

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра математического анализа

51(07)
Д-436

М.А. Корытова, С.А. Шунайлова, А.А. Эбель

**ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ
ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

Сборник задач

Часть 2

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2005

Типовой расчет №2

Функции нескольких переменных

В а р и а н т 1

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \sqrt{2x + y} + \sqrt{x - 2y}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{\sin(x^2 + y^2) \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = e^{x^2+3y^5}$, где $x = \sin 2t$, $y = t^3$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y от функции, заданной неявно:

$$x^2 + z^2 - 2y^2 - 5x^z + 10z^3 - 5 = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = \sin^2(2x + y).$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = x^y$ в точке $(1,04; 2,05)$.

7. Составьте уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x = t$, $y = t^2$, $z = 1 - \frac{t}{2}$ в точке $(2; 4; 0)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 2xy - 6x^2 - y^2 + 4y.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = (x - 2)^2 + 2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $y = 2 - x$, $y = 0$, $y = 1$.

В а р и а н т 2

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \ln x + \ln(y^2 - 4x).$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2y^2} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = 3z^2 + zy^5 + y^3$, где $z = \sin t$, $y = e^{2t^2}$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y от функции, заданной неявно:

$$x^y - 5xyz = 20x^z.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = \cos^2(3x + 5y).$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $(4,05; 2,96)$.

7. Составьте уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x = \sin t$, $y = 2 \cos t$, $z = 4t$ в точке $(0; 2; 0)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 3xy - 12x^2 - 3y^2 + x.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3xy - 12x^2 - 3y^2 + x$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x$.

В а р и а н т 3

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \sqrt{x - 2\sqrt{y}}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \left(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{xy} - 2\sqrt{x}} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \ln \arcsin(x - y)$, где $x = 3t^2$, $y = \frac{1}{t}$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y от функции, заданной неявно:

$$z^3 + 5yz = a^3, \quad a = \text{const}.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = \text{tg}(x + 7y).$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = \text{arctg} \left(\frac{x}{y} - 1 \right)$ в точке $(1,98; 1,02)$.

7. Составьте уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ в точке $(1; 0; 1)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 2x^2 + 4y^2 + y - xy.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 + 4xy - 2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 2$, $y = 2$, $x + y = 2$.

В а р и а н т 4

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2 - x^2 - \frac{1}{2}y^2}}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = 5x^3 + 4x^2 - y$, где $x = \cos t$, $y = e^{2t}$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y от функции, заданной неявно:

$$e^z - xyz = 3x^y.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = e^{xy}.$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = x^{y+1}$ в точке $(0,98; 2,02)$.

7. Составьте уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$ в точке $(2; 0; 1)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 2x^2 + 3y - xy + 4.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 2$, $y = 1$, $x + y = 2$.

В а р и а н т 5

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \ln(y^2 - 4x + 8)^{-1}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}.$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \cos(x^2 + 5y)$, где $x = e^{3t}$, $y = \sin 2t$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y от функции, заданной неявно:

$$\sin(xyz) - x^2y + z = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = x \sin^2 y.$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$ в точке $(1,03; 0,98)$.

7. Составьте уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \ln \cos t$ в точке $(1; 0; 0)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = x^2 - 2y^2 + 4xy + 4y.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 3$.

В а р и а н т 6

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \arccos \frac{x^2 + y^2}{9}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 2}} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2x - xy - 2y} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \sin(2x^3 + y^3)$, где $x = \ln 2t$, $y = t^3$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y от функции, заданной неявно:

$$\cos(x^2 yz) + xy + 5z = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = y \cos^2 x.$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = e^{x^3 y^4 - 8}$ в точке $(2, 0,2; 0,97)$.

7. Составьте уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x = \sqrt{t}$, $y = t^3$, $z = \ln t$ в точке $(1; 1; 0)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - xy$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $y = 2x$, $y = x$, $x = 1$.

В а р и а н т 7

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + 2xy)^{\frac{5}{xy}}.$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \ln(e^x + e^y)$, где $x = t^5$, $y = \cos 2t$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y от функции, заданной неявно:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = \sin^2(x - y).$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = \ln(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{y})$ в точке $(8,03; 0,99)$.

