

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ГОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет  
им. И.И.Ползунова»

**В.В. Черканов, А.В. Данилов, Д.П. Вольных**

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ**

*Домашнее расчётно-проектировочное задание  
и методические указания к выполнению расчётно-проектировочной  
работы для студентов машиностроительных специальностей*

Изд-во АлтГТУ  
Барнаул 2005

УДК 621.315.66001

Черканов В.В. Определение перемещений в стержневых системах: домашнее расчётно-проектировочное задание и методические указания к выполнению расчётно-проектировочной работы для студентов машиностроительных специальностей. / В.В. Черканов, А.В. Данилов, Д.П. Вольных. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ 2005. – 42 с.

Приведены варианты домашнего задания по определению перемещений в балке, кривом брус, раме и пространственном брус. Даны методические указания по выполнению домашнего задания, приведены примеры решения задач. Для студентов машиностроительных специальностей 2-го курса дневной и 3-го курса вечерней и заочной форм обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседании  
кафедры «Прикладная механика»  
Протокол № 7 от 6 мая 2005г.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ .....	4
2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ.....	21
3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В РАМАХ .....	27
4.ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПЛОСКИХ КРИВЫХ СТЕРЖНЯХ БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ.....	38

Долговечность и надежность конструкции оценивается как прочностью, так и жесткостью ее элементов. Жесткость элементов конструкции характеризуют перемещения – линейные перемещения точек продольной оси бруса и углы поворота его поперечных сечений относительно первоначального положения. Умение определять перемещения особенно важно при решении статически неопределимых задач.

## 1. ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

В задаче 1. Определить, угловые и линейные перемещения, в балке методом начальных параметров, в точках 1,2 и 3, построить эпюры  $Qy$ ,  $Mx$ ,  $\varphi$ ,  $y$ .

В задачах 2,4. Определить перемещения в раме (вертикальное в т.1, горизонтальное в т.2 и угловое в т.3).

В задаче 3. Определить перемещения в кривом брус, методом Мора (вертикальное в т.1, горизонтальное в т.2 и угловое в т.3).

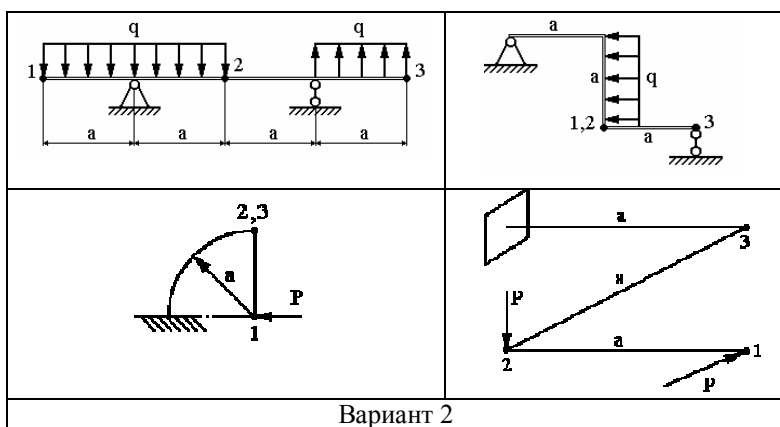
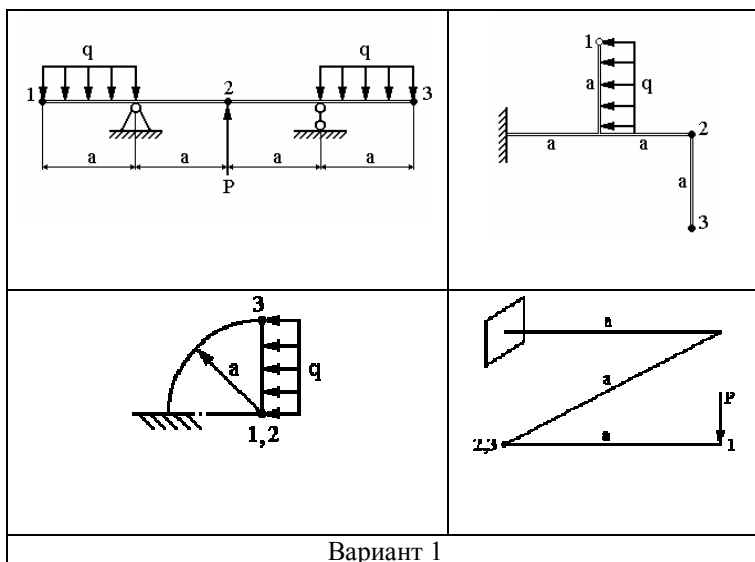
Конкретные варианты задания определяются преподавателем. Численные значения для всех задач представлены в таблице 1.

