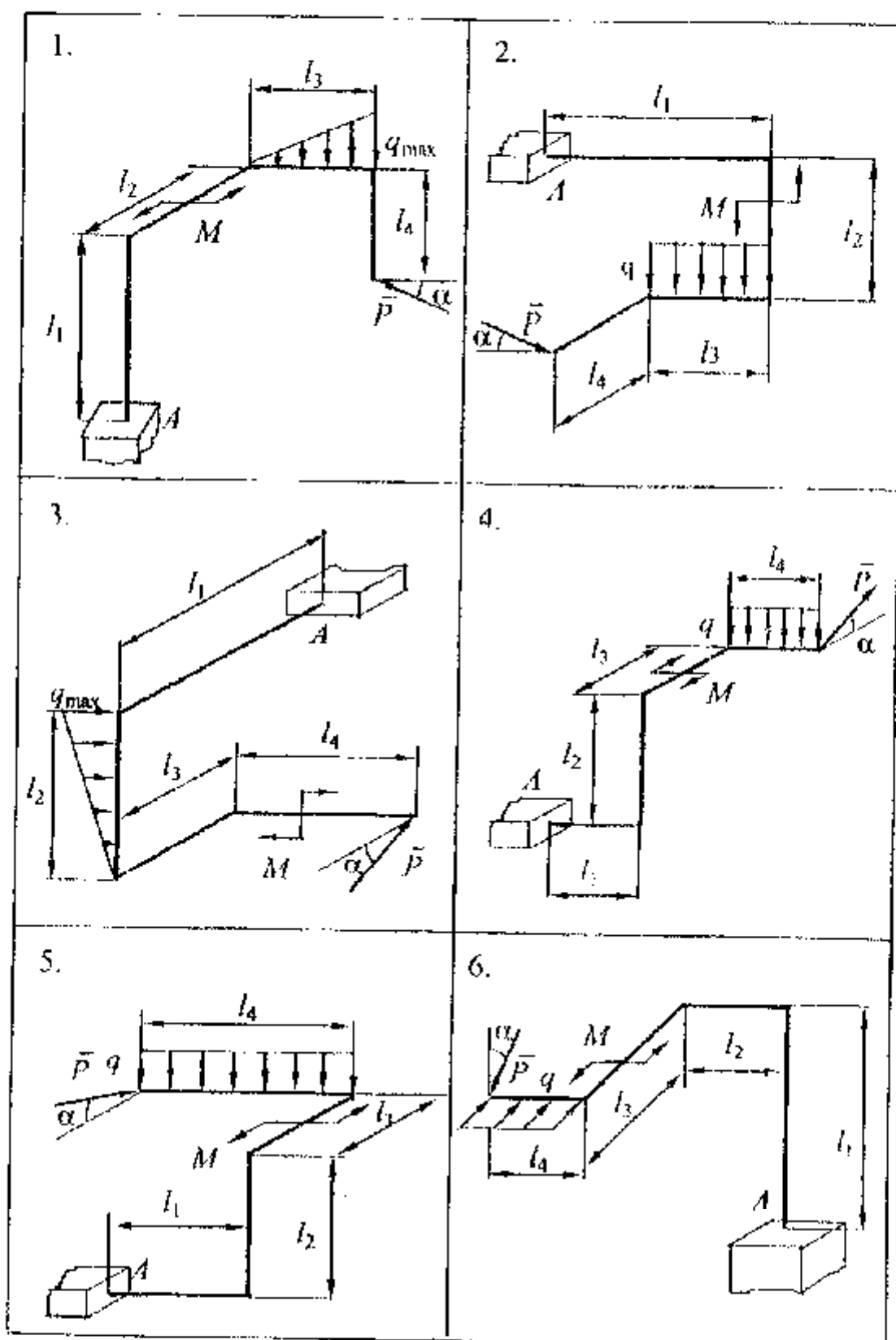
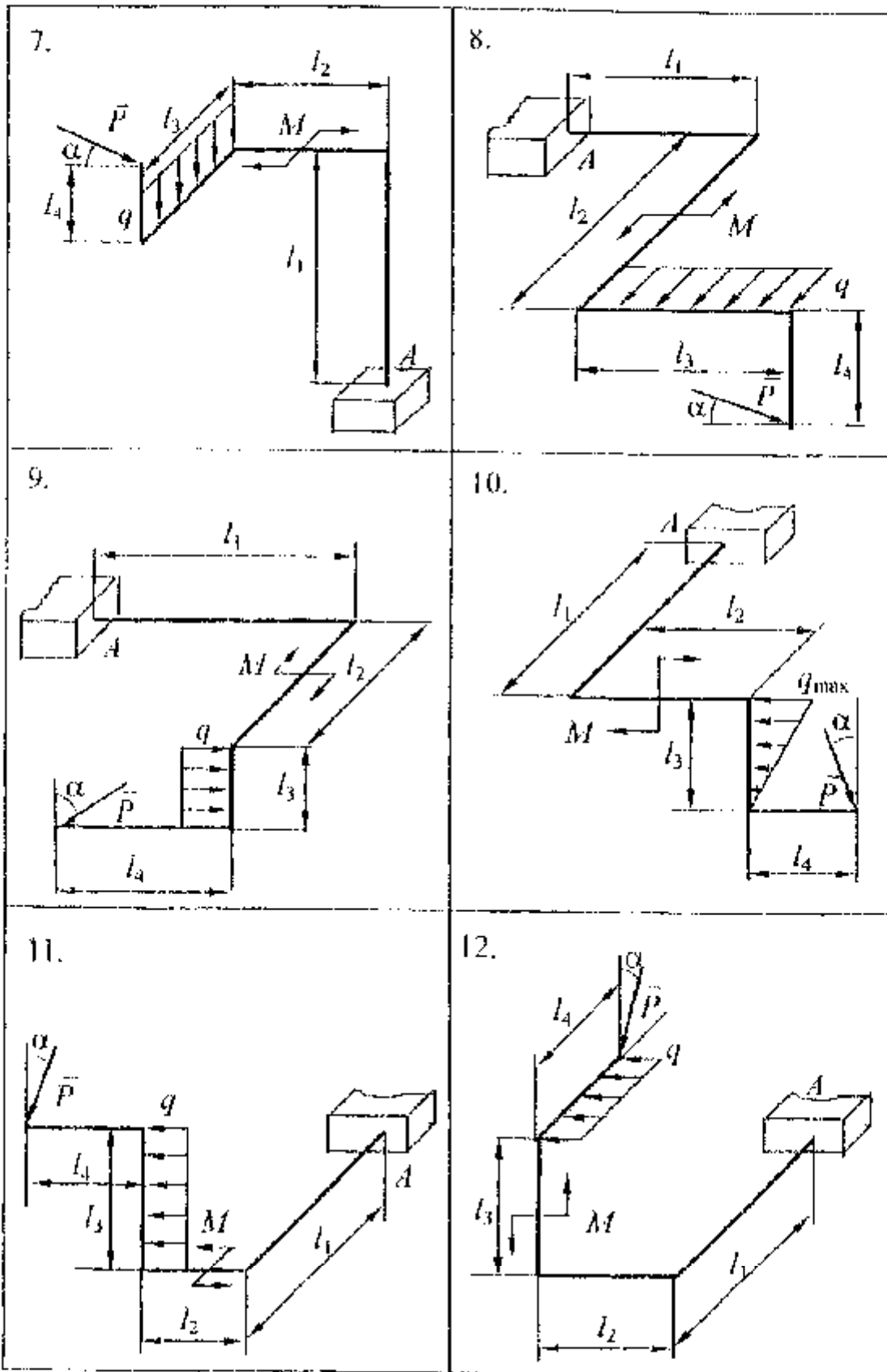
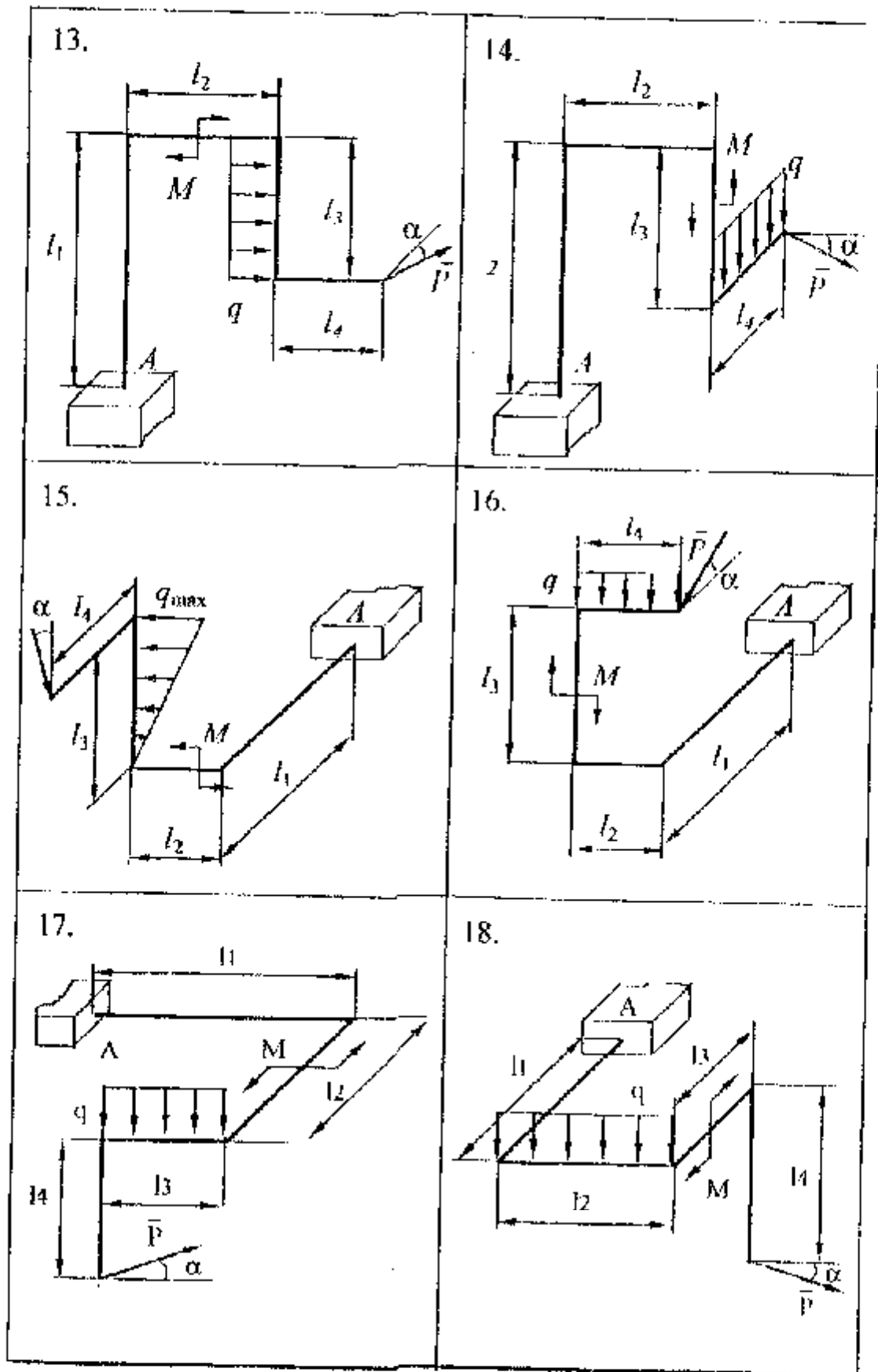


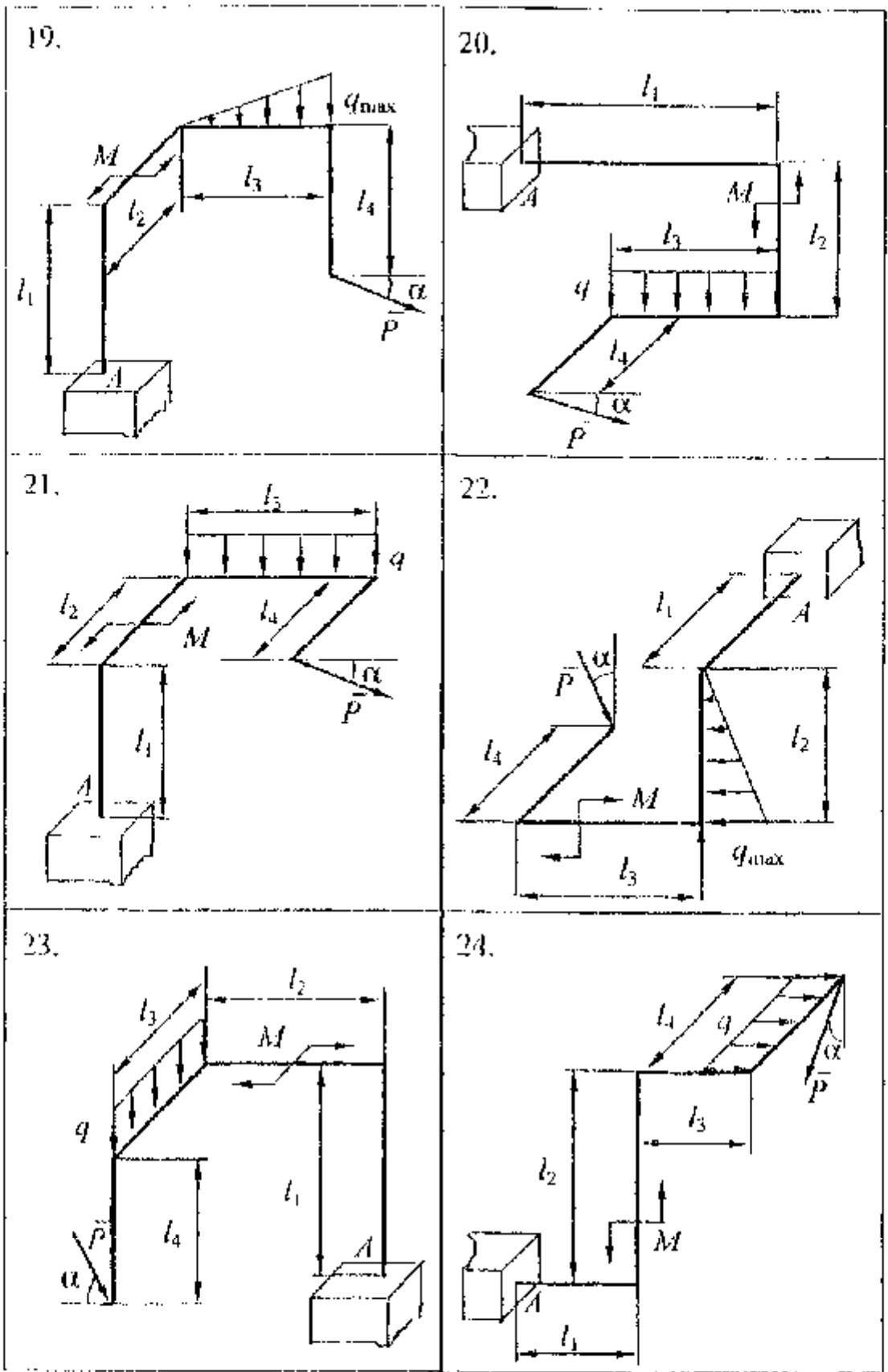
Рис. 4.]



Продолжение рис. 4.1

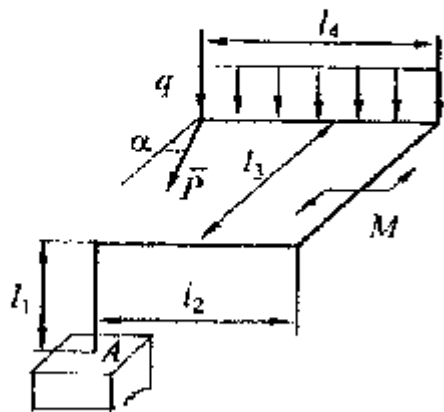


Продолжение рис. 4.1

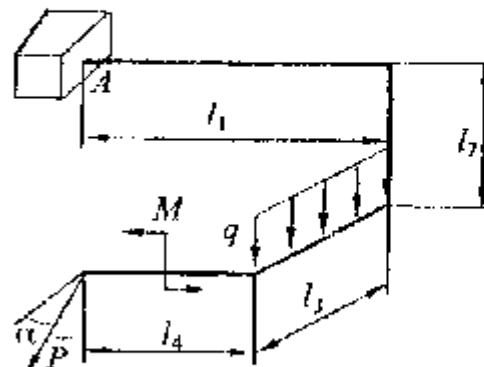


Продолжение рис. 4.1

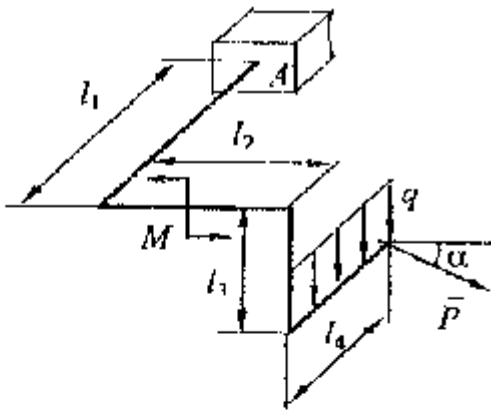
25.