7. Составьте уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для линии $x = 2 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 5$ в точке $(0; 3; 5)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 3x^2 + y^2 + 3x - 4y + 1.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3 \ln x + xy^2 - y^3$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $y = 0$, $y = 2$, $x = 1$, $x = 3$.

В а р и а н т 8

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \sqrt{\ln \frac{9}{x^2 + y^2}}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left((x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \ln(e^t + e^x)$, где $x = t^3$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y от функции, заданной неявно:

$$zxe^y + z^2xy = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = \ln(x^2 - y^2).$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = \ln(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})$ в точке $(4, 02; 1, 03)$.

7. Составьте уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z = 3x^2 + 4xy - y^2$ в точке $(0; 1; -1)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $y = x$, $y = 3x$, $x = 2$.

В а р и а н т 9

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \arcsin \frac{x}{3} + \sqrt{xy}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x.$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \ln \operatorname{arctg}(x)$, где $x = e^t$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$ye^{zx} + 2z^3 x^2 y = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = \ln(xy).$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = \ln(\sqrt[3]{x} - \sqrt{y})$ в точке $(8,03; 1,02)$.

7. Составьте уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z = 2x^2 + 3y^2$ в точке $(1; -1; 5)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = (x-1)^2 - 2y^2.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 3$, $y = 0$, $y = x$.

В а р и а н т 10

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \sqrt{y \sin x}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x}{x + y}.$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \arcsin(5t^3 + x)$, где $x = \sqrt{t^2 + 1}$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно:

$$x^2 e^{zy} + xyz = 3.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = \operatorname{arctg}(xy).$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = x^{2y}$ в точке $(1,02; 2,02)$.

7. Составьте уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $x^2 - 2y^2 - z^2 = 3$ в точке $(-2; 0; 1)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = (x - 1)^2 + 2y^2.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x^2 + 18xy + 18y - 8x + 8$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $y = 2$, $y = x$, $x = 0$.

В а р и а н т 11

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \sqrt{\frac{y}{\cos x}}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{x^4 - 2y^4}{3x^4 + y^4} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \operatorname{tg}(3t^2 + 4x^3 - y)$, где $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$z \sin(x^2 y) + xyz = 5.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = (x - y)e^{xy}.$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = \sqrt{2x + y^2}$ в точке $(8, 01; 3, 03)$.

7. Составьте уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $x^2 - y^2 - 5z = 0$ в точке $(0; 5; -5)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 3x^2 + 18xy + 18y - 8x + 8.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = (x - 1)^2 + 2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

В а р и а н т 12

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \arcsin \frac{y}{x}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{\sqrt{xy} - x}{\sin(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \frac{e^{at}(y-z)}{a^2}$, где $y = a \sin t$, $z = a \cos t$, $a = \text{const}$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$e^{xyz} + \sin(xy) + zx = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = y \ln \frac{x}{y}.$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x, y) = e^{x^3 y^2 - 1}$ в точке $(1, 02; 0, 98)$.

7. Составьте уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z^2 + x^2 = 5$ в точке $(-1; 6; 2)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = (x-1)^2 + 2y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

В а р и а н т 13

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + x^2 y^2}}{x^2 + y^2} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \sin(t^3 + 5x^2 + y)$, где $x = e^t$, $y = 2t$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$e^{zx} - \cos(2xz) + y^2 = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = \arctg(x + 2y).$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = e^{3x^5 y^4 - 3}$ в точке $(1,03; 0,99)$.

7. Составьте уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ в точке $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = xy - 3x^2 - y^2 + x - 12.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 3$, $y = 3$, $x + y = 3$.

В а р и а н т 14

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{\sin 3x^2}{\sin 5y^2} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \ln \sin(xy)$, где $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$e^{zy} + 2\sin(x^2y) + z = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = \arcsin(xy).$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = x^2 \sqrt{21 + y^2}$ в точке $(2,03; 2,01)$.