Таблица 1

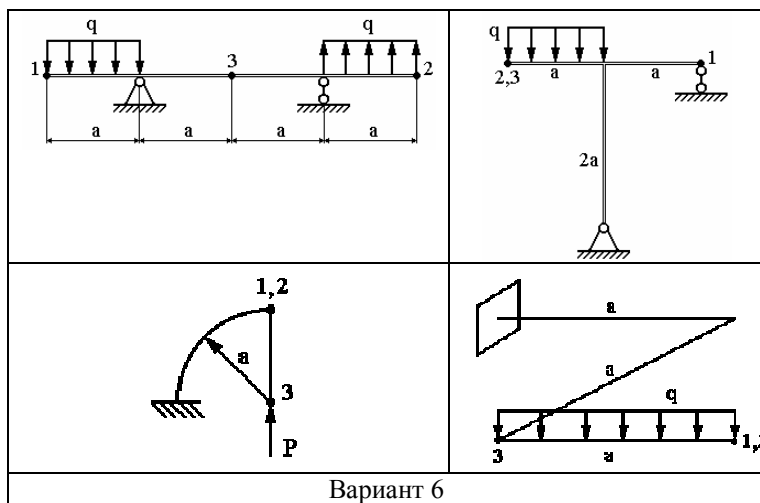
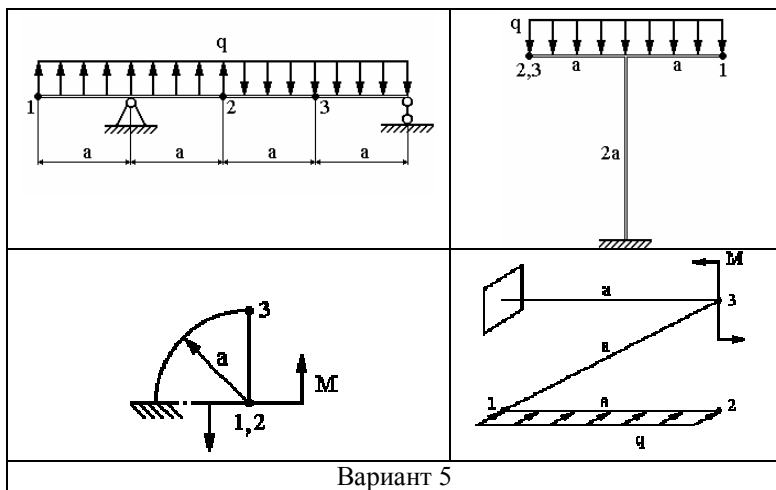
N	$Q$ , кН/м	$F$ , кН	$M$ , кН·м	a, м	h, мм	b, мм	d, мм
1	1	2	3	1	100	40	80
2	2	4	5	2	120	50	100
3	3	6	7	3	140	60	120
4	4	8	9	1	100	70	80
5	5	2	11	2	120	40	100
6	6	4	3	3	140	50	120
7	7	6	5	1	100	60	60
8	8	8	7	2	120	70	80
9	9	2	9	3	140	40	100
10	1	4	11	1	100	50	120
11	2	6	3	2	120	60	60
12	3	8	5	3	140	70	80
13	4	2	7	1	100	40	100