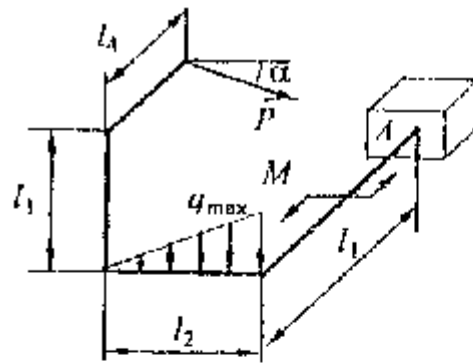
26.



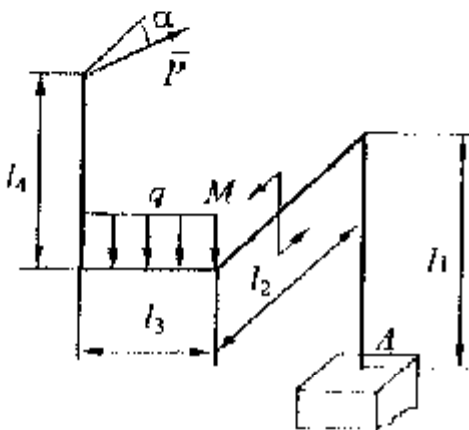
27.



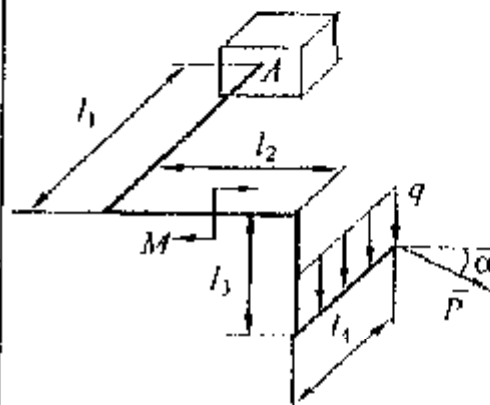
28.



29.



30.



Окончание рис. 4.1

4.2. Краткие методические указания к выполнению

4.2.1. Прежде, чем приступить к выполнению задания, необходимо проработать соответствующие разделы лекций и рекомендуемой литературы [1] -- [4].

4.2.2. Выбрать оси прямоугольной системы координат $Axyz$, направив одну из осей вдоль участка длиной l_1 , а вторую – вдоль участка длиной l_2 .

4.2.3. Приложить активные силы, причем распределенную нагрузку заменить сосредоточенной силой, определив ее величину и точку приложения.

4.2.4. Освободиться от заделки в точке A , заменив ее действие на раму реакцией. Реакция заделки состоит из силы, имеющей составляющие \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , и момента заделки \vec{M}_A с составляющими \vec{M}_{Ax} , \vec{M}_{Ay} , \vec{M}_{Az} .

4.2.5. Составить шесть уравнений равновесия пространственной системы сил, действующих на раму, и определить искомые реакции.

4.3. Пример выполнения контрольной работы

4.3.1. Условие примера выполнения контрольной работы СЗ

Пространственная рама, изогнутая под прямыми углами, концом A заделана в неподвижную опору и нагружена силой $P = 2$ кН, двумя парами сил с моментами $M_1 = 3$ кНм и $M_2 = 7$ кНм, равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 4$ кНм и линейно распределенной нагрузкой максимальной интенсивностью $q_{\max} = 6$ кНм. Рама с приложенными к ней заданными силами изображена на рис. 4.2.

Определить опорные реакции, если $l_1 = 5$ м, $l_2 = 4$ м, $l_3 = 3$ м, $l_4 = 2$ м.

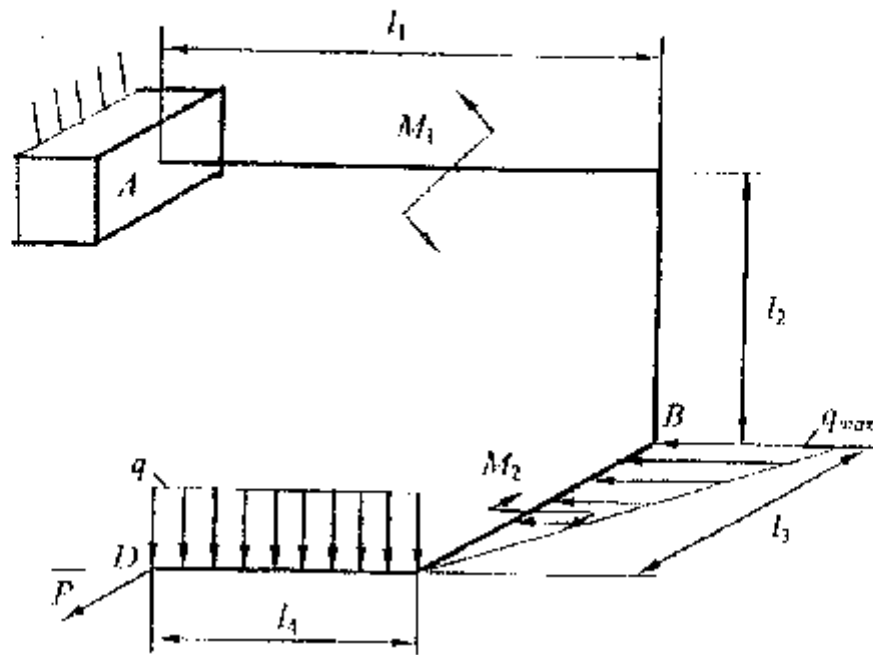


Рис. 4.2

4.3.2. Решение примера выполнения контрольной работы СЗ

Связью для рамы, выбранной в качестве объекта равновесия, является жесткая заделка. Отбросим мысленно связь и заменим ее действие на раму реакциями \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , \vec{M}_{Ax} , \vec{M}_{Ay} , \vec{M}_{Az} , изображенными на рис. 4.3.

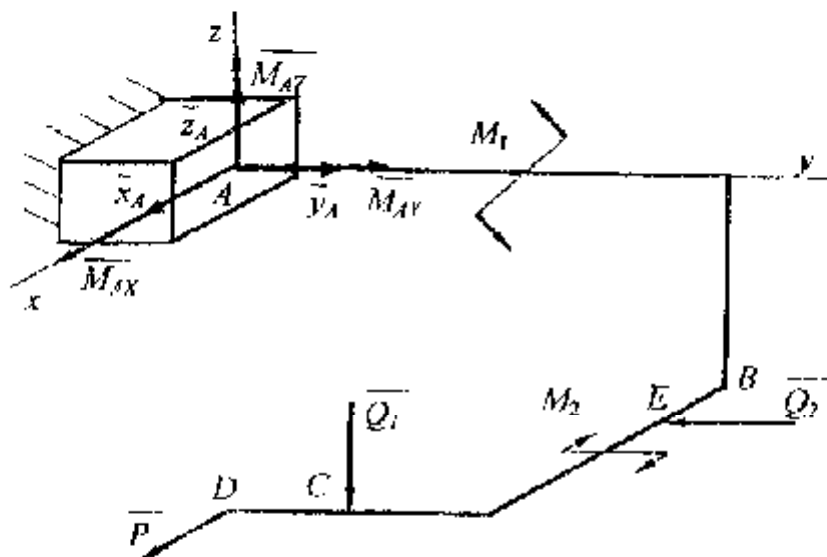


Рис. 4.3

Действие распределенных нагрузок представляем их равнодействующими Q_1 и Q_2 :

$$Q_1 = ql_4 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ кН},$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} q_{\max} l_3 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9 \text{ кН},$$

соответственно приложенное в точках C и E , причем:

$$DC = \frac{1}{2} l_4 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ м}, \quad BE = \frac{1}{3} l_3 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \text{ м}.$$

Из рис. 4.3 следует, что к раме приложена произвольная пространственная система сил: \bar{P} , \bar{M} , \bar{Q}_1 , \bar{Q}_2 , \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{Z}_A , \bar{M}_{AX} , \bar{M}_{AY} , \bar{M}_{AZ} . Запишем уравнения равновесия рамы:

$$\sum X = X_A + P = 0,$$

$$\sum Y = Y_A - Q_2 = 0,$$

$$\sum Z = Z_A - Q_1 = 0,$$

$$\sum m_X(\bar{F}_K) = M_{AX} + M_1 - Q_1(l_1 - DC) - Q_2 l_2 = 0,$$

$$\sum m_Y(\bar{F}_K) = M_{AY} + Q_1 l_3 - P l_2 = 0,$$

$$\sum m_Z(\bar{F}_K) = M_{AZ} - P(l_1 - l_4) - Q_2 \cdot BE - M_2 = 0.$$

Из первых трех уравнений находим X_A , Y_A и Z_A :

$$X_A = -P = -2 \text{ кН}, \quad Y_A = Q_2 = 9 \text{ кН}, \quad Z_A = Q_1 = 8 \text{ кН}.$$

Из следующих трех уравнений определяем составляющие M_{AX} , M_{AY} , M_{AZ} момента реакции заделки:

$$M_{AX} = Q_1(l_1 - DC) + Q_2 l_2 - M_1 = 8 \cdot (5 - 1) + 9 \cdot 4 - 3 = 65 \text{ кНм},$$

$$M_{AY} = P l_2 + Q_1 l_3 = 2 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 28 \text{ кНм},$$

$$M_{AZ} = P(l_1 - l_4) + Q_2 BE + M_2 = 2 \cdot (5 - 2) + 9 \cdot 1 + 7 = 22 \text{ кНм}.$$

Направления реакций \bar{X}_A и \bar{M}_{AY} противоположны тем, которые показаны на рис. 4.3.

Список литературы

1. Бутелин Н.В., Луцк Я.Б., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики.- СПб.: Издательство «Лань», 2002. - 736 с.
2. Дроп В.И. и др. Под ред. Колесникова К.С. Курс теоретической механики. М.: Из-во МПГУ им. Баумана И.О. 2002.-736 с.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высш. школа. 2003.- 719 с.
4. Яблоцкий А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. СПб: Из-во «Лань», 2004. 768 с.

Приложение

Уфимский государственный авиационный технический университет

Кафедра теоретической механики

Контрольные работы Статика

Вариант №

№ группы	Должность	Ф.И.О.	Дата	Подпись
Выполнил	студент			
Проверил	доцент			
Принял	доцент			

Уфа 2007

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Уфимский государственный авиационный технический университет

Кафедра теоретической механики

КИНЕМАТИКА

Методические указания
к выполнению контрольных работ по теоретической механике

Уфа 2007

Составители: В.Е. Сидоров, М.М. Шакирьяпов

УДК 531.31(07)

ББК 22.21(я7)

Кинематика: Методические указания к выполнению контрольных работ по теоретической механике / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т; Сост.: В.Е. Сидоров, М.М. Шакирьяпов. – Уфа, 2007. – 53 с.

Методические указания содержат варианты заданий по кинематике простого и составного (сложного) движения точки, кинематике плоскопараллельного движения твердого тела и примеры их выполнения.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлениям подготовки дипломированных специалистов 657900 (220300) – «Автоматизированные технологии и производства», 651400 (150200) – «Машиностроительные технологии и оборудование», 657800 (151000) – «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», 650900 (140200) – «Электроэнергетика», заочной формы обучения.

Табл. 3. Ил. 12. Библиогр.: 4 назв.

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Первушин Ю.С.,
канд. техн. наук, доц. Горбаненко В.М.

©Уфимский государственный
авиационный технический университет, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Требования, предъявляемые к выполнению и оформлению контрольной работы.....	4
2. Контрольная работа К1. Простое движение точки.....	5
2.1. Содержание контрольной работы.....	5
2.2. Краткие методические указания к выполнению.....	5
2.3. Пример выполнения контрольной работы.....	9
3. Контрольная работа К2. Сложное движение точки.....	12
3.1. Содержание контрольной работы.....	12
3.2. Краткие методические указания к выполнению.....	12
3.3. Пример выполнения контрольной работы.....	27
4. Контрольная работа К3. Плоскопараллельное движение твердого тела.....	32
4.1. Содержание контрольной работы.....	32
4.2. Краткие методические указания к выполнению.....	44
4.3. Пример выполнения контрольной работы.....	46
Список литературы.....	52
Приложение.....	53

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельное выполнение контрольной работы позволяет каждому студенту глубже изучить раздел теоретической механики «Кинематика» и приобрести навыки решения конкретных задач по определению кинематических характеристик простого и сложного движений точки, а так же по кинематическому расчету плоских рычажных механизмов. Перед выполнением задания необходимо изучить основные понятия кинематики, теоремы и методы расчетов, применяемые при выполнении контрольной работы, используя рекомендуемую в методических указаниях литературу. Это поможет построить решение конкретного варианта задания не просто следуя примеру выполнения, а выявляя особенности данного варианта творчески находить оптимальные решения.

Знания, приобретенные в ходе выполнения контрольной работы, послужат основой как для решения задач в различных разделах теоретической механики и смежных дисциплин, так и технических задач.

1. ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Каждая контрольная работа выполняется на сброшюрованных листах формата А4, строго по варианту назначенному преподавателем. Первый лист является титульным. Пример заполнения титульного листа приведен в приложении.

1.2. Все страницы должны иметь поля: слева – 20 мм, справа – 5 мм, сверху – 5 мм, снизу – 5 мм.

1.3. Перед выполнением задания необходимо записать его условие, выписать исходные данные и в соответствии с ними изобразить расчетную схему.

1.4. Решение записывается подробно и аккуратно со всеми вычислениями, вспомогательными чертежами и пояснениями. Требуемые величины находятся сначала в алгебраической форме и записываются в виде формулы. Затем в эту формулу подставляются известные числовые величины в соответствии с их позицией в формуле и после знака равенства записывается результат и его размерность. Промежуточные вычисления при этом опускаются. Вычисления проводятся с точностью до третьей либо четвертой значащей цифры.

1.5. Расчетные схемы рисуются крупно на отдельной странице с помощью чертежных инструментов, строго в масштабе, с указанием всех размеров, числовых данных и осей. Углы должны вычерчиваться точно с использованием транспортира. Многие величины, определяемые в ходе решения задач, являются векторными, поэтому следует определить не только их модули, но и построить (изобразить) эти векторы на рисунках.

1.6. Пометки, сделанные преподавателем при проверке не убираются. Следует иметь в виду, что преподаватель при проверке работы отмечает, как правило, лишь место появления ошибки и ее характер.

Разобравшись по учебнику с теоретическим материалом, студент должен исправить допущенную ошибку, а затем внести исправления во все расчеты, оказавшиеся ошибочными, начиная с места появления ошибки и до конца решения задачи.

1.7. К работе, высылаемой на повторную проверку, в обязательном порядке должен прилагаться ее первоначальный (незачтенный) вариант.

1.8. Работа считается зачтенной только после ее *защиты* преподавателю, проводимой в форме собеседования.

1.9. *Работа, не соответствующая своему варианту, или выполненная с нарушением изложенных требований, не засчитывается и возвращается для исправления.*

2. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К1 ПРОСТОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

2.1. Содержание контрольной работы

Точка M движется в плоскости xOy . Уравнения движения точки в соответствии с вариантами приведены в табл. 1, где x и y выражены в метрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки и построить траекторию на чертеже. Для момента времени t_1 определить и построить на чертеже:

- положение точки на траектории;
- вектор скорости точки;
- векторы касательного, нормального и полного ускорений точки;
- радиус и центр кривизны траектории в соответствующей точке.

2.2. Краткие методические указания к выполнению

Необходимо изучить основные понятия кинематики точки, способы задания движения точки и порядок определения характеристик движения точки при различных способах задания движения точки [1].

Контрольная работа К1 выполняется с использованием формул для определения скорости и ускорения точки при координатном способе задания ее движения. Все искомые величины нужно определить только для момента времени t_1 .

Для того, чтобы получить уравнение траектории точки в явном виде, следует из уравнений движения исключить время t .

В некоторых вариантах могут оказаться полезными тригонометрические формулы:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1;$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha.$$

Таблица 1

Варианты числовых значений параметров контрольной работы К1

Номер варианта	Уравнения движения точки		Время
	$x=x(t),$ м	$y=y(t),$ м	$t_1,$ сек
1	2	3	4
1	$-2t^2 + 3$	$-5t$	0,5
2	$4 \cos^2 \frac{\pi}{3} t + 2$	$4 \sin^2 \frac{\pi}{3} t$	1
3	$-\cos \frac{\pi}{3} t^2 + 3$	$\sin \frac{\pi}{3} t^2 - 1$	1
4	$4(t+1)$	$-\frac{4}{(t+1)}$	2
5	$2 \sin \frac{\pi}{3} t$	$-3 \cos \frac{\pi}{3} t + 4$	1
6	$3t^2 + 2$	$-4t$	0,5
7	$7 \sin \frac{\pi}{6} t^2 + 3$	$2 - 7 \cos \frac{\pi}{6} t^2$	1
8	$4 \cos \frac{\pi}{6} t$	$3 \cos \frac{\pi}{3} t - 2$	1
9	$-4 \cos \frac{\pi}{3} t$	$-2 \sin \frac{\pi}{3} t - 3$	1
10	$-4t^2 + 1$	$-3t$	0,5
11	$5 \sin^2 \frac{\pi}{6} t$	$-5 \cos^2 \frac{\pi}{6} t - 3$	1

Продолжение табл. 1

1	2	3	4
12	$5 \cos \frac{\pi}{3} t^2$	$-5 \sin \frac{\pi}{3} t^2$	1
13	$8 - 12 \cos\left(\frac{\pi}{3} t\right)$	$6 \sin \frac{\pi}{3} t$	1
14	$4 - 6 \sin \frac{\pi}{6} t$	$4 \cos \frac{\pi}{3} t$	1
15	$-2t - 2$	$-\frac{2}{t+1}$	2
16	$4 \cos \frac{\pi}{3} t$	$-3 \sin \frac{\pi}{3} t$	1
17	$3t$	$4t^2 + 1$	0.5
18	$7 \sin^2 \frac{\pi}{6} t - 5$	$-7 \cos^2 \frac{\pi}{6} t$	1
19	$1 + 3 \cos \frac{\pi}{3} t^2$	$3 \sin \frac{\pi}{3} t^2 + 3$	1
20	$t - 4$	$(2 + t)^2$	1
21	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - \frac{3}{2}t - 3t^2$	1
22	$6 \sin \frac{\pi}{6} t^2 - 2$	$6 \cos \frac{\pi}{6} t^2 + 3$	1
23	$7t^2 - 3$	$5t$	0.25
24	$-4 \cos \frac{\pi}{3} t^2 - 1$	$-4 \sin \frac{\pi}{3} t$	1

1	2	3	4
25	$8 \cos^2 \frac{\pi}{6} t + 2$	$-8 \sin^2 \frac{\pi}{6} t - 7$	1
26	$9 \cos \frac{\pi}{6} t + 5$	$6 \cos \frac{\pi}{6} t$	1
27	$2 \cos \frac{\pi}{3} t^2 - 2$	$-2 \sin \frac{\pi}{3} t^2 + 3$	1
28	$-3 - 9 \sin \frac{\pi}{6} t^2$	$-9 \cos \frac{\pi}{6} t^2 + 5$	1
29	$-4t^2 + 1$	$-3t$	2
30	$-3 \sin \frac{\pi}{6} t$	$4 \cos^2 \frac{\pi}{6} t$	1

2.3. Пример выполнения контрольной работы.