7. Составьте уравнения касательной плоскости и нормальной прямой для поверхности $z^2 + 2x^3 - 3y^2 - 3 = 0$ в точке $(1; 1; 2)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 6 - 3x^2 - 4y^2 + x - y.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x^2 + y^2 - 3y^3 + y$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $3x^2 + y^2 = 1$.

В а р и а н т 15

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y).$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{\sqrt{1 + x + y} - 1}{x + y} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \ln \cos(xy)$, где $x = \sqrt[5]{t^3}$, $y = e^t$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$x^y + zx - yz = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = \sin(xy).$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = \ln(x^3 + y^2)$ в точке $(0,04; 1,04)$.

7. Найдите градиент функции $z = \sin^2 3x + e^{-y}$ в точке $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 3 \ln x + xy^2 - y^3.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4xy + 4y$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $y = 0$, $y + 2x = 2$.

В а р и а н т 16

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \arccos \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{\operatorname{arctg}(x^2 + y^2)}{x + y} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = e^{x^2 + 3y^4 + t}$, где $x = \sin t$, $y = 2t + 5$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$z \ln(x + z) - \frac{xy}{3} = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = \sin(3x^2 + 5xy - 13)$ в точке $(1,04; 1,94)$.

7. Найдите градиент функции $z = \ln \sqrt{x - y}$ в точке $(2; 1)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = x - x^2 + 3y - 4y^2.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 4y^2 + 4y^3 + 1$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $x^2 + 4y^2 = 1$.

В а р и а н т 17

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + x}}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{(x^2 - 1)(xy + 1)}{x^3 y} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \arctg(3x^2 + 5\sqrt{y})$, где $x = e^{2t}$, $y = 3t^3$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$z^2 \ln(y + z) - \frac{xz}{2} = 1.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}.$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = 2x^3 + 3yx^2 + y^2$ в точке $(1,02; 1,05)$.

7. Найдите градиент функции $z = \operatorname{tg}(2x^2 + 3yx^2 - 5)$ в точке $(2; 1)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = yx - 2x^2 + 6y - y^2 + 3.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 + 3y - xy + 4$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $y = 0$, $y = x + 1$.

В а р и а н т 18

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \operatorname{arctg} \sqrt{e^{-xy} - 1}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \left(\frac{x^2 y^3 - \sqrt{x}}{y \sqrt{x} - 1} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \arcsin(5x + 3y^2)$, где $x = 2t^4 + 1$, $y = \frac{1}{t}$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$xz - e^{\frac{z}{y}} + x^3 + y^3 = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = \sqrt{x^2 + 2y}.$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = \operatorname{tg}(x^4 + 2xy^2 - 9)$ в точке $(1,01; 1,97)$.

7. Найдите градиент функции $z = \sqrt{\frac{2-y}{\sin 3x}}$ в точке $\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 8x - 6x^2 + 12y - y^2 + 3.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 9x^2 + 4y^2 + 2y^3 - 6y$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $9x^2 + 4y^2 = 1$.

В а р и а н т 19

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \ln(-y) + \sqrt{x - 4y^2}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{2 \arcsin(x^2 - y^2)}{x + y} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \operatorname{arctg}(txy)$, где $x = e^t$, $y = \sqrt{2t+1}$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$yz - e^{\frac{x}{y}} + z^2 + x^3 + 4y^3 = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ в точке $(1,02; 1,97)$.

7. Найдите градиент функции $z = \ln(y^2 - \sqrt{x})$ в точке $(1; 2)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3xy - 12x^2 - 3y^2 + x$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$.

В а р и а н т 20

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \sqrt{x} + 2\sqrt{-5 - 6y - y^2}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{\sin(xy)}{x + y} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \operatorname{tg}(t + 3x^4 + y)$, где $x = \ln t$, $y = e^{2t}$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$xyz - e^{\frac{z}{5}} + x^2 + y^2 = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = x \ln \frac{y}{x}.$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = \sqrt{x^4 + y^3}$ в точке $(1,02; 1,98)$.

7. Найдите градиент функции $z = \cos^3(2y - x)$ в точке $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = (x - 2)^2 + 2y^2.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2 - 4x^2 - y^2 + 4y - \frac{4}{3}y^3$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $4x^2 + y^2 = 1$.