Продолжение таблицы 1

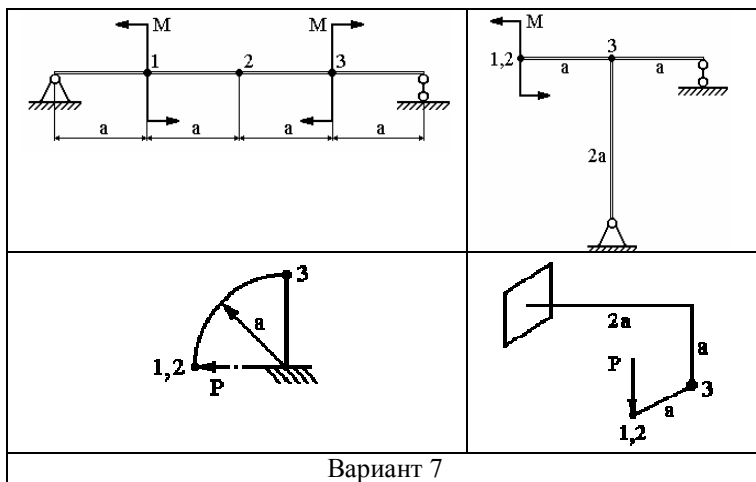
N	Q, кН/м	F, кН	M, кН · м	a, м	h, мм	b, мм	d, мм
14	5	4	9	2	120	50	120
15	6	6	11	3	140	60	60
16	7	8	3	1	60	80	80
17	8	2	5	2	80	90	100
18	9	4	7	3	100	100	120
19	1	6	9	1	60	80	60
20	2	8	11	2	80	90	80
21	3	2	3	3	100	100	100
22	4	4	5	1	60	80	120
23	5	6	7	2	80	90	60
24	6	8	9	3	100	100	80
25	7	2	11	1	60	80	100
26	8	4	3	2	80	90	120
27	9	6	5	3	100	100	60
28	1	8	7	1	60	80	80
29	2	2	9	2	80	90	100
30	3	4	11	3	100	100	120



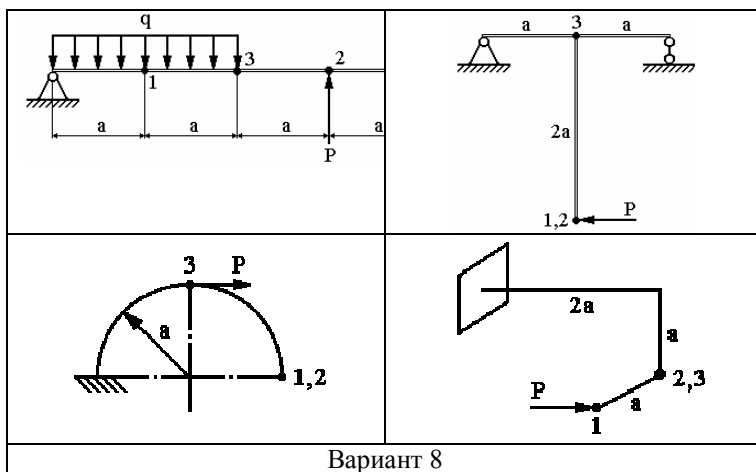




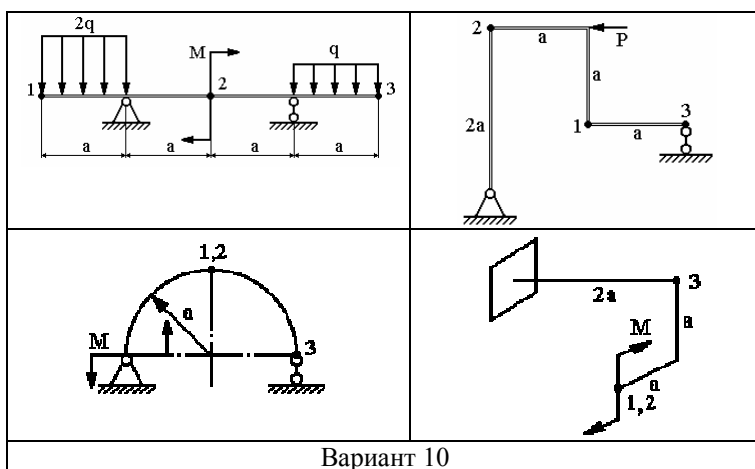
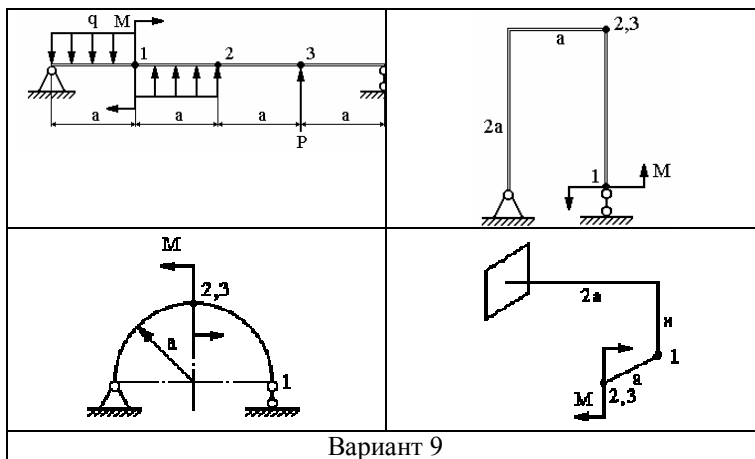