2.3.1. Условие примера выполнения контрольной работы К1.

Точка M движется в плоскости xOy согласно уравнениям

$$x = \frac{4}{t+1}, \quad y = \frac{1}{2}t + 0,5.$$

(x, y - в метрах, t - в секундах.)

Определить уравнение траектории точки M ; найти скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ с, а также ее касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

2.3.2. Решение примера выполнения контрольной работы К1.

Для того, чтобы получить уравнение траектории точки M в явном виде исключим время t . Из второго уравнения движения определяем $t+1 = 2y$.

Подставляя это выражение в первое уравнение движения, получаем уравнение траектории точки M в явном виде $x = \frac{2}{y}$.

Траектория точки M – ветвь гиперболы изображенная на рис. 2.1. Координаты точки M при $t_1 = 1$ с равны $x(1) = 2$ м, $y(1) = 1$ м.

Определяем проекции скорости точки на координатные оси:

$$V_x = \dot{x} = -\frac{4}{(t+1)^2}; \quad V_y = \dot{y} = 0,5 \text{ м/с.}$$

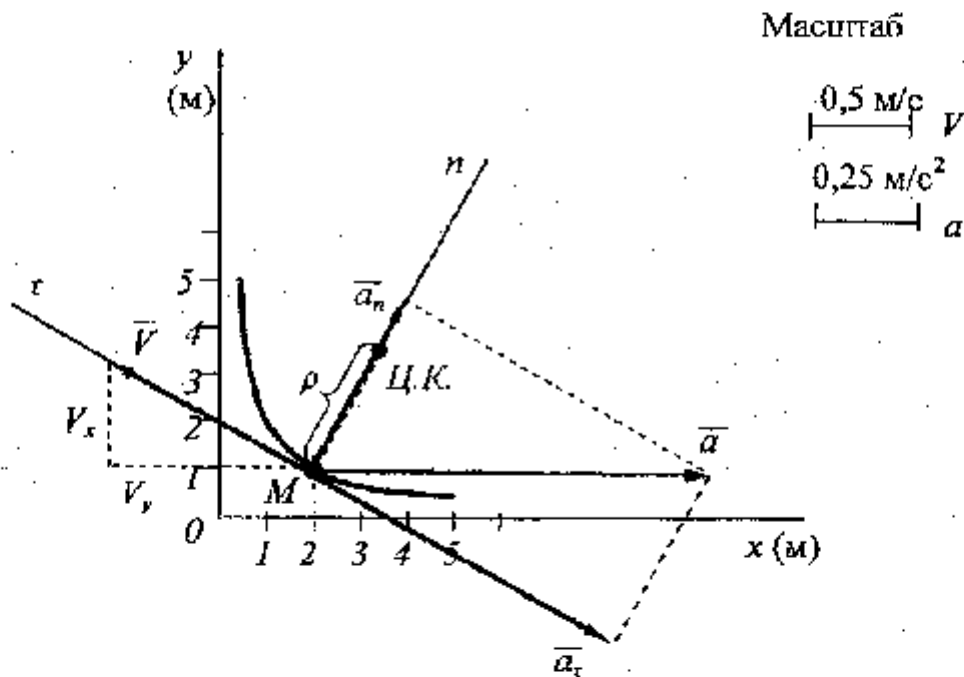


Рис. 2.1

При $t_1 = 1$ с находим $V_x = -1$ м/с, $V_y = 0,5$ м/с.

Модуль скорости точки:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (0,5)^2} \approx 1,12 \text{ м/с.}$$

Определяем проекции ускорения точки на координатные оси:

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = \frac{8}{(t+1)^3}; \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = 0.$$

При $t_1 = 1$ с $a_x = 1$ м/с², $a_y = 0$.

Модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1 \text{ м/с}^2.$$

Модуль касательного ускорения точки определяем по формуле

$$|a_{\tau}| = \frac{|a_x V_x + a_y V_y|}{V} = \frac{|1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0,5|}{1,18} = 0,893 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение точки

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_{\tau}^2} = \sqrt{1^2 - 0,893^2} \approx 0,451 \text{ м/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории точки

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{1,25}{0,451} \approx 2,77 \text{ м.}$$

Векторы \vec{V} , \vec{a} , a_{τ} , \vec{a}_n и центр кривизны траектории (точка Ц.К.) изображены на рис. 2.1.

3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К2 СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Содержание контрольной работы

По заданным уравнениям относительного движения точки $S=S(t)$ по переносящему телу и угловой скорости $\omega=\omega(t)$ этого тела, приведенным в табл. 2, найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 . Варианты расчетных схем изображены на рис. 3.1.

3.2. Краткие методические указания к выполнению

3.2.1. Проработать раздел “Сложное движение точки”, пользуясь конспектом лекций и рекомендуемыми учебниками [1]–[4].

3.2.2. По условию задачи вычертить переносящее тело и изобразить точку M в момент времени t_1 . Выбрать неподвижную систему координат и подвижную систему координат, связанную с переносящим телом.

3.2.3. Определить относительную траекторию точки M и абсолютную траекторию точки M' переносящего тела, с которой в данный момент времени совпала движущаяся точка M .

3.2.4. Определить алгебраические величины переносной и относительной скоростей точки M и указать на чертеже векторы переносной \vec{V}_e и относительной \vec{V}_r скоростей.

3.2.5. Указать на чертеже вектор абсолютной скорости точки M :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

3.2.6. Найти проекции V_{ax}, V_{ay}, V_{az} вектора абсолютной скорости точки M на оси координат.

3.2.7. Найти модуль вектора абсолютной скорости точки M

$$V_a = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2 + V_{az}^2}.$$

3.2.8. Определить величины переносного нормального и переносного касательного ускорений точки M и указать на чертеже векторы \vec{a}_e^n и \vec{a}_e^r .

При переносном вращательном движении

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot R_e;$$

$$a_e^r = \varepsilon_e \cdot R_e,$$

где R_e - условный радиус кривизны переносной траектории,

ω_e - переносная угловая скорость,

ε_e - переносное угловое ускорение.

3.2.9. Определить величину относительного ускорения точки M и указать на чертеже вектор \vec{a}_r . При относительном криволинейном движении точки M

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^r.$$

Здесь \vec{a}_r^n и \vec{a}_r^r - нормальная и касательная составляющие относительного ускорения точки. Величины этих ускорений определяются по формулам

$$a_r^r = \dot{V}_r;$$

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho_r},$$

где ρ_r - радиус кривизны относительной траектории.

3.2.10. Определить модуль ускорения Кориолиса

$$a_k = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin(\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r).$$

3.2.11. Указать на чертеже вектор \vec{a}_k ускорения Кориолиса пользуясь правилом Жуковского.

3.2.12. Записать векторное равенство, выражающее теорему о сложении ускорений при вращательном переносном движении

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^r + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^r + \vec{a}_k.$$

3.2.13. Найти проекции a_{ax}, a_{ay}, a_{az} вектора абсолютного ускорения точки M на оси координат.

3.2.14. Определить модуль вектора абсолютного ускорения точки M по формуле

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}.$$

Варианты числовых значений параметров контрольной работы К2

№ Вар.	№ Дан.	$\omega(t)$, рад/с	$S(t)$, см	R, см	a, см	t, сек
1	2	3	4	5	6	7
1.	1	$3\sin(\pi t)$	$12t+3\cos(2\pi t/3)$	18	-	1/3
	2	$0,5\cos(2t)$	$20t+8\sin(\pi t/3)$	12	-	0,5
	3	$0,5t^2+1$	$15t-3t^2$	12	-	2
	4	$2t-\sin^2(\pi t)$	$18t-5t^2$	10	-	1
	5	$5t^2-2$	$10t+2t^2$	15	-	2
	6	$2\sin(\pi t/2)$	$10\pi(1+\sin(\pi t/3))$	24	-	0,5
2.	1	$2\sin^2(\pi t/2)$	$6+12t-3t^2$	-	20	3
	2	$4t-2t^2$	$4+10t-5t^2$	-	10	0,5
	3	$3t+\sin(\pi t/3)$	$5+15t-3t^2$	-	15	1
	4	$3\cos(\pi t^3/6)$	$8+4t+3t^3$	-	30	2
	5	$2\pi t-\cos^2(\pi t/3)$	$15t-3t^2$	-	12	2
	6	$t-2t^2$	$5(1+\sin(\pi t/3))$	-	15	0,5
3.	1	$2-6t$	$2\pi\sin^2(\pi t)$	20	50	1/6
	2	$6t$	$2\pi(2t-3t^2)$	10	40	1/3
	3	$1-10t$	$\pi(2t-3t^2)$	20	60	1/6
	4	$\sin(\pi t)$	$3\pi\cos^2(\pi t)$	30	100	1/6
	5	$2\cos^2(\pi t)$	$2-6t$	10	50	1/3
	6	$\pi(2t-t^2)$	$2-6t+t^3$	30	120	1/2
4.	1	$5\pi-2\pi t^2$	$\pi(6t+4t^2)$	10	5	1/2
	2	$4t-2$	$\pi(t-t^2)/2$	20	4	2
	3	$4-t$	$15t-3t^2$	12	10	2
	4	$2\pi-t^2$	$6t+4\sin^2(2\pi t/3)$	15	5	1
	5	$6-t^2$	$2t-3t^2$	15	5	3
	6	$4t$	$\pi(10t-4\sin(\pi t/3))$	10	10	1/2

Продолжение табл. 2

№ Вар.	№ Дан.	$\omega(t)$, рад/с	$S(t)$, см	R, см	a, см	t, сек
1	2	3	4	5	6	7
5.	1	$6-6t$	$2\pi\sin^2(\pi t)$	20	-	1/6
	2	$6t$	$2\pi(2t-3t^2)$	10	-	1/3
	3	$2t$	$\pi(7t-3t^2)/3$	20	-	1
	4	$\pi\sin^2(2\pi t)$	$4\pi t$	10	-	1/3
	5	$4-2t$	$(4\pi/9)\cos^2(5\pi t/6)$	20	-	1
	6	$2\sin^2(2\pi t)$	$2\pi t$	12	-	1/3
6.	1	πt	$5\pi(3t-4t^4)$	15	-	1
	2	$\pi-0,5\pi t$	$\pi(9t+4\cos^2(2\pi t/3))$	15	-	1
	3	$3\pi-\pi t^2$	$\pi(5t^2+5)$	18	-	1
	4	$2\pi t$	$10\pi(\sin(\pi t/3)-t)$	12	-	1/2
	5	$3t$	$27\pi t+2\pi\cos(\pi t)$	30	-	1/3
	6	$3t-t^2$	$\pi(2t^2+5t)$	24	-	2
7.	1	$2t^2$	$10t-4t^2-4$	-	10	0,5
	2	$2t-0,1t^2$	$4+14t-2t^2$	-	30	2
	3	$6t-3t^2$	$10-8\sin^2(\pi t)$	-	20	1/3
	4	$0,5\cos^2(2\pi t)$	$6+6t-3t^2$	-	12	1/6
	5	$t^2+\pi$	$6+6\sin^2(2t)$	-	15	$\pi/3$
	6	$2t+t^2$	$5+15t-5t^2$	-	40	1
8.	1	$3-t^2$	$6t^2+2t$	20	-	1
	2	πt	$15\sin(\pi t/3)$	15	-	2
	3	$3\pi-\pi t$	$18(1-\cos(\pi t/3))$	18	-	2
	4	π	$4\pi t+3\sin(\pi t/3)$	12	-	1/2
	5	$6-6t$	$10\sin(\pi t/2)$	20	-	1/3
	6	4	$6\sin(2\pi t^2)$	10	-	1/2

Продолжение табл. 2

№ Вар.	№ Дан.	$\omega(t)$, рад/с	$S(t)$, см	R , см	a , см	t , сек
1	2	3	4	5	6	7
9.	1	$6-6t$	$20\sin^2(\pi t)$	20	-	1/6
	2	$3\pi-\pi t$	$-3t^2+6t+20$	30	-	2
	3	π	$40t-\sin(\pi t/3)$	15	-	1/2
	4	$8\pi-6\pi t$	$10+2,5\sin(2\pi t)$	18	-	1/3
	5	$3-t^2$	$20-5\cos^2(\pi/3)$	25	-	1
	6	$5-3t$	$10t^2+4t+10$	30	-	1
10.	1	$4t-9t^2$	$8-4\sin^2(2\pi t)$	-	10	1/3
	2	$\cos^2(2\pi t)$	$10+4t-3t^2$	-	12	1/6
	3	$3t^2$	$6\sin^2(2t)$	-	6	$\pi/3$
	4	$2t^2+t$	$15t-5t^2$	-	10	1
	5	$2\pi t+\pi t^3/12$	$4t^2+5t$	-	30	2
	6	$2\sin(2\pi t)$	$5+6t+3t^2$	-	20	$\pi/3$
11.	1	$2t-3t^2$	$10-6\sin(3\pi t)$	20	-	0,25
	2	$3-t$	$9+12t+2t^2-3t^3$	30	-	1
	3	$2t$	$12-7t+6t^2$	15	-	0,5
	4	$5-3t$	$15-10\cos^2(\pi t/3)$	25	-	1
	5	πt	$10+10\sin(\pi/3)$	30	-	2
	6	$6\pi-\pi t$	$25+6t-3t^2$	24	-	2
12.	1	$2\sin^2(\pi t/2)$	$6+12t-3t^2$	-	20	3
	2	$4t-2t^2$	$4+10t-5t^2$	-	10	0,5
	3	$3t+\sin(\pi t/3)$	$5+15t-3t^2$	-	20	1
	4	$3\cos(\pi/6)$	$8+4t+3t^3$	-	10	2
	5	$2\pi t-\cos^2(\pi t/3)$	$15t-3t^2$	-	20	2
	6	$t-2t^2$	$5(1+\sin(\pi t/3))$	-	12	0,5

Продолжение табл. 2

№ Вар.	№ Дан.	$\omega(t)$, рад/с	$S(t)$, см	R, см	a, см	t, сек
1	2	3	4	5	6	7
13.	1	$\pi \sin^2(2\pi t)$	$5\pi(3t^2+2t)$	15	-	1/3
	2	$2t$	$0,1\pi(7t-2t^2)$	20	-	1
	3	$3-3t$	$4\pi \cos^2(2\pi t)$	10	-	1/3
	4	4	$15\pi \cos(2\pi t)$	10	-	1/6
	5	$\sin^2(2\pi t)$	$4\pi t$	20	-	1/3
	6	$6t$	$2\pi(2t-3t^2)$	12	-	1/3
14.	1	$4\sin(\pi t/4)$	$5+7t-2t^2$	-	20	1
	2	$4t-3t^2$	$8+4\sin^2(2\pi t)$	-	18	1/3
	3	$2t^2+t$	$15t-5t^2$	-	20	1
	4	$2\sin^2(2t)$	$3t^2+6t+5$	-	25	$\pi/3$
	5	$3t^2$	$6\sin(2t)$	-	10	$\pi/3$
	6	$2t^2$	$10t-6t^2+3$	-	12	0,5
15.	1	$8\pi-6\pi t$	$10+5 \sin^2(\pi t/2)$	-	-	1/3
	2	$3-t^2$	$15+5 \cos(\pi t/3)$	-	-	1
	3	$3t-2$	$2/3t^3-4t^2+8t+6$	-	-	1
	4	t^3-3	$3t+2t^2-3t^3$	-	-	2
	5	πt	$30\sin(\pi t/3)$	-	-	2
	6	$3t$	$4t^2-6t$	-	-	1
16.	1	$4t-3t^2$	$8\pi \sin(\pi t)$	12	-	1/6
	2	$\pi t-t^2$	$27\pi t+2\pi \cos(\pi t)$	20	-	1/3
	3	πt^2	$10\pi(t+2\sin(\pi t/3))$	12	-	1/2
	4	$8t-t^2$	$\pi(5t+2t^2)$	24	-	2
	5	$3\sin(\pi t/3)$	$\pi(3t+4\sin^2(2\pi t/3))$	18	-	1
	6	$3t+\sin(\pi t/3)$	$\pi(9t-4)$	15	-	1