В а р и а н т 21

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \ln(x^2 + y^2 - 6x + 5).$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{xy + \sin x}{xy + \sin y} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \operatorname{ctg}(tx - 2y^3)$, где $x = \sqrt{t+1}$, $y = \ln(2t)$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$z^3 \ln(x + y) - \frac{x^2 y}{3} = 10.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}.$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = \sqrt[3]{x^3 + y}$ в точке $(2,025; 117,15)$.

7. Найдите градиент функции $z = \operatorname{arctg}(\ln(1-x) + \sqrt{y})$ в точке $\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = x^4 + 4xy - 2y^2.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy - 3x^2 + x + 1$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 1$, $y = 2$, $xy = 1$.

В а р и а н т 22

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = x^2 y \sqrt{x^2 + y^2 + y}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{1 - \cos xy}{x^2 + y^2} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \frac{1}{5} e^{2t^2} (x^3 - y)$, где $x = \sqrt{t+1}$, $y = t^2 + 1$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$x^2 \ln(yz) + \frac{y}{z} - 7 = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = (x + y)e^{xy}.$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = \sqrt{12 + x^2 y^3}$ в точке $(2, 02; 2, 98)$.

7. Найдите производную функции $z = 3 \cos^2 3x + \ln(1 - y)$ в точке $(0; 0)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 6 - 3x^2 + x - 3xy$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $x = 2$, $y = 2$, $xy = 2$.

В а р и а н т 23

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \sqrt{\sqrt{2x} - \sqrt{8 - 2y}}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \left(\frac{n(m^2 + 3n + 4)}{m^2(2n^3 + 1 - n)} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = t^2 + 3 \sin x - 4 \cos(x + y)$, $x = e^t$, $y = \sin t$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$\operatorname{arctg}(x - y) - zy + x = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = \operatorname{arctg}(3x - y).$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = x^2 \sqrt{13 + y}$ в точке $(3, 02; 3, 03)$.

7. Найдите производную функции $z = e^{-x^2}(1 - 3y)$ в точке $(1; 1)$ в направлении вектора $\vec{a} = \{1; -3\}$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 18 - x^2 - 6y^3 - 4y^2$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $x^2 + 4y^2 = 1$.

В а р и а н т 24

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \ln(3 - \sqrt{x} - y).$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + xy)^{\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}}.$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \arcsin(ty)$, где $y = t^{\frac{1}{2}}$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$\arctg(2x - 3y) + xyz = 8.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = e^y \sin x.$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = y\sqrt{7 + x^2}$ в точке $(3, 02; 0, 04)$.

7. Найдите производную функции $z = \operatorname{tg}(2\sqrt{x} - 4y)$ в точке $(4; 1)$ в направлении вектора $\vec{a} = \{1; 0\}$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2).$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 4x - 2x^2 + 6yx + 1$ на замкнутом множестве, ограниченном линиями $y = \frac{2}{x}$, $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$.

В а р и а н т 25

1. Найдите и изобразите на плоскости область определения функции:

$$z = \arccos \frac{x^2}{y^2}.$$

2. Вычислите

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{\sin(x+y)}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} \right).$$

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{du}{dt}$, если $u = \arcsin(5\sqrt{x} + 2y)$, где $x = e^t$, $y = \sqrt{t}$.

4. Найдите производные z'_x и z'_y заданной неявно функции:

$$\operatorname{arctg}(x+z) - xy + 5 = 0.$$

5. Найдите дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции:

$$z = e^x \sin y.$$

6. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение функции $f(x; y) = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $(1,04; 0,04)$.

7. Найдите производную функции $z = \frac{3x^3 - 4y}{x + y}$ в точке $(1; 1)$ в

направлении вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

8. Исследуйте на экстремум функцию:

$$z = 2x^3 - xy.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 8x - 2x^2 + 12y - y^2 + 3x^3$ на замкнутом множестве, ограниченном линией $2(x-2)^2 + (y-6)^2 = 1$.