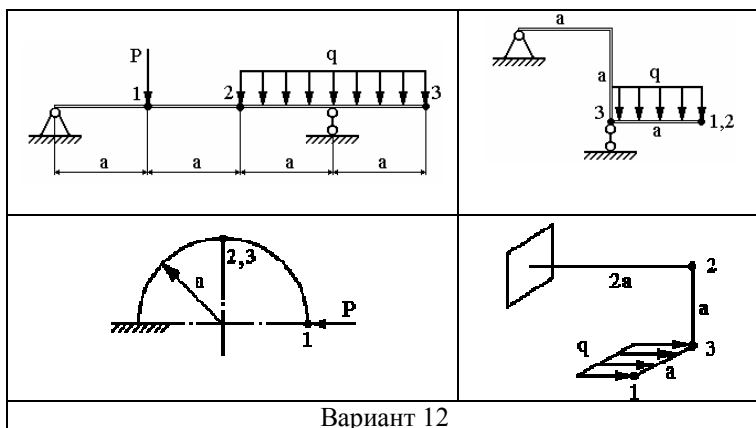
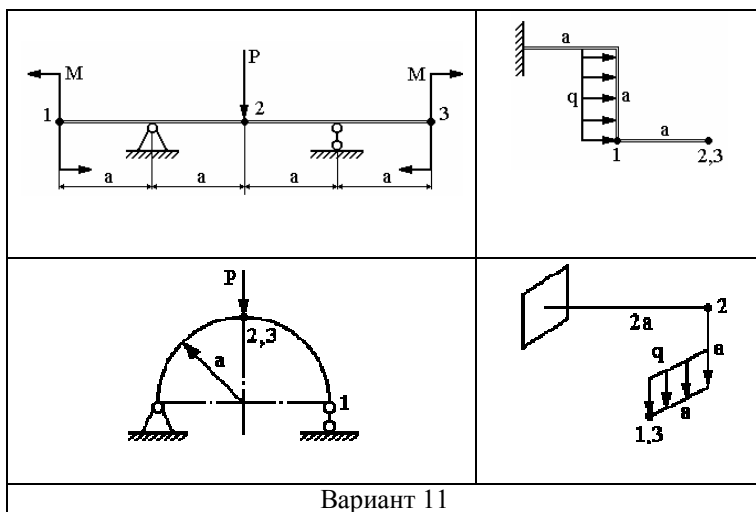


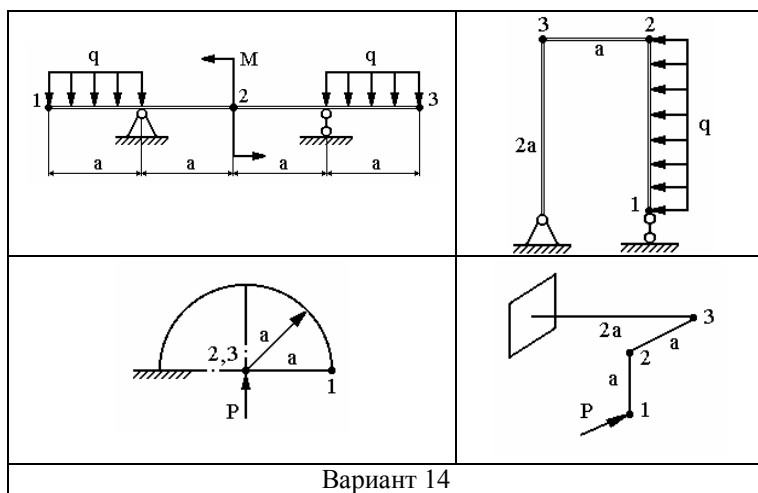
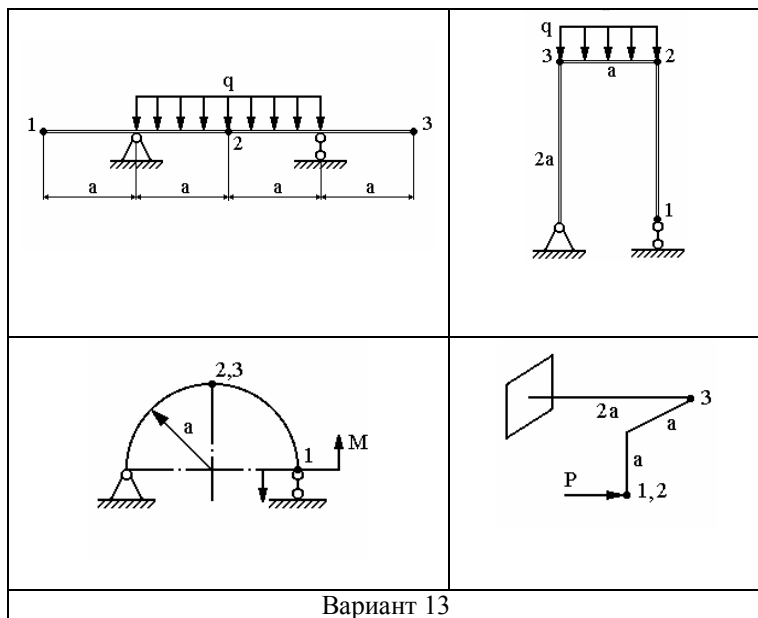
Вариант 7