Продолжение табл. 2

№ Вар.	№ Дан.	$\omega(t)$, рад/с	$S(t)$, см	R, см	a, см	t, сек
1	2	3	4	5	6	7
17.	1	$2t^2$	$10t-4t^2+4$	-	20	0,5
	2	$2t-0,1t^2$	$4+14t-2t^2$	-	10	2
	3	$6t-3t^2$	$10+8\sin^2(\pi t)$	-	20	1/3
	4	$0,5\cos^2(2\pi t)$	$6+6t-3t^2$	-	10	1/6
	5	$t^2+6\pi\sin(2t)$	$6+6\sin(2t)$	-	20	$\pi/3$
	6	$2t+t^2$	$5-15t-5t^2$	-	12	1
18.	1	$6t^2+2t$	$8\pi-16\pi t^2$	16	-	0,5
	2	$3t-2$	$4\pi\sin^2(2\pi t)$	9	-	1/3
	3	$2t$	$24\pi(2t-3t^2)$	12	-	1/3
	4	$3-48t^2$	$12\pi\cos^2(3\pi t)$	18	-	1/12
	5	$6-6t^2$	$50\pi\sin(\pi/6)$	30	-	1
	6	$2\sin^2(\pi t/24)$	$3\pi t$	24	-	6
19.	1	$6-4t^2$	$18(1-\cos(\pi t/3))$	-	20	2
	2	$-2t$	$4\pi t+3\sin(\pi t/2)$	-	10	0,5
	3	$27t^2$	$10\sin^2(\pi t)$	-	20	1/3
	4	$2t-5t^2$	$4+8t\cos(\pi t/3)$	-	10	0,5
	5	$-3\cos(\pi t/3)$	$6t-4t^2+6$	-	20	0,5
	6	t^2-3	$-9\cos(\pi t/3)$	-	12	2
20.	1	$2t$	$3t^2+5t$	-	-	2
	2	$\pi t/2$	$20\sin(\pi t/3)$	-	-	4
	3	$3t$	$10-10\cos^2(\pi t)$	-	-	1/3
	4	$\pi-2t$	$10\sin(\pi t/4)$	-	-	1
	5	$4-8t^2$	$16t^2+12t$	-	-	1/4
	6	$2t^2+t$	$15t-5t^2$	-	-	1

Продолжение табл. 2

№ Вар.	№ Дан.	$\omega(t)$, рад/с	$S(t)$, см	R, см	a, см	t, сек
1	2	3	4	5	6	7
21.	1	$3\pi - \pi t^2$	$6t - 3t^2$	12	-	2
	2	πt^3	$4\pi t - 3\pi \sin(\pi t/3)$	2	-	0,5
	3	$8\pi - 6\pi t$	$6\pi \sin^2(\pi t)$	9	-	1/3
	4	$2\pi t$	$4\sin(2\pi t^2)$	10	-	1/3
	5	$t^2 - 3$	$32t - 2t^2 - 3t^3$	20	-	2
	6	$2t$	$2t^2 - 7t + 5$	10	-	5
22.	1	πt^2	$30\sin(\pi t/3)$	30	30	2
	2	$-\pi t$	$6t - 3t^2$	12	8	2
	3	$3\cos(2t)$	$4t + 3\sin(\pi t/3)$	7	6	1/2
	4	$8\pi - 6\pi t$	$18\sin^2(\pi t/6)$	18	9	1
	5	$2\pi t^3$	$10\sin(2\pi t/3)$	6	8	1/2
	6	$3t - 2$	$3t^3 - 4t^2 + 11t$	10	2	1
23.	1	$3t$	$8t - 5t^2$	10		1
	2	$6 - t^2$	$10t - 2t^2$	20		2
	3	$4t\sin(t)$	$20t + 8\sin(\pi t/3)$	28		1/2
	4	$2 + \cos(\pi t/6)$	$8t$	30		3
	5	$2\pi t$	$4\cos^2(2\pi t/3)$	15		1
	6	$3\pi - \pi t^2$	$10(t + \sin(\pi t/3))$	25		1/2
24.	1	$3t\cos(2t)$	$4t^2 - 6t + 10$	-	-	0,5
	2	$3\pi - \pi t$	$6t - 3t^2 + 15$	-	-	2
	3	$8\pi - 6\pi t$	$20 + 5\sin^2(\pi t/2)$	-	-	1/3
	4	$3 - t^2$	$15 - 5\cos^2(\pi t/3)$	-	-	1
	5	$3t - 2$	$3t^3 - 4t^2 + 5t + 10$	-	-	1
	6	-2π	$10 + 2\sin(2\pi t)$	-	-	1/5

Продолжение табл. 2

№ Вар.	№ Дан.	$\omega(t)$, рад/с	$S(t)$, см	R, см	a, см	t, сек
1	2	3	4	5	6	7
25.	1	$2t$	$10t^2$	30	-	1
	2	$5t^3$	$20\pi(t-0,6t^2)$	10	-	1
	3	$-3\pi t$	$16\pi\cos^2(\pi t)$	16	-	1/3
	4	$3-t^2$	$4\pi\sin^2(\pi t)$	12	-	1/3
	5	$2\cos(\pi t/2)$	$\pi+6\pi t^2$	12	-	1/2
	6	$4\sin(2t)$	$6\pi(t+2\cos(\pi t))$	6	-	1/3
26.	1		$19t+2\cos(\pi t)$	20	-	1/3
	2		$\pi t+2\pi t^2$	9	-	2
	3		$8\pi t+4\pi\sin^2(\pi t/3)$	12	-	1
	4		$20(t-2\sin(\pi t/3))$	10	-	1/2
	5		$-2\pi\sin^2(\pi t)$	8	-	1/3
	6		$\pi(10+15t-3t^2)$	24	-	1
27.	1	$2\pi t-\cos^2(\pi t/2)$	$15t-3t^2$	-	-	2
	2	$2\sin(\pi t^2)$	$10+12t-4t^2$	-	-	0,5
	3	$4t-\cos(2\pi t/3)$	$2t^3+8$	-	-	2
	4	t^2+t	$10(1+\sin^2(\pi t/3))$	-	-	1
	5	$2t$	$15t-5\cos^2(\pi t/3)$	-	-	2
	6	$2\sin^2(\pi t/2)$	$12+12t-3t^2$	-	-	1/6
28.	1	$3\pi t-\pi t^2/2$	$18(1-\cos(\pi t/3))$	-	20	2
	2	$-\pi t$	$4\pi t+3\sin(\pi t/2)$	-	10	0,5
	3	$2+6t-3t^2$	$10\sin^2(\pi t)$	-	20	1/3
	4	$3\sin(\pi t/2)$	$6t^2-8t-4$	-	10	0,5
	5	$4\cos(\pi t/2)$	$6t-4t^2-6$	-	20	0,5
	6	$3t-0,5t^3$	$9\cos^2(\pi t/3)$	-	12	2

Окончание табл. 2

№ Вар.	№ Дан.	$\omega(t)$, рад/с	$S(t)$, см	R, см	a, см	t, сек
1	2	3	4	5	6	7
29.	1	$3t$	$10\pi\sin^2(\pi t)$	15	-	1/3
	2	$3-t^2$	$90t-15t^3$	30	-	1
	3	$4-4t$	$60t+40t^2$	20	-	1/2
	4	$4t$	$10\pi(t+\sin(\pi t/3))$	15	-	1/2
	5	πt	$\pi(48t-16t^3)$	16	-	1
	6	$\pi-2t$	$40\pi\sin^2(\pi t)$	10	-	1/6
30.	1	$3t-\pi t^2$	$6\pi\sin^2(\pi t)$	9	-	1/3
	2	$-\pi t$	$\pi(3+\cos(2\pi t))$	10	-	1/3
	3	$2+6t-3t^2$	$24t-2t^2-3t^3$	16	-	2
	4	$3\sin(\pi t/3)$	$\pi(2t^2-7t+5)$	60	-	5
	5	t^2+4	$30\sin(\pi t/3)$	30	-	2
	6	$3t\cos(2\pi t)$	$6t-3t^2$	12	-	2

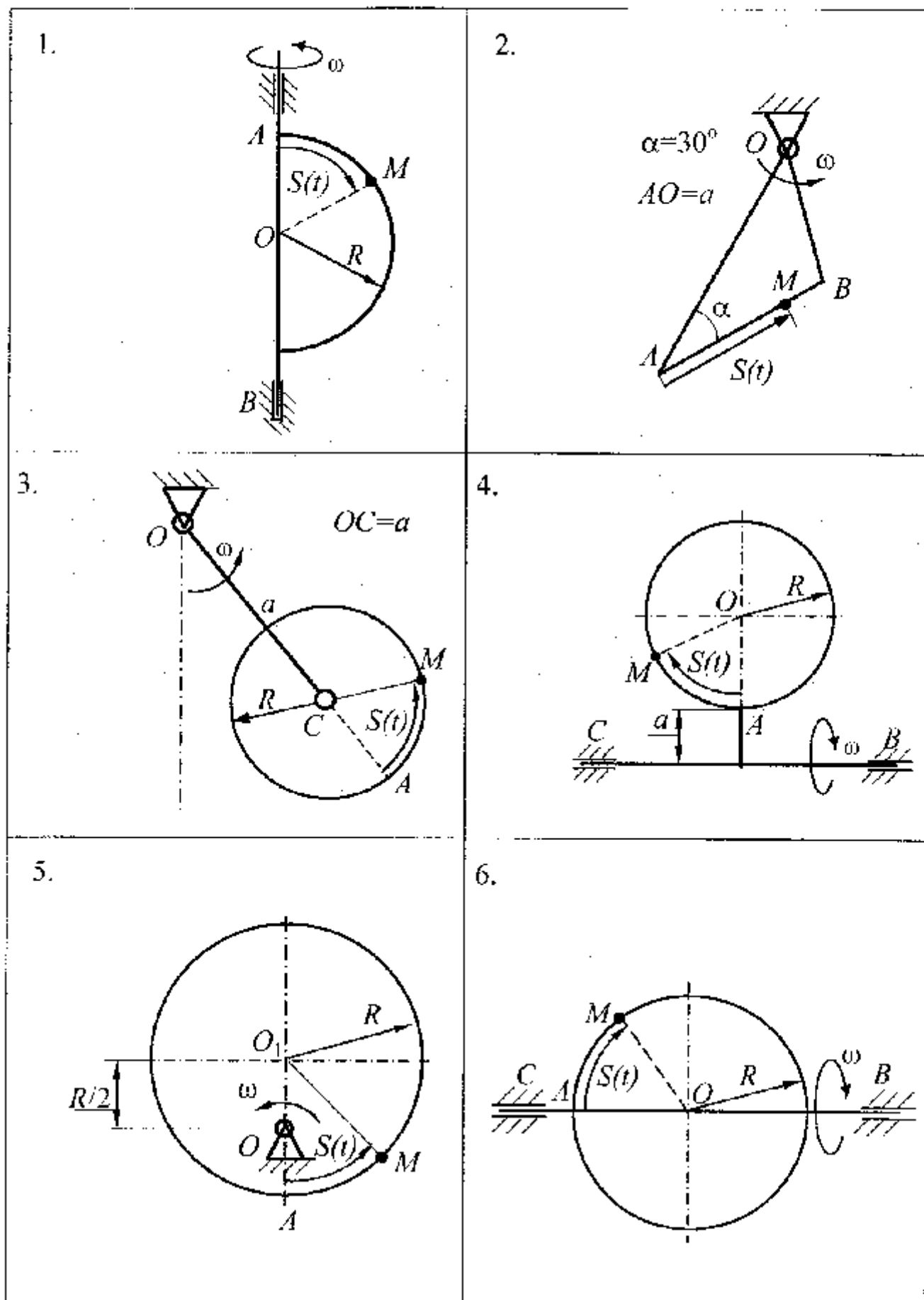
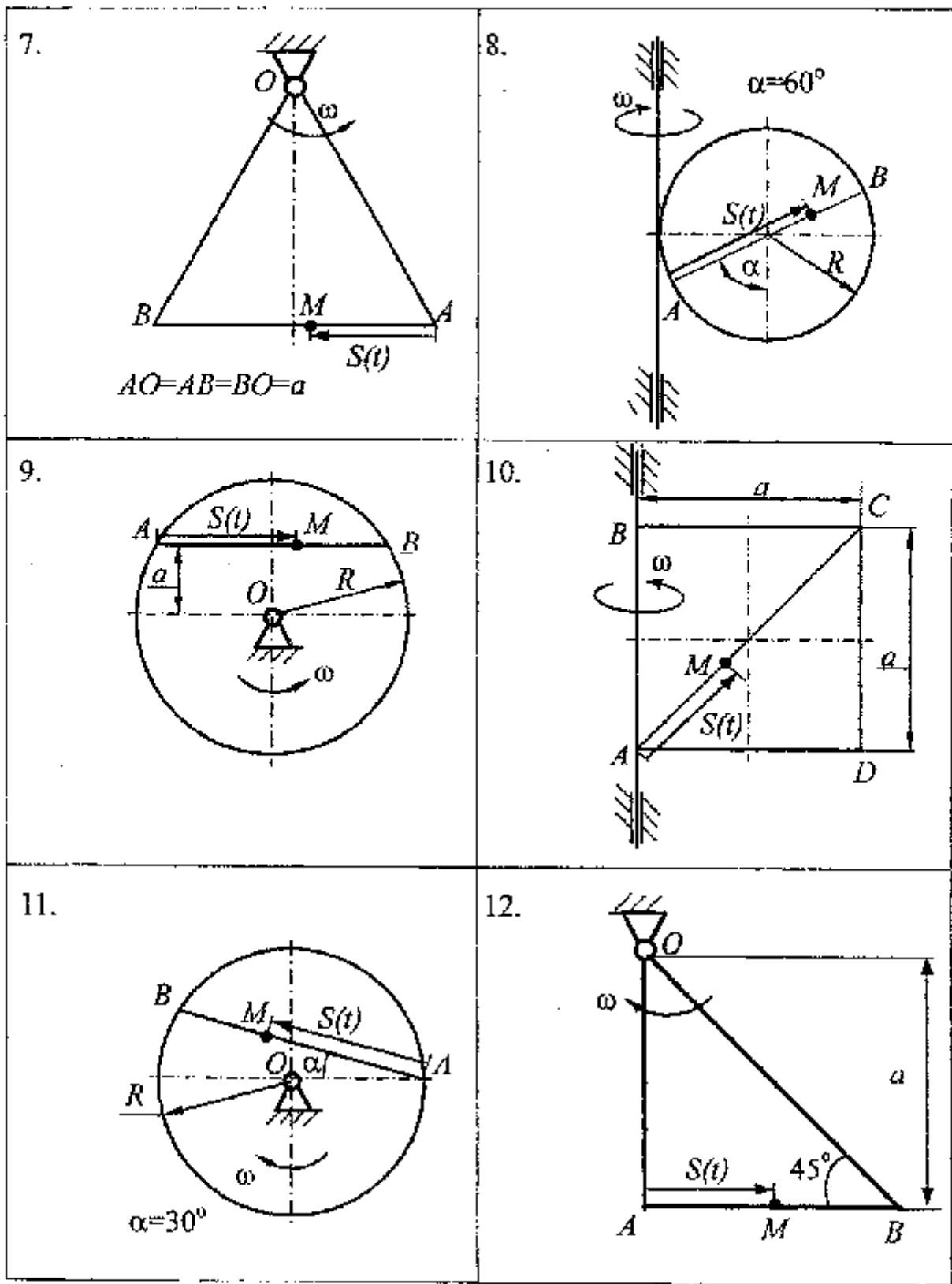
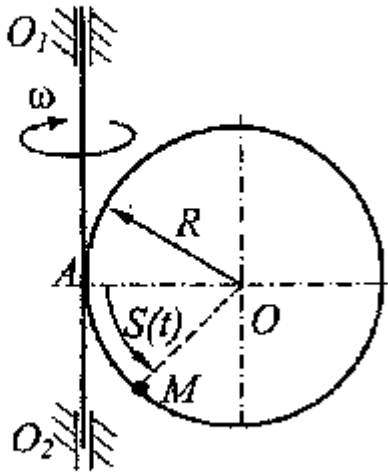


Рис. 3.1

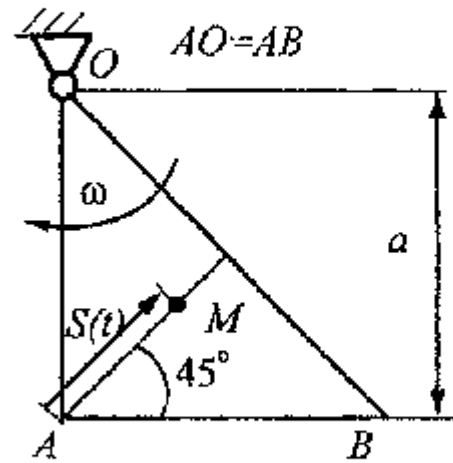


Продолжение рис. 3.1

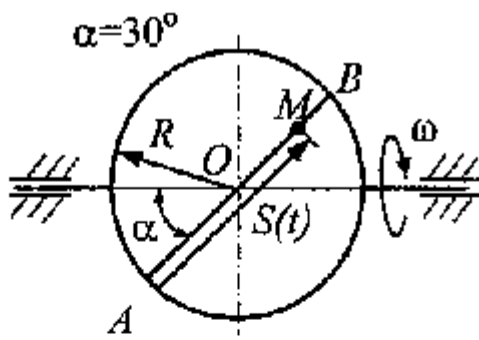
13.



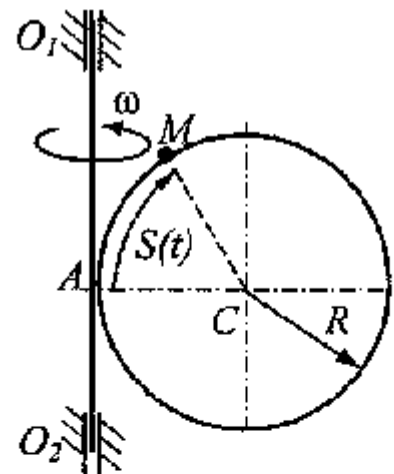
14.



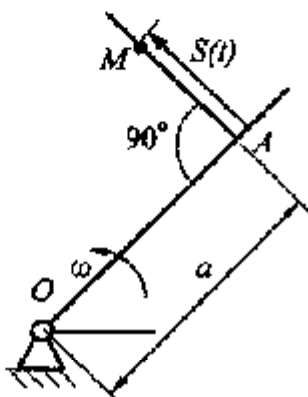
15.



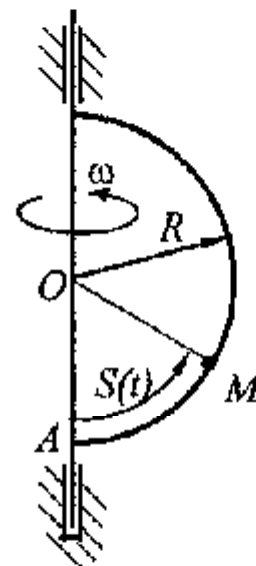
16.



17.

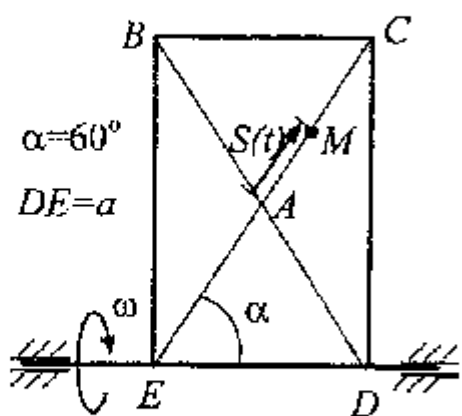


18.

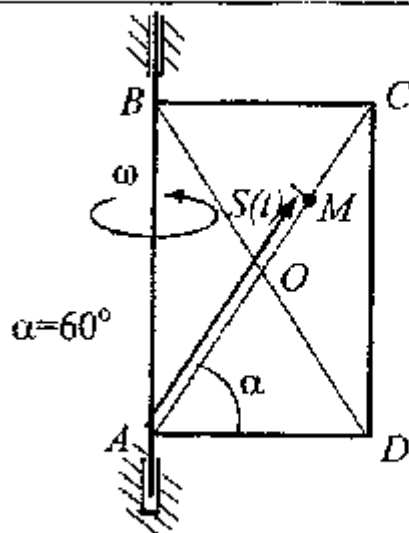


Продолжение рис. 3.1

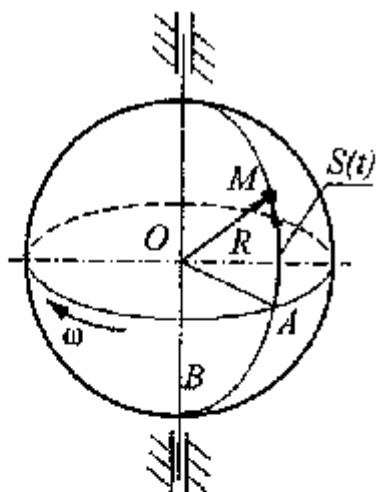
19.



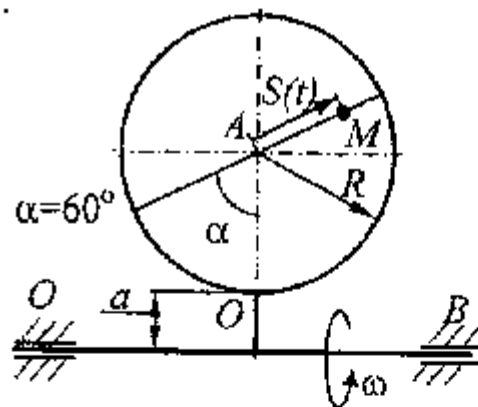
20.



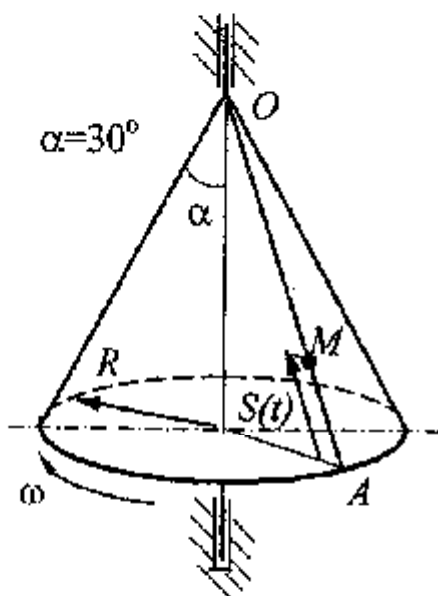
21.



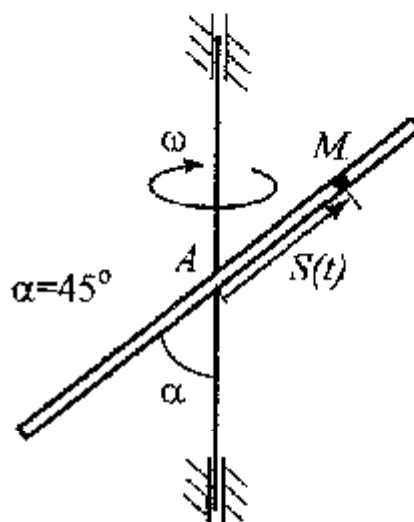
22.



23.

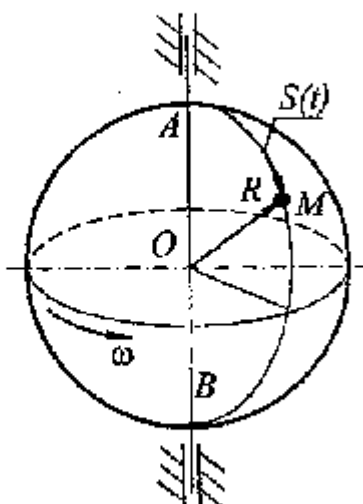


24.

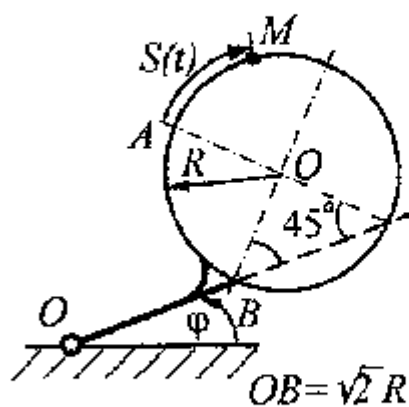


Продолжение рис. 3.1

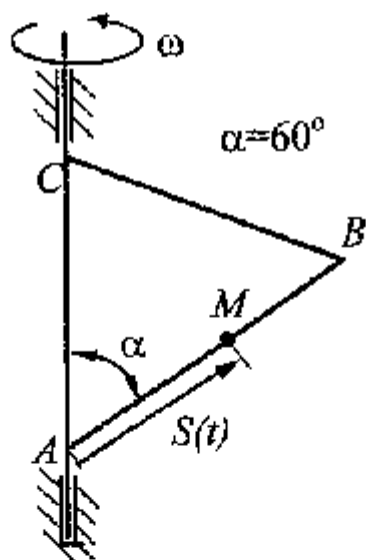
25.



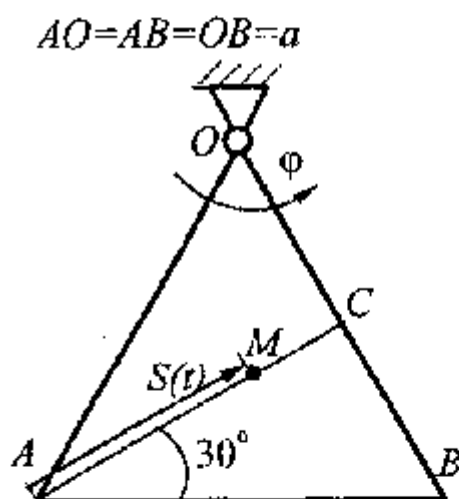
26.



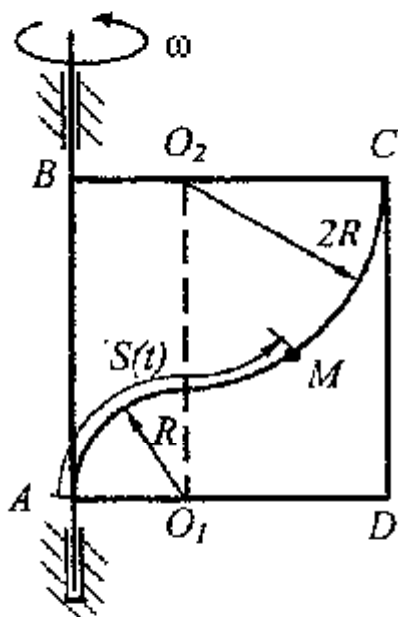
27.



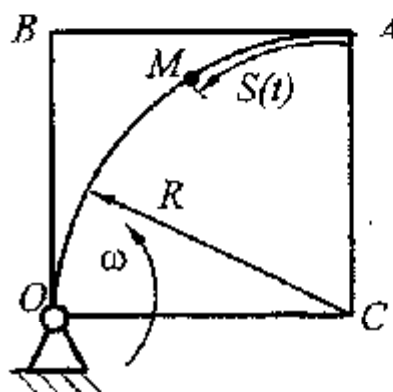
28.



29.



30.



Окончание рис.3.1

3.3. Пример выполнения контрольной работы

3.3.1. Условие примера выполнения контрольной работы К2.

Диск радиуса $R = 0,5$ м вращается вокруг касательной O_1O_2 (рис. 3.2) с угловой скоростью $\omega = 4t^2$ (рад/с). По ободу диска движется точка M согласно уравнению $OM = S(t) = \frac{\pi \cdot t^3}{3}$ (м).

Определить абсолютные скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ (с).

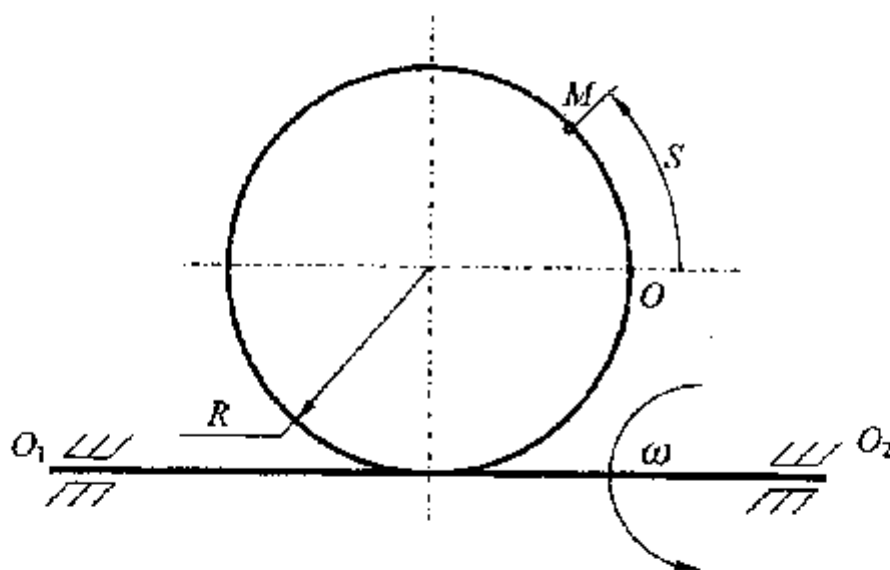


Рис. 3.2

3.3.2. Решение примера выполнения контрольной работы К2.

Выберем неподвижную и подвижную системы отсчета. Неподвижную систему отсчета S_{xyz} связываем с неподвижным телом, отмеченным на рис. 3.3 штриховкой. Подвижную систему отсчета $Dx'y'z'$ связываем с диском (переносящим телом), который вращается с переносной угловой скоростью $\omega_e = \omega = 4t^2$.

Таким образом, окружность радиуса $R = 0,5$ м — относительная траектория точки M , а уравнение $S_r = S = \frac{\pi \cdot t^3}{3}$ — уравнение относительного движения точки.

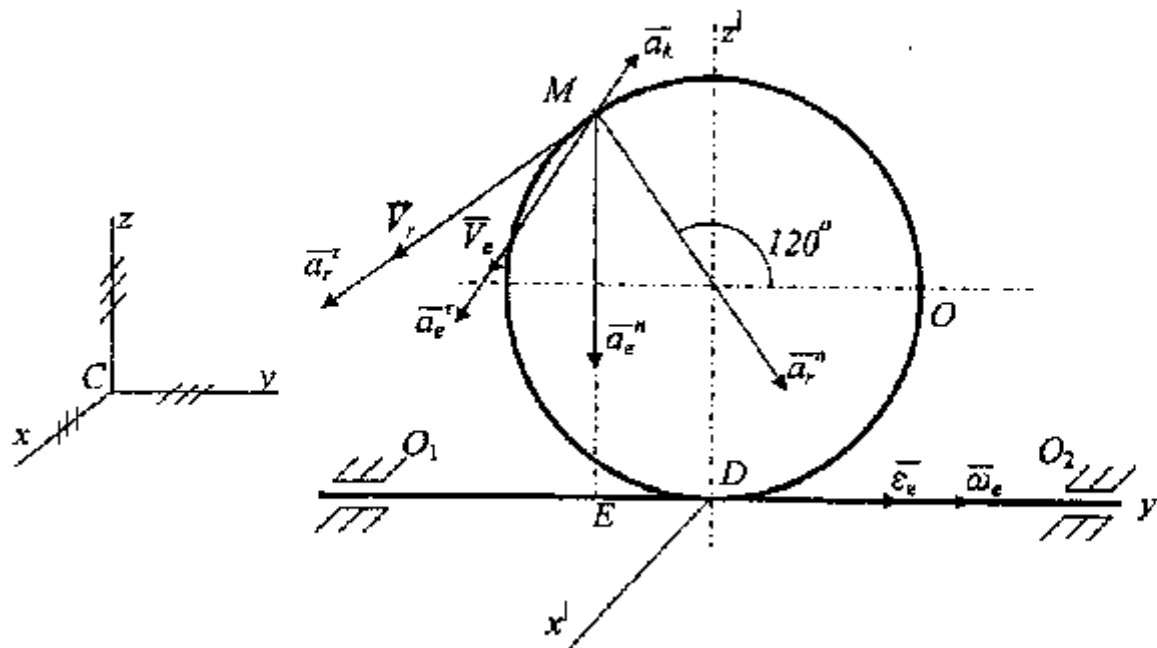


Рис. 3.3

Расчет скоростей.

Положение точки M при $t_1 = 1$ с определяется центральным углом:

$$\varphi(1) = \frac{S_r(1)}{R} = \frac{\frac{\pi}{3}}{0,5} = \frac{2}{3}\pi \text{ (рад)},$$

что соответствует 120° (см. рис. 3.3).

Относительная скорость точки M равна:

$$V_r = \dot{S}_r = \pi \cdot t.$$

При $t_1 = 1$ с

$$V_r = 3,14 \text{ м/с.}$$

Вектор \vec{V}_r направлен по касательной к относительной траектории -- окружности (см. рис. 3.3).

Переносную скорость V_e точки M определим как абсолютную скорость точки M' диска, с которой в момент времени $t_1 = 1$ с совпала движущаяся точка M . Имеем:

$$V_e = \omega_e \cdot R_e.$$

При $t_1 = 1$ с

$$\omega_e = 4 \text{ рад/с}; \quad R_e = ME = R + R \cdot \sin 60^\circ = 0,5 + 0,5 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,933 \text{ м.}$$

Окончательно:

$$V_e = 4 \cdot 0,933 \approx 3,73 \text{ м/с.}$$

Вектор \vec{V}_e направлен перпендикулярно плоскости диска в положительном направлении оси Sx (см. рис. 3.3).

По теореме о сложении скоростей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e. \quad (3.1)$$

В рассматриваемом примере векторы относительной и переносной скоростей взаимно перпендикулярны, следовательно, модуль абсолютной скорости можно определить по теореме Пифагора:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{3,14^2 + 3,73^2} \approx 4,87 \text{ м/с.}$$

Модуль абсолютной скорости V_a точки M можно также определить методом проекций. Проецируя обе части векторного равенства (3.1) на неподвижные оси координат, имеем:

$$V_{ax} = 0 + V_e = 3,73 \text{ м/с};$$

$$V_{ay} = -V_r \cdot \cos 30^\circ + 0 = -3,14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -2,72 \text{ м/с};$$

$$V_{az} = -V_r \cdot \cos 60^\circ + 0 = -3,14 \cdot 0,5 \approx -1,57 \text{ м/с.}$$

Тогда

$$V_a = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2 + V_{az}^2} = \sqrt{3,73^2 + (-2,72)^2 + (-1,57)^2} \approx 4,87 \text{ м/с.}$$

Направляющие косинусы вектора \vec{V}_a равны:

$$\cos(\vec{V}_a, x) = \frac{V_{ax}}{V_a} = 0,766; \quad \cos(\vec{V}_a, y) = \frac{V_{ay}}{V_a} = -0,558;$$

$$\cos(\vec{V}_a, z) = \frac{V_{az}}{V_a} = -0,322.$$

Расчет ускорений.