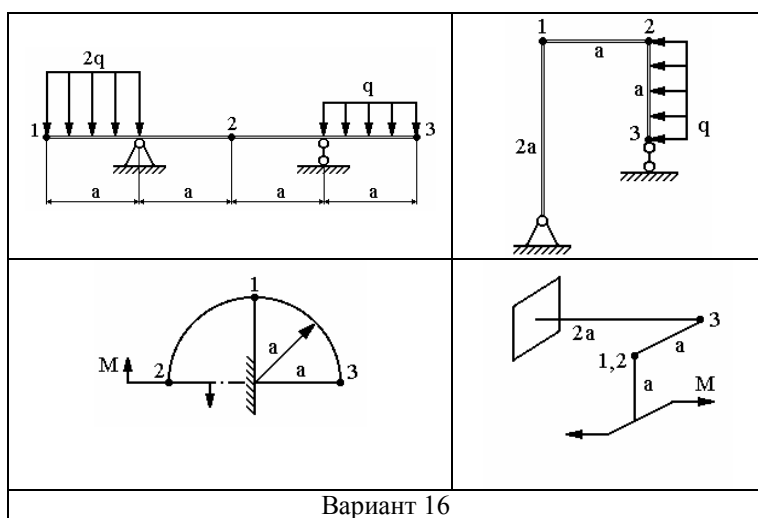
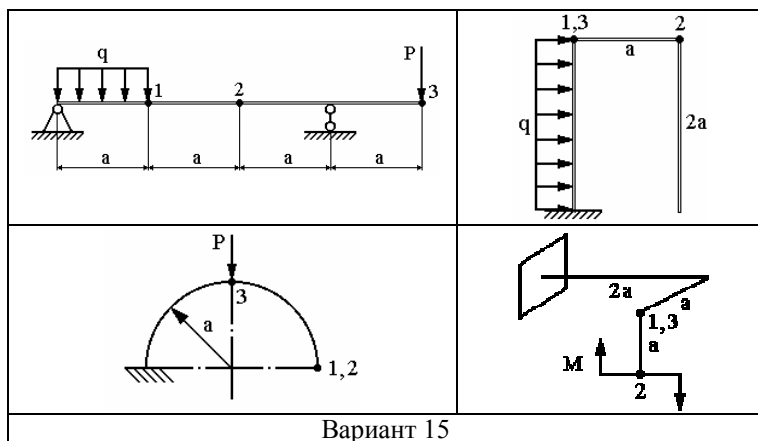