Запишем векторное равенство, выражающее теорему о сложении ускорений при вращательном переносном движении

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_k \quad (3.2)$$

Где \bar{a}_e^n и \bar{a}_e^τ - нормальная и касательная составляющие переносного ускорения точки;

\bar{a}_r^n и \bar{a}_r^τ - нормальная и касательная составляющие относительного ускорения точки;

\bar{a}_k - ускорение Кориолиса.

Переносное вращение происходит с угловым ускорением:

$$\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 8t.$$

При $t_1 = 1$ с

$$\varepsilon_e = 8 \text{ рад/с}^2.$$

Векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{\varepsilon}_e$ направлены в одну сторону вдоль оси вращения O_1O_2 (см. рис. 3.3).

Переносное нормальное ускорение a_e^n точки M равно абсолютному нормальному ускорению точки M диска:

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot ME = 4^2 \cdot 0,933 \approx 14,9 \text{ м/с}^2.$$

Вектор \bar{a}_e^n направлен вдоль прямолинейного отрезка ME к оси вращения диска (см. рис. 3.3).

Переносное касательное ускорение a_e^τ точки M равно абсолютному касательному ускорению точки M диска:

$$a_e^\tau = |\varepsilon_e| \cdot ME = 8 \cdot 0,933 \approx 7,46 \text{ м/с}^2.$$

Направление вектора a_e^τ совпадает с направлением вектора \bar{V}_e , так как векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{\varepsilon}_e$ направлены в одну сторону (см. рис. 3.3).

Относительное нормальное ускорение a_r^n точки M определяем по формуле:

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{3,14^2}{0,5} \approx 19,7 \text{ м/с}^2.$$

Относительное касательное ускорение a_r^r точки M равно производной по времени от относительной скорости V_r :

$$a_r^r = \dot{V}_r = 2\pi \cdot t.$$

При $t_1 = 1$ с

$$a_r^r = 6,28 \text{ м/с}^2.$$

Направление вектора \vec{a}_r^r совпадает с направлением вектора \vec{V}_r (см. рис. 3.3).

Вектор \vec{a}_r^n направлен вдоль радиуса к центру диска (см. рис. 3.3).

Модуль ускорения Кориолиса точки M находим по формуле:

$$a_k = 2|\omega_e| \cdot |V_r| \cdot \sin 150^\circ = 2 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \approx 12,6 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение Кориолиса, определяемое векторным произведением:

$$\vec{a}_k = 2 \cdot \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r,$$

направлено перпендикулярно плоскости диска в отрицательном направлении оси Sx (см. рис. 3.3).

Проецируя обе части векторного равенства (3.2) на оси координат, находим:

$$a_{ax} = 0 + a_e^r + 0 + 0 - a_k = 7,46 - 12,6 = -5,14 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{ay} = 0 + 0 + a_r^n \cos 60^\circ - a_r^r \cos 30^\circ + 0 = \\ = 19,7 \cdot 0,5 - 6,28 \cdot 0,866 \approx 4,41 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{az} = -a_e^n + 0 - a_r^n \cos 30^\circ - a_r^r \cos 60^\circ + 0 = \\ = -14,9 - 19,7 \cdot 0,866 - 6,28 \cdot 0,5 = -35,1 \text{ м/с}^2.$$

Модуль ускорения точки M равен:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{(-5,14)^2 + 4,41^2 + (-35,1)^2} \approx 35,7 \text{ м/с}^2.$$

Направляющие косинусы вектора \vec{a}_a равны:

$$\cos(\vec{a}_a, x) = \frac{a_{ax}}{a_a} = -0,144; \quad \cos(\vec{a}_a, y) = \frac{a_{ay}}{a_a} = 0,124;$$

$$\cos(\vec{a}_a, z) = \frac{a_{az}}{a_a} = -0,983.$$

4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА КЗ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Содержание контрольной работы

4.1.1. Построить положение механизма (вариант схемы выбрать из рис. 4.1) по заданным размерам и углам, приведенным в табл. 3.

Примечание. Звенья в виде треугольников в вариантах 2, 3, 8, 9, 13 – 16, 19, 25, 27, считать равносторонними.

4.1.2. По заданной угловой скорости ведущего звена, для заданного положения механизма определить линейные скорости всех изображенных точек и угловые скорости его звеньев.

4.1.3. По найденным в п.п. 4.1.2 величинам угловых скоростей звеньев и заданной величине углового ускорения ведущего звена, определить линейные ускорения точек, изображенных на схеме, и угловые ускорения звеньев механизма.

Таблица 3

Варианты числовых значений параметров контрольной работы КЗ

№ Вар	№ Дан	ω , рад/с	ϵ , рад/с ²	φ , град	α , град	АО, см	АВ, см	ВС, см	CD, см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	1	3	1	30	120	10	80	40	50
	2	5	4	45	30	5	40	20	50
	3	10	5	60	150	20	120	60	60
	4	20	6	75	60	30	100	50	60
	5	5	-2	90	120	25	75	25	50
	6	2	-5	120	90	15	40	10	30

Продолжение табл. 3

№ Вар	№ Дан	ω , рад/с	ε , рад/с ²	φ , град	α , град	АО, см	АВ, см	ВС, см	CD, см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2.	1	3	1	30	120	10	80	-	50
	2	5	-4	45	150	5	40	-	40
	3	10	5	60	75	20	120	-	60
	4	20	6	90	60	30	100	-	70
	5	5	-2	60	120	25	75	-	50
	6	2	-5	120	30	15	40	-	40
3.	1	3	1	30	120	10	80	-	50
	2	5	-4	45	30	5	40	-	40
	3	10	-5	60	45	20	120	-	60
	4	20	6	75	60	30	100	-	100
	5	5	-2	30	90	25	75	-	50
	6	2	-5	120	90	15	40	-	20
4.	1	1	-3	150	120	100	30	100	50
	2	5	-4	45	150	50	40	50	60
	3	10	5	60	75	80	50	80	70
	4	20	6	120	120	60	25	60	50
	5	5	2	60	150	70	70	70	100
	6	2	-5	30	120	90	40	90	80
5.	1	3	-1	30	-	30	20	30	40
	2	5	4	45	-	50	10	50	20
	3	10	-5	60	-	40	20	40	40
	4	20	6	75	-	15	10	15	30
	5	5	-2	90	-	60	30	60	50
	6	2	-5	120	-	20	15	20	40
6.	1	1	-3	30	120	30	15	50	100
	2	3	2	45	30	50	15	100	50
	3	10	5	60	150	40	18	80	80
	4	4	-6	75	60	15	12	25	60
	5	5	2	90	120	25	30	70	70
	6	2	5	120	90	20	20	30	70

Продолжение табл. 3

№ Вар	№ Дан	ω , рад/с	ε , рад/с ²	φ , град	α , град	АО, см	АВ, см	ВС, см	CD, см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7.	1	3	-8	30	120	20	120	60	60
	2	5	4	45	30	10	80	40	50
	3	10	-5	60	45	5	40	20	50
	4	7	10	75	60	15	40	10	30
	5	5	6	30	90	30	100	50	60
	6	2	-5	120	90	25	75	25	50
8.	1	3	-10	90	90	10	30	-	50
	2	2	4	30	120	15	40	-	40
	3	5	-15	45	30	20	90	-	60
	4	4	6	60	45	30	100	-	70
	5	5	8	75	60	25	50	-	75
	6	2	7	30	90	15	40	-	30
9.	1	3	-5	150	90	50	20	20	30
	2	3	5	60	30	100	30	30	15
	3	5	10	120	45	80	15	15	20
	4	4	-6	90	60	25	8	8	25
	5	2	-8	120	75	70	25	25	10
	6	6	15	90	60	30	10	10	5
10.	1	3	8	45	120	20	120	-	40
	2	5	-4	60	135	10	80	-	30
	3	1	-5	75	150	5	40	-	20
	4	4	10	30	90	15	40	-	15
	5	5	-10	30	120	30	100	-	30
	6	2	-5	60	150	25	75	-	50
11.	1	3	-5	60	120	10	20	40	40
	2	3	5	45	135	5	30	30	30
	3	5	10	60	150	15	15	20	20
	4	4	-6	75	90	20	25	15	15
	5	2	-8	30	120	25	30	30	30
	6	6	15	30	150	10	25	50	50

Продолжение табл. 3

№ Вар	№ Дан	ω , рад/с	ε , рад/с ²	ϕ , град	α , град	АО, см	АВ, см	ВС, см	CD, см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12.	1	10	-15	30	120	30	15	50	100
	2	3	8	45	30	50	15	100	50
	3	1	-5	60	150	40	18	80	80
	4	4	6	75	60	15	12	25	60
	5	3	-10	90	120	25	30	70	70
	6	2	10	120	90	20	20	30	70
13.	1	2	-5	45	15	60	25	25	-
	2	3	5	60	30	50	20	20	-
	3	1	3	75	90	100	30	30	-
	4	4	-6	30	30	80	40	40	-
	5	2	8	90	45	25	25	25	-
	6	6	15	120	60	70	50	50	-
14.	1	5	-10	60	90	10	10	30	50
	2	2	5	30	120	5	5	10	40
	3	5	15	45	60	20	20	90	60
	4	3	6	60	45	30	30	100	70
	5	5	-8	75	150	25	25	50	75
	6	2	7	30	90	15	15	40	30
15.	1	2	-10	120	60	70	40	40	-
	2	3	5	45	15	50	25	25	-
	3	1	-3	60	30	100	30	30	-
	4	4	8	75	90	80	50	50	-
	5	2	10	30	30	25	30	30	-
	6	3	-5	90	45	70	50	50	-
16.	1	4	-5	60	150	8	10	10	-
	2	3	5	45	135	10	5	5	-
	3	6	-10	30	120	5	20	20	-
	4	4	-6	90	90	20	15	15	-
	5	2	10	30	90	15	25	25	-
	6	6	15	60	120	25	25	25	-

Продолжение табл. 3

№ Вар	№ Дан	ω , рад/с	ε , рад/с ²	φ , град	α , град	АО, см	АВ, см	ВС, см	CD, см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
17.	1	4	10	55	90	10	20	10	20
	2	3	-5	45	60	12	30	20	10
	3	2	-3	30	150	5	15	15	10
	4	10	20	60	135	20	35	20	40
	5	2	10	30	120	15	30	15	30
	6	5	-10	60	90	10	30	25	25
18.	1	2	-5	90	120	20	60	20	40
	2	3	5	45	135	10	30	10	20
	3	1	3	60	150	5	12	5	10
	4	4	-6	150	90	15	50	15	30
	5	2	8	90	120	10	30	10	20
	6	6	15	120	90	8	24	8	16
19.	1	2	4	60	60	5	8	8	10
	2	3	5	55	120	6	12	12	20
	3	1	3	45	135	10	20	20	30
	4	4	-8	30	150	12	10	10	15
	5	2	10	60	90	8	5	5	10
	6	3	-5	30	180	10	15	15	12
20.	1	2	-10	45	90	10	10	20	20
	2	3	5	30	60	5	5	10	10
	3	1	-3	60	30	15	15	30	30
	4	4	8	30	45	20	20	40	40
	5	2	10	60	60	25	25	50	50
	6	3	-5	55	90	10	10	20	20
21.	1	2	5	60	120	5	12	15	15
	2	3	-5	90	150	6	20	20	20
	3	1	-3	120	30	10	30	30	30
	4	4	6	45	135	12	25	25	25
	5	2	8	60	135	8	20	20	20
	6	6	15	30	90	10	10	10	10

Продолжение табл. 3

№ Вар	№ Дан	ω , рад/с	ε , рад/с ²	φ , град	α , град	АО, см	АВ, см	ВС, см	CD, см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
22.	1	4	-6	45	90	15	15	10	10
	2	2	8	60	60	20	20	10	10
	3	6	15	30	90	25	25	15	15
	4	2	-4	60	120	10	10	5	5
	5	3	5	30	150	5	5	3	3
	6	1	3	60	30	6	6	3	3
23.	1	2	4	120	60	40	40	10	10
	2	3	5	60	45	30	30	5	5
	3	1	3	150	60	20	20	15	15
	4	4	-8	90	75	15	15	20	20
	5	2	10	120	30	30	30	25	25
	6	3	-5	150	30	50	50	10	10
24.	1	2	-10	150	30	20	25	40	-
	2	3	5	45	135	15	20	30	-
	3	1	3	60	120	30	20	50	-
	4	4	-8	120	60	50	80	100	-
	5	2	10	90	120	40	40	60	-
	6	3	5	30	150	25	10	50	-
25.	1	3	-5	45	135	5	5	5	10
	2	1	3	60	120	3	3	3	5
	3	2	4	120	60	4	4	4	6
	4	3	5	150	45	2	2	2	3
	5	1	-3	90	30	10	10	10	15
	6	4	8	60	90	8	8	8	12
26.	1	4	-8	30	60	20	20	30	30
	2	2	10	60	30	9	9	15	15
	3	3	5	45	0	15	15	25	25
	4	3	-5	30	15	10	10	15	15
	5	1	3	60	75	5	5	7	7
	6	2	4	45	90	25	25	40	40

Окончание табл. 3

№ Вар	№ Дан	ω , рад/с	ε , рад/с ²	φ , град	α , град	АО, см	АВ, см	ВС, см	CD, см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
27.	1	3	5	45	135	5	5	5	10
	2	1	-3	60	120	8	8	8	15
	3	2	4	120	60	4	4	4	6
	4	5	5	150	45	12	12	12	20
	5	1	3	90	30	10	10	10	15
	6	4	-8	60	90	8	8	8	12
28.	1	1	3	30	-	15	15	10	20
	2	2	-4	60	-	10	10	15	10
	3	3	5	15	-	5	5	5	8
	4	1	-3	30	-	25	25	10	30
	5	2	4	60	-	5	5	4	10
	6	5	-5	45	-	8	8	5	12
29.	1	8	15	60	-	10	10	15	20
	2	4	8	15	-	15	15	25	10
	3	12	20	30	-	40	40	50	15
	4	10	-15	60	-	30	30	40	30
	5	8	10	45	-	12	10	15	10
	6	15	20	75	-	16	15	20	12
30.	1	2	5	45	150	20	30	30	20
	2	5	15	60	135	5	10	10	5
	3	8	-8	15	120	15	20	20	15
	4	4	20	30	90	10	30	30	10
	5	12	-15	60	120	15	30	30	15
	6	10	10	25	150	30	50	50	30