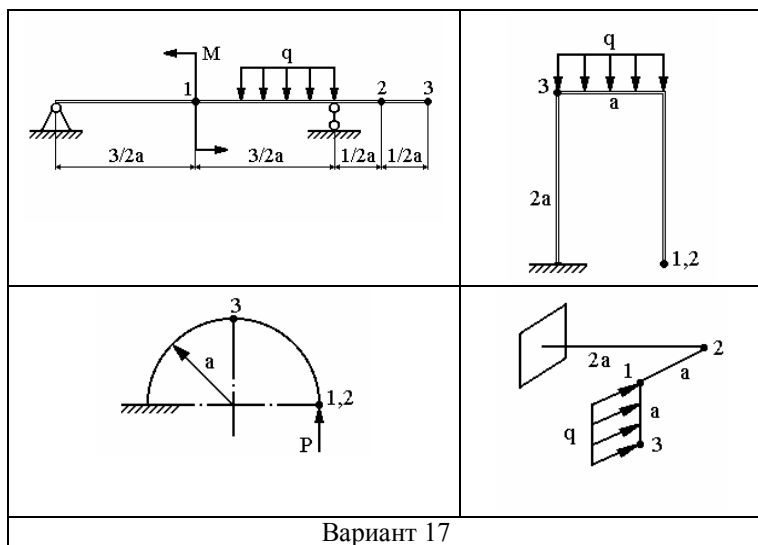
Вариант 8



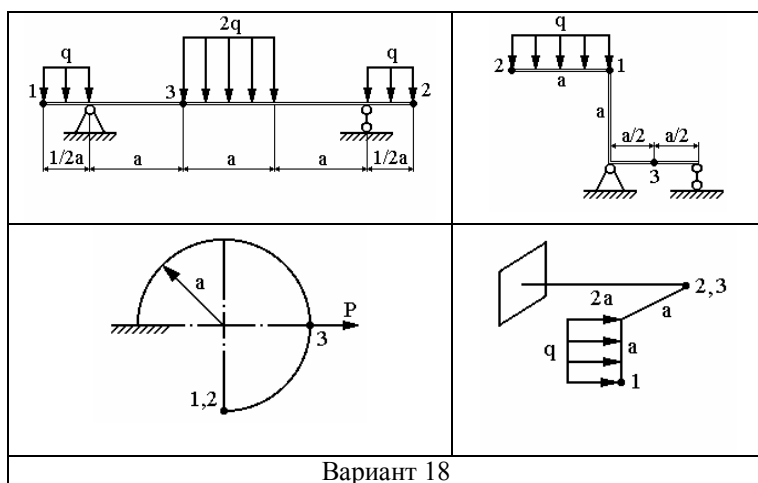




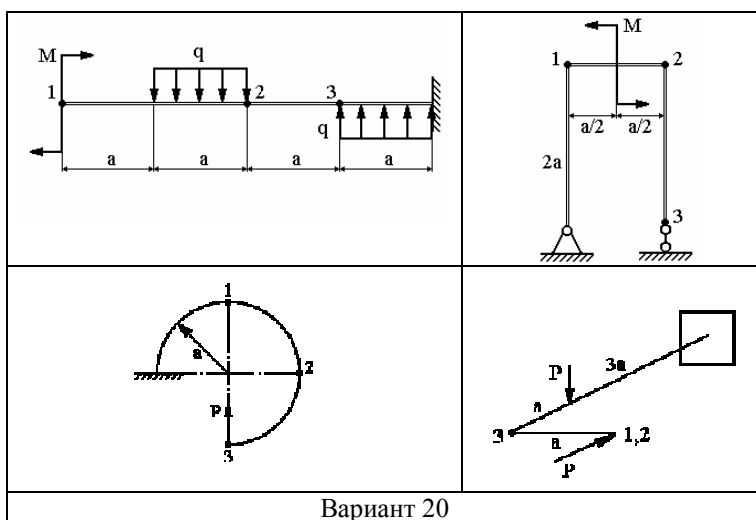
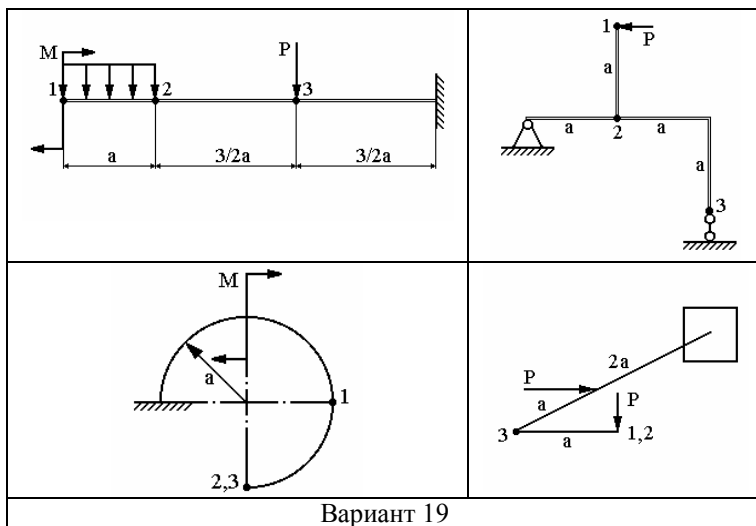


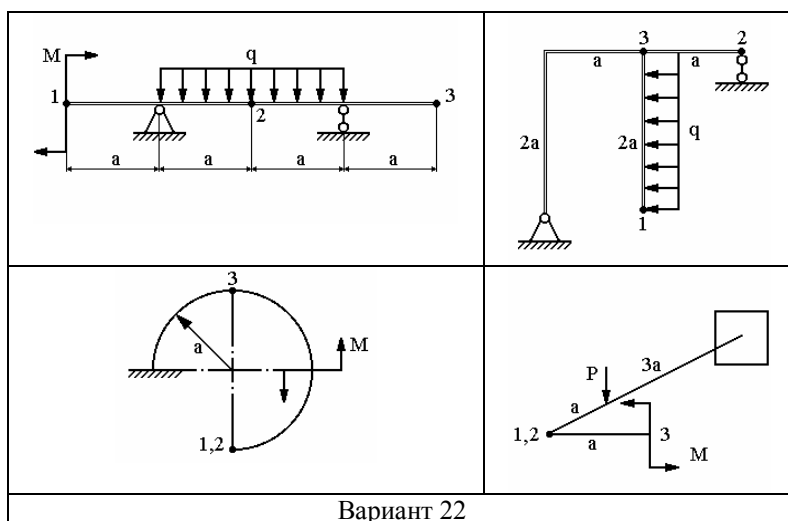
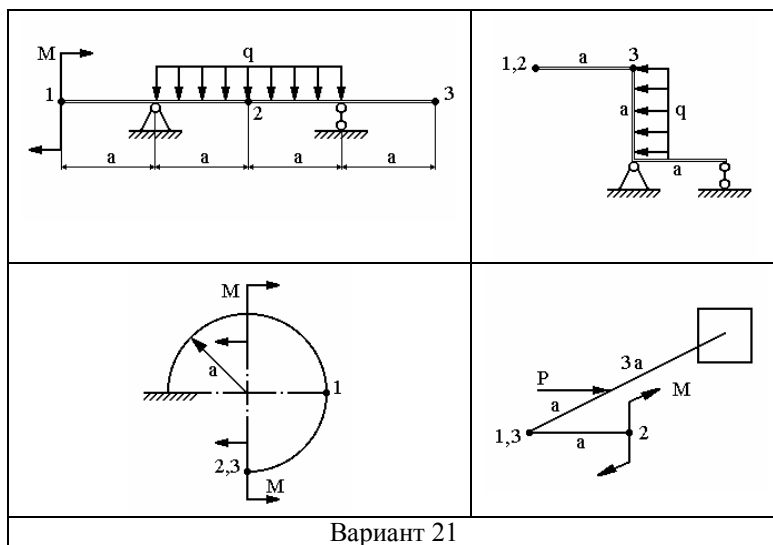


Вариант 17

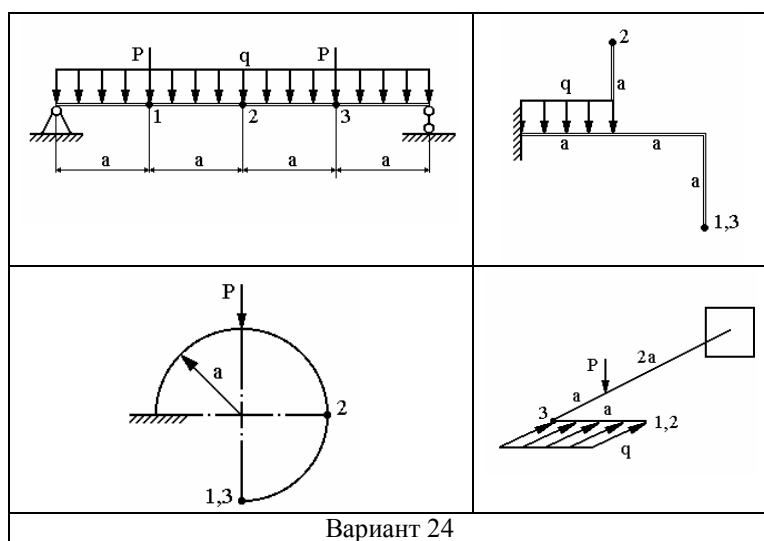