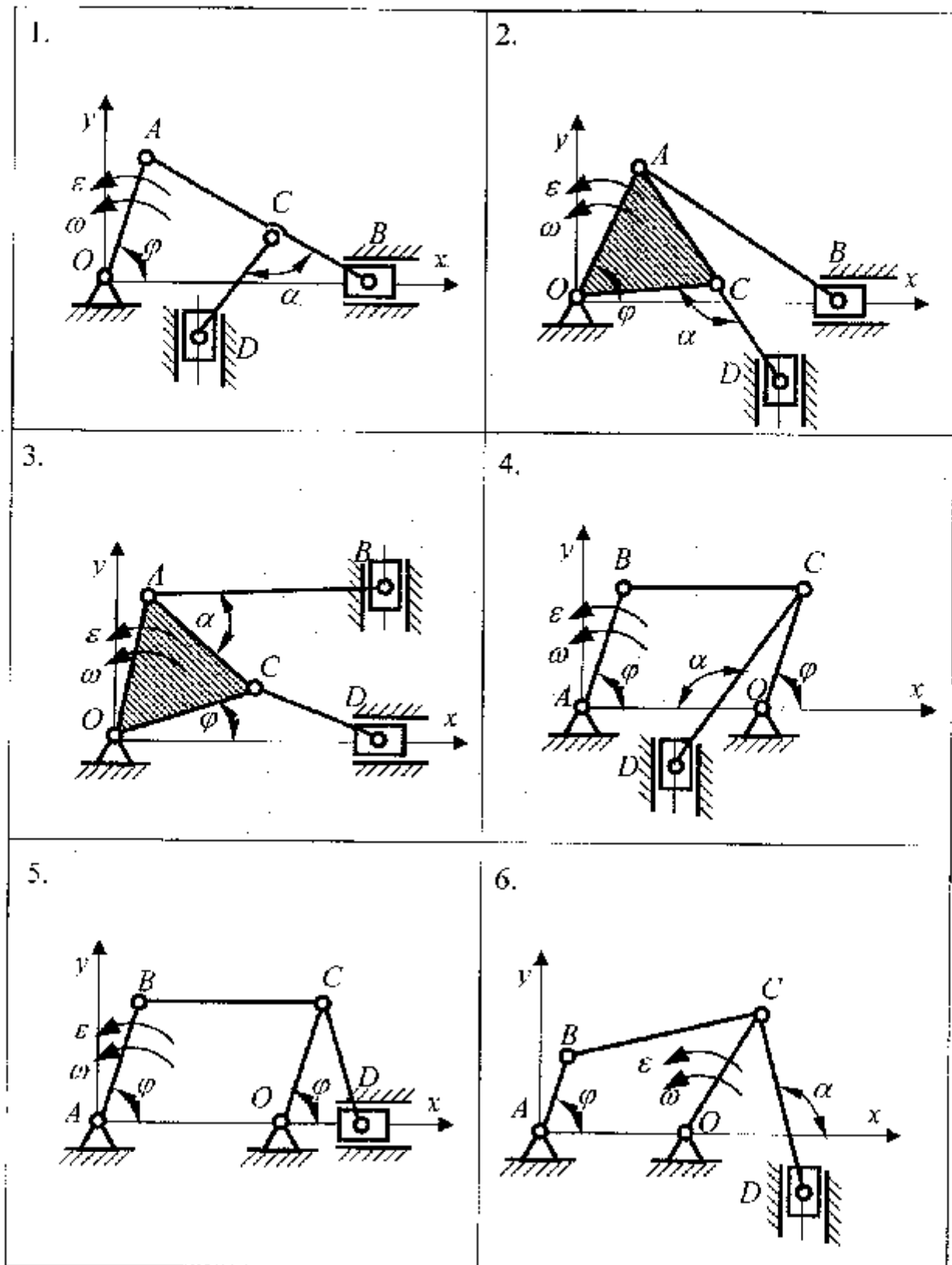
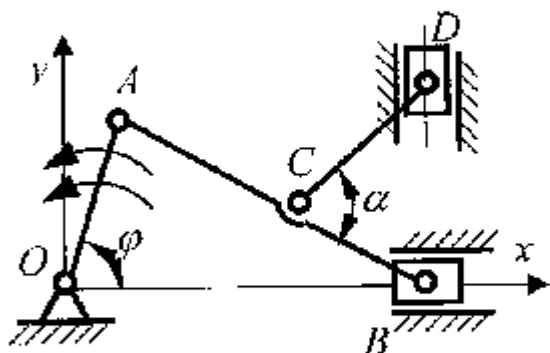
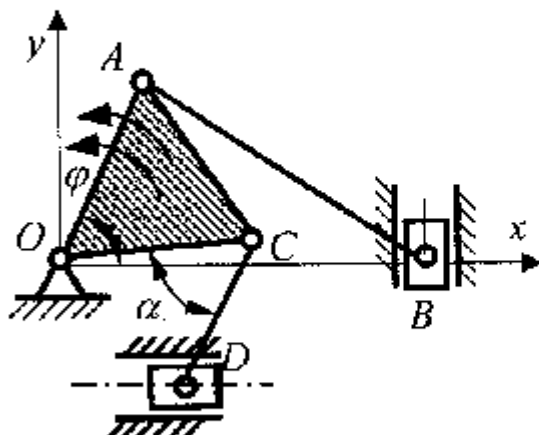


Рис. 4.1

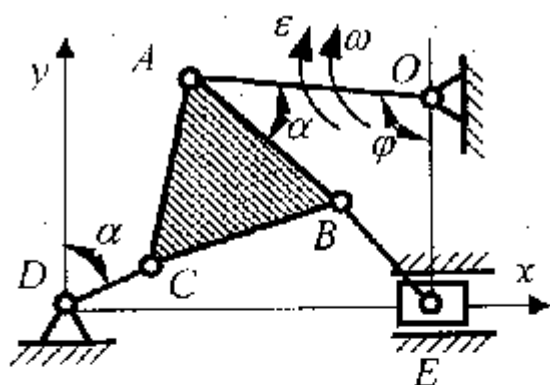
7.



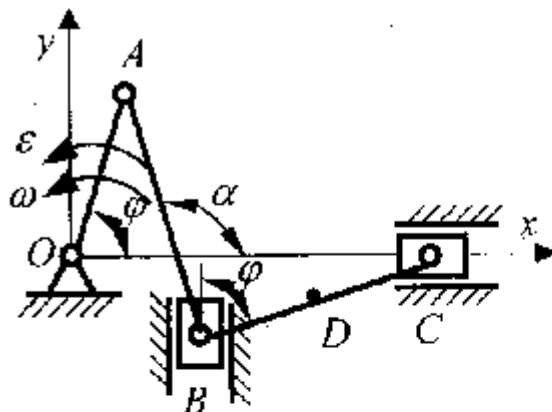
8.



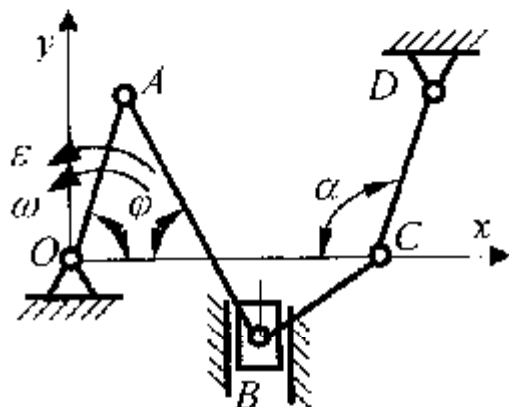
9.



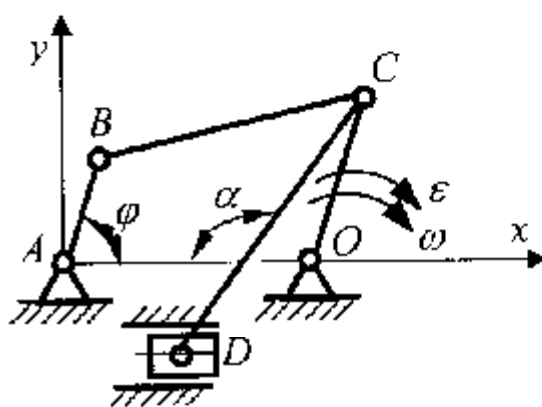
10.



11.

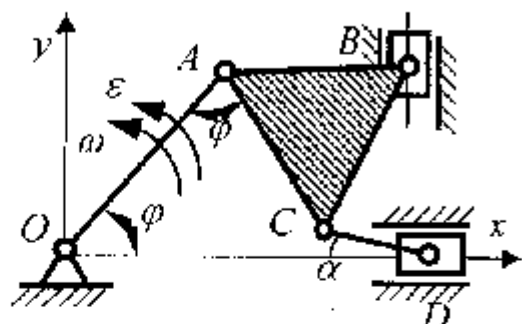


12.

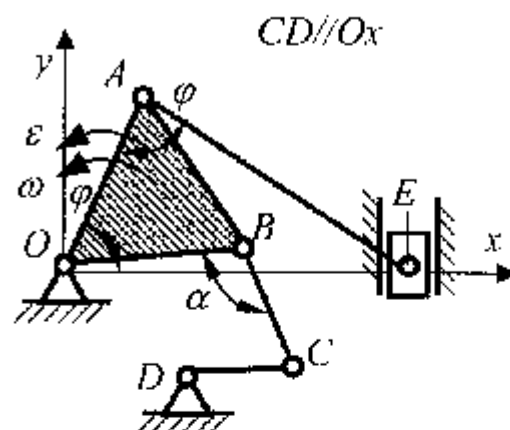


Продолжение рис 4.1

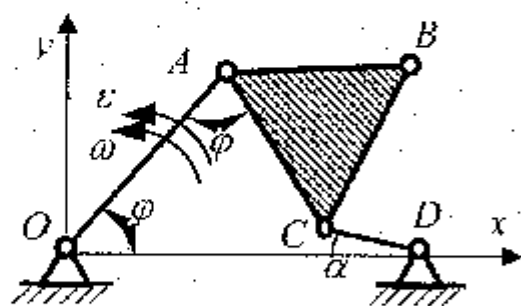
13.



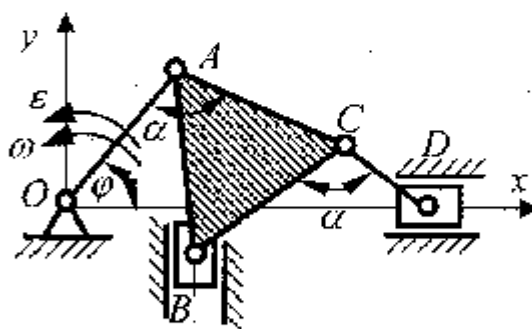
14.



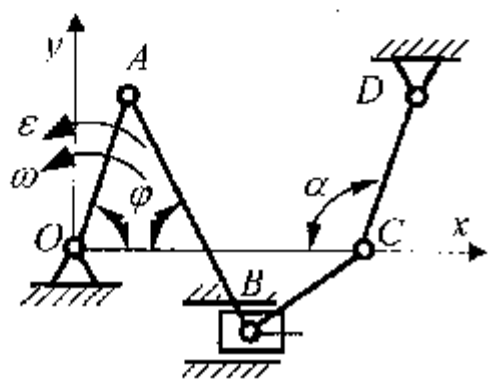
15.



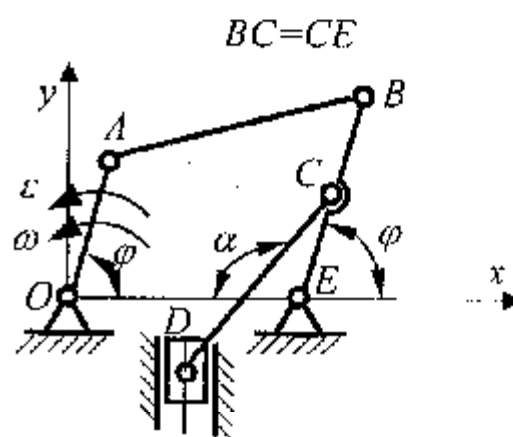
16.



17.

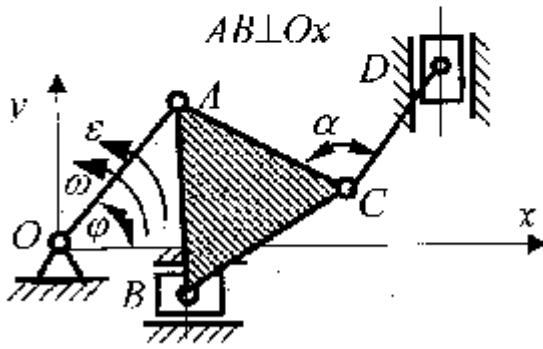


18.

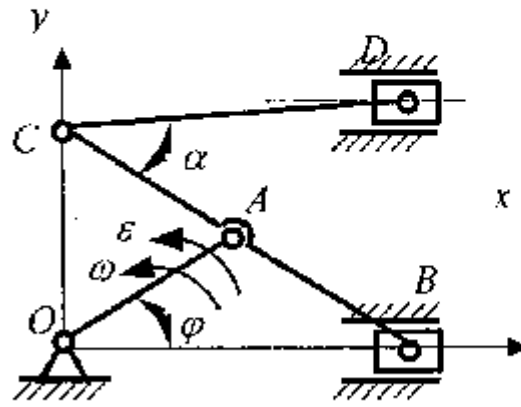


Продолжение рис 4.1

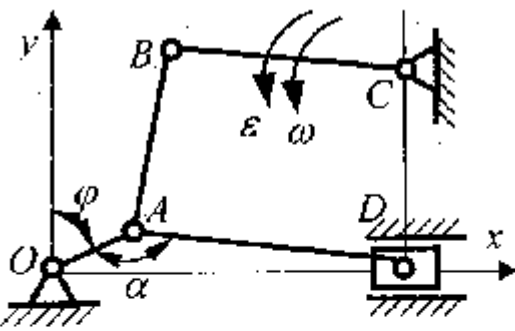
19.



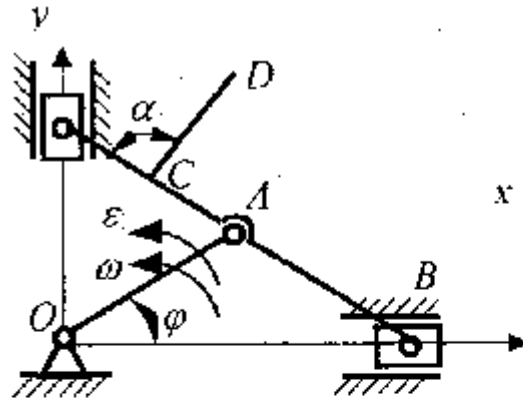
20.



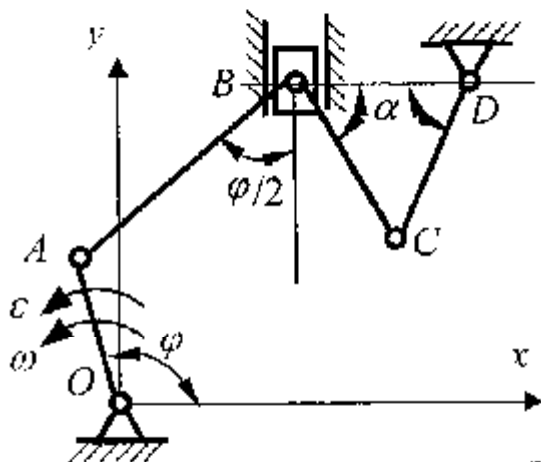
21.



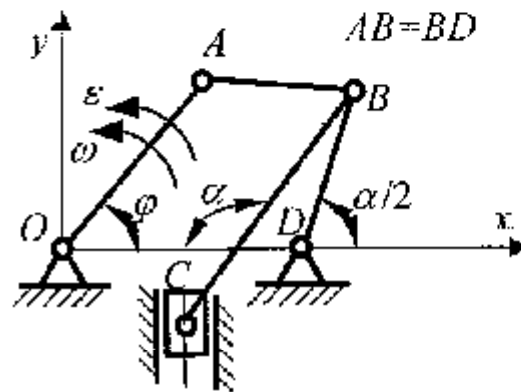
22.



23.

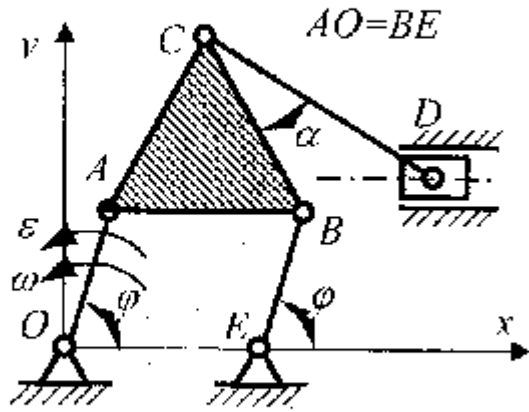


24.

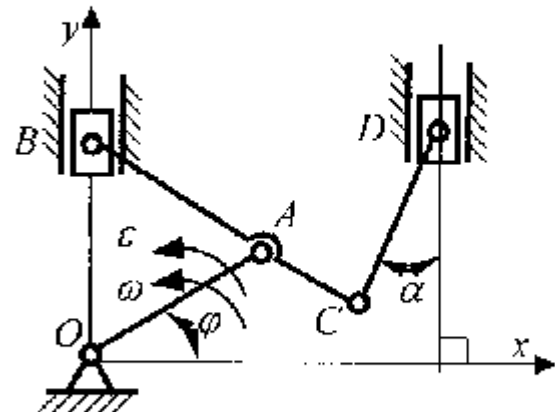


Продолжение рис 4.1

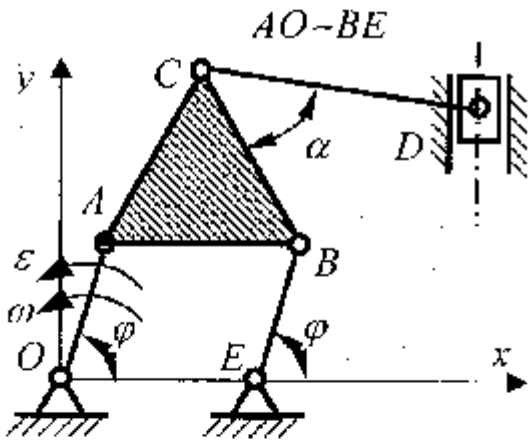
25.



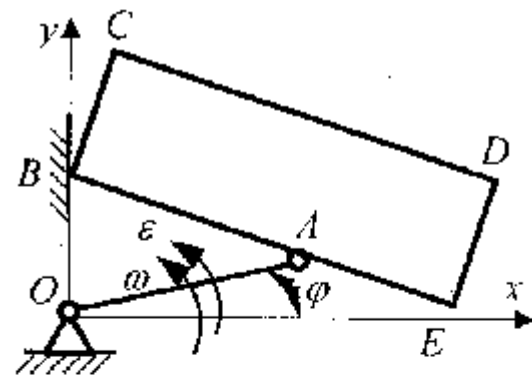
26.



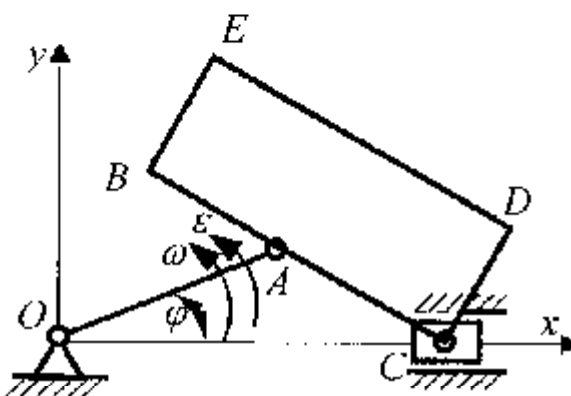
27.



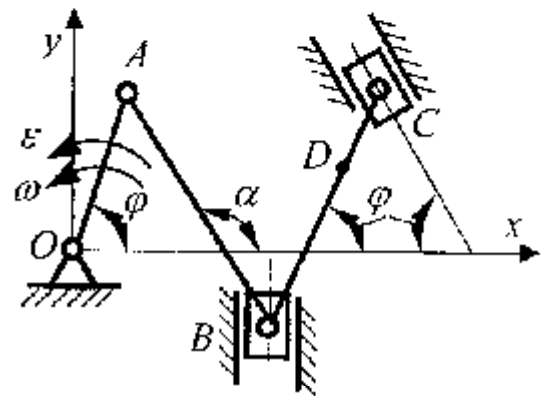
28.



29.



30.



Окончание рис 4.1

4.2. Краткие методические указания к выполнению

4.2.1. Прежде, чем приступить к выполнению задания, необходимо проработать соответствующие разделы лекций и рекомендуемой литературы [1] -- [4].

4.2.2. Для звеньев механизма совершающих вращательное движение скорость точки A определяется по формуле

$$V_A = \omega R, \quad (4.1)$$

где ω - угловая скорость звена;

R - расстояние от данной точки A до оси вращения. $R=OA$.

При этом вектор скорости перпендикулярен данному звену и направлен в соответствии с направлением угловой скорости (рис. 4.2).

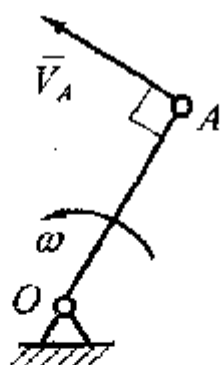


Рис. 4.2

4.2.3. Ускорение точки A вращающегося звена состоит из нормальной и касательной (тангенциальной) составляющих (рис. 4.3)

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^r. \quad (4.2)$$

Здесь модули нормальной и тангенциальной составляющих ускорения вычисляются по формулам

$$a_A^n = \omega^2 R; \quad (4.3)$$

$$a_A^r = \varepsilon R. \quad (4.4)$$

Вектор \vec{a}_A^n нормального ускорения направлен от данной точки A к оси вращения. Вектор \vec{a}_A^r касательного ускорения перпендикулярен вектору нормального ускорения и направлен в соответствии с направлением углового ускорения данного звена.

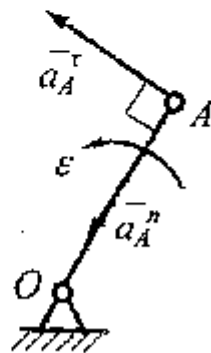


Рис. 4.3

4.2.4. Для звеньев механизма совершающих плоскопараллельное движение, скорости соответствующих точек рекомендуется определять используя понятие о мгновенном центре скоростей.

В общем случае мгновенный центр C_V скоростей плоского тела находится в точке пересечения перпендикуляров к скоростям в двух точках (рис. 4.4).

Мгновенная угловая скорость звена AB равна

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AC_V}$$

При этом скорость точки B звена AB определяется по формуле

$$V_B = \omega_{AB} BC_V$$

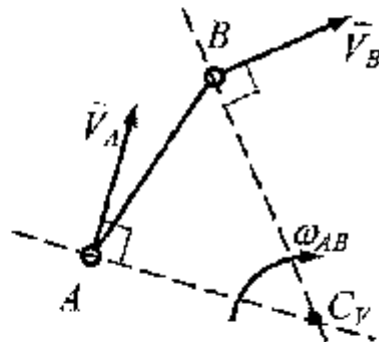


Рис. 4.4

4.2.5. Движение звена механизма, совершающего плоскопараллельное движение, можно рассматривать состоящим из поступательного движения вместе с произвольно выбранной точкой (полюсом A) и вращательного движения вокруг этого полюса. Тогда ускорение произвольной точки B звена можно определить по формуле (рис. 4.5)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^r,$$

где \vec{a}_A - ускорение полюса A ;

\vec{a}_{BA}^n , \vec{a}_{BA}^r -- нормальная и касательная составляющие ускорения точки B при относительном вращении звена AB вокруг полюса A .

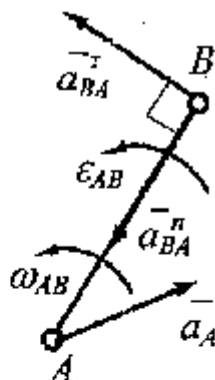


Рис. 4.5

4.3. Пример выполнения контрольной работы

4.3.1. Условие примера выполнения контрольной работы КЗ.

Найти скорости и ускорения ползуна B , точек A и M шатуна AB нецентрального кривошипно-ползунного механизма, когда кривошип OA образует с горизонтальной осью угол 30° (рис.4.6). В рассматриваемый момент времени вращение кривошипа происходит с угловой скоростью $\omega_{OA}=1,5$ рад/с и угловым ускорением $\epsilon_{OA}=2$ рад/с², а $OA=0,4$ м, $AB=0,8$ м, $AM=0,2$ м, $OC=0,2$ м.

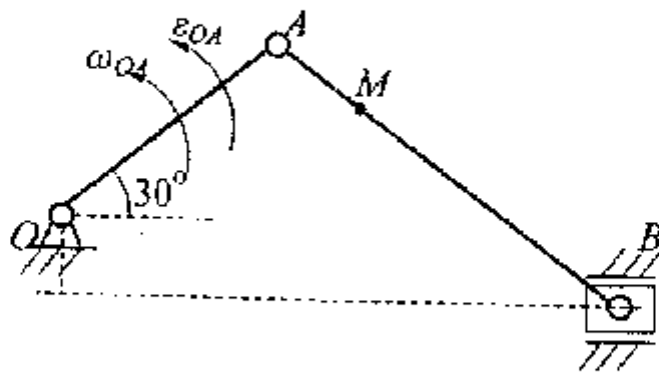


Рис. 4.6

4.3.2. Решение примера выполнения контрольной работы КЗ.

Расчет скоростей.

Точка A механизма принадлежит кривошипу OA и шатуну AB . Кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} , поэтому скорость точки A равна:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1,5 \cdot 0,4 = 0,6 \text{ м/с.}$$

Вектор V_A скорости точки A направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения.

Точка B механизма является общей для шатуна AB и ползуна B . Поскольку ползун B движется в горизонтальных направляющих, то его скорость V_B направлена вдоль оси Bx . Строим перпендикуляры к скоростям в точках A и B шатуна: их точка пересечения совпадает с мгновенным центром скоростей C_V шатуна AB . Векторы скоростей точек изображены на рис. 4.7.

Для продолжения расчета скоростей необходимо вычислить длины прямолинейных отрезков AC_V , BC_V и MC_V .

Из прямоугольного треугольника OAE имеем:

$$AE = OA \cdot \sin 30^\circ = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \text{ м.}$$

Из рис. 4.6 видно что:

$$AD = AE + DE = 0,2 + 0,2 = 0,4 \text{ м.}$$

Треугольник ABD – прямоугольный, поэтому:

$$\sin \alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{0,4}{0,8} = 0,5,$$

то есть угол $\alpha = 30^\circ$.

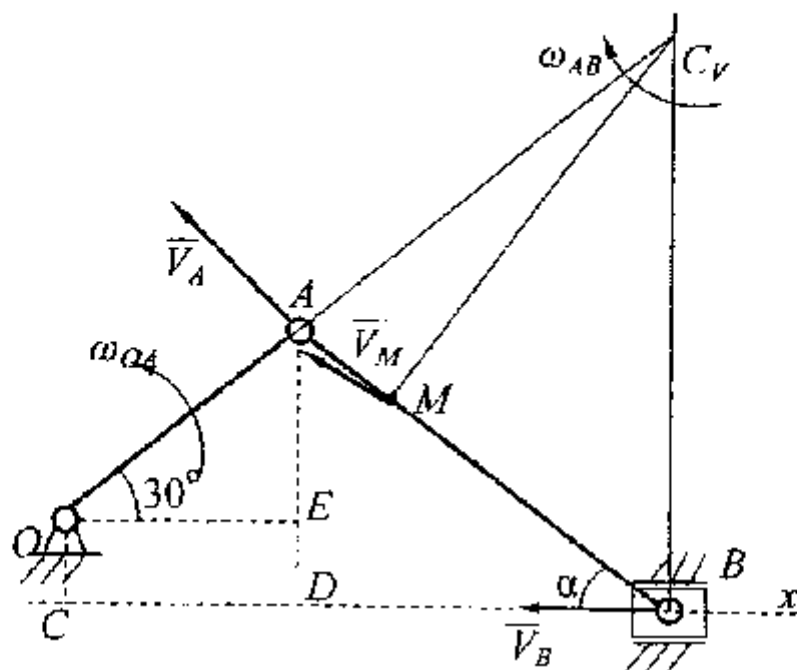


Рис. 4.7

Из построений, приведенных на рис. 4.7, видно также, что:
 $\angle ABC_v = \angle BAC_v = 60^\circ$, поэтому треугольник ABC_v – равносторонний, следовательно,

$$AC_v = BC_v = AB = 0,8 \text{ м.}$$

Мгновенную угловую скорость ω_{AB} вращения шатуна AB вычисляем по формуле:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AC_v} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75 \text{ рад/с.}$$

Модуль скорости ползуна B равен

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BC_v = 0,75 \cdot 0,8 = 0,6 \text{ м/с.}$$

Вектор \vec{V}_B скорости ползуна B направлен в отрицательную сторону оси Bx .

Из треугольника AMC_v по теореме косинусов имеем:

$$\begin{aligned} MC_v &= \sqrt{AC^2 + AM^2 - 2AC \cdot AM \cos 60^\circ} = \\ &= \sqrt{0,8^2 + 0,2^2 - 2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,5} \approx 0,721 \text{ м.} \end{aligned}$$

Скорость V_M точки M находим по формуле:

$$V_M = \omega_{AB} \cdot MC_v = 0,75 \cdot 0,721 \approx 0,541 \text{ м/с.}$$

Вектор \vec{V}_M скорости точки M направлен перпендикулярно отрезку прямой MC_V (рис. 4.7).

Расчет ускорений.

Ускорение \vec{a}_A точки A кривошипа OA равно векторной сумме касательного \vec{a}_A^τ и нормального \vec{a}_A^n ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n.$$

Модули касательного и нормального ускорений точки A вычисляем по формулам:

$$a_A^\tau = |\varepsilon_{OA}| \cdot OA = 2 \cdot 0,4 \approx 0,8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 1,5^2 \cdot 0,4 \approx 0,9 \text{ м/с}^2.$$

Вектор \vec{a}_A^τ касательного ускорения точки A перпендикулярен кривошипу OA и его направление совпадает с вектором \vec{V}_A скорости точки A , так как кривошип вращается ускоренно. Что же касается вектора \vec{a}_A^n нормального ускорения точки A , то он направлен вдоль кривошипа OA к его оси вращения O (рис. 4.8). Очевидно, что модуль ускорения точки A определится по теореме Пифагора:

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = \sqrt{0,8^2 + 0,9^2} \approx 1,2 \text{ м/с}^2.$$

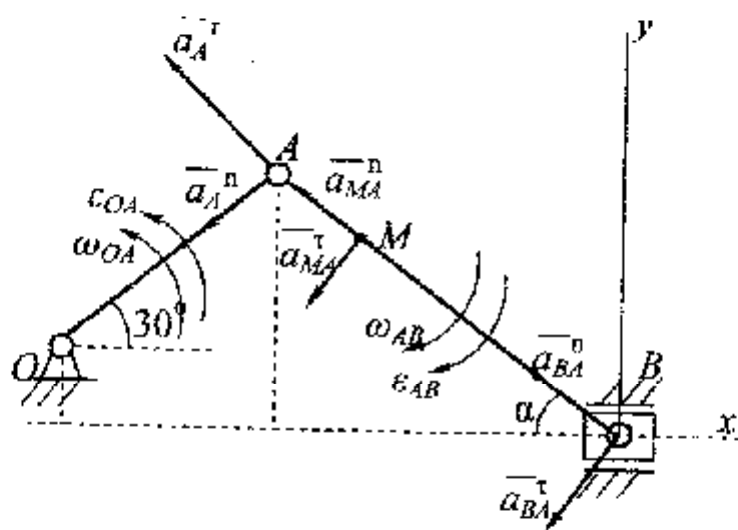


Рис. 4.8

Шатун AB совершает плоское движение. Возьмем за полюс точку A шатуна и запишем векторное равенство, определяющее ускорение точки B шатуна:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^r + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^r + \vec{a}_{BA}^n. \quad (4.1)$$

Модули касательного a_{BA}^r и нормального a_{BA}^n ускорений точки B вокруг полюса A определяем по формулам:

$$a_{BA}^r = \varepsilon_{AB} \cdot AB = 0,8\varepsilon_{AB};$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0,75^2 \cdot 0,8 = 0,45 \text{ м/с}^2.$$

Векторы \vec{a}_{BA}^r и \vec{a}_{BA}^n изображены на рис. 4.8. Ориентация вектора \vec{a}_{BA}^r соответствует принятому ускоренному вращению (ε_{AB}) шатуна AB .

Для определения мгновенного углового ускорения ε_{AB} шатуна AB используется то обстоятельство, что вектор \vec{a}_B ускорения ползуна B направлен вдоль оси Bx , поэтому $a_{By} = 0$. Проецируя обе части векторного равенства (4.1) на ось Bu , будем иметь:

$$0 = a_A^r \cos 30^\circ - a_A^n \cos 60^\circ + a_{BA}^n \cos 60^\circ - a_{BA}^r \cos 30^\circ;$$

откуда

$$a_{BA}^r = \frac{a_A^r \sqrt{3} - a_A^n + a_{BA}^n}{\sqrt{3}} = \frac{0,8 \cdot \sqrt{3} - 0,9 + 0,45}{\sqrt{3}} \approx 0,934 \text{ м/с}^2.$$

Тогда

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^r}{AB} = \frac{0,934}{0,8} \approx 1,17 \text{ рад/с}^2.$$

Полученное положительное значение мгновенного углового ускорения ε_{AB} свидетельствует о том, что принятое для него на рис. 4.8 направление соответствует действительному.

Проекция a_{Bx} ускорения ползуна B на ось Bx равна:

$$\begin{aligned} a_{Bx} &= -a_A^r \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^r \cos 60^\circ - a_{BA}^n \cos 30^\circ = \\ &= -0,8 \cdot 0,5 - 0,9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,934 \cdot 0,5 - 0,45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -2,04 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Поскольку проекция $a_{By} = 0$, то $a_B = |a_{Bx}| = 2,04 \text{ м/с}^2$.

Очевидно, что вектор a_B ускорения ползуна B ориентирован в отрицательном направлении оси Bx .

Для определения ускорения точки М (точка А -- полюс) имеем

$$\overline{a_M} = \overline{a_A^r} + \overline{a_A^n} + \overline{a_{MA}^r} + \overline{a_{MA}^n} \quad (4.2)$$

Модули касательного a_{MA}^r и нормального a_{MA}^n ускорений точки М вокруг полюса А равны:

$$a_{MA}^r = \varepsilon_{AB}^2 \cdot AM = 1,17 \cdot 0,2 = 0,234 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{MA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AM = 1,75^2 \cdot 0,2 = 0,112 \text{ м/с}^2.$$

Векторы $\overline{a_{MA}^r}$ и $\overline{a_{MA}^n}$ изображены на рис. 4.8.

Проецируя обе части векторного равенства (4.2) на координатные оси, получаем:

$$\begin{aligned} a_{Mx} &= -a_A^r \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ - a_{MA}^r \cos 60^\circ - a_{MA}^n \cos 30^\circ = \\ &= -0,8 \cdot 0,5 - 0,9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,234 \cdot 0,5 - 0,112 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -1,39 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{My} &= a_A^r \cos 30^\circ - a_A^n \cos 60^\circ - a_{MA}^r \cos 30^\circ + a_{MA}^n \cos 60^\circ = \\ &= 0,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,9 \cdot 0,5 - 0,234 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,112 \cdot 0,5 \approx 0,0962 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, модуль ускорения точки М равен:

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = \sqrt{(-1,39)^2 + 0,0962^2} \approx 1,393 \text{ м/с}^2.$$

Список литературы

1. Бутеян Н.В., Лунц Я.Б., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 736 с.
2. Дронг В.И. и др. Под ред. Колесникова К.С. Курс теоретической механики. М.: Из-во МГТУ им. Баумана Н.Э. 2002.-736 с.
3. Цикитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высш. школа. 2003.-719 с.
4. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. СПб: Из-во «Лань», 2004.-768 с.

Приложение

Уфимский государственный авиационный технический университет

Кафедра теоретической механики

Контрольные работы
Кинематика

Вариант №

№ группы	Должность	Ф.И.О.	Дата	Подпись
Выполнил	студент			
Проверил	доцент			
Принял	доцент			

Уфа 2007

Составители: СИДОРОВ Валерий Евгеньевич
ШАКИРЬЯНОВ Марат Магсутьянович

КИНЕМАТИКА

Методические указания
к выполнению контрольных работ по теоретической механике

Подписано в печать 18.04.2007. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Times New Roman.

Усл. печ. л. 3,3. Усл. кр.-отт. 3,3. Уч.-изд. л. 3,2.

Тираж 200 экз. Заказ № 193

ГОУ ВПО Уфимский государственный авиационный технический университет

Центр оперативной полиграфии УГАТУ

450000, Уфа-центр, ул. К. Маркса, 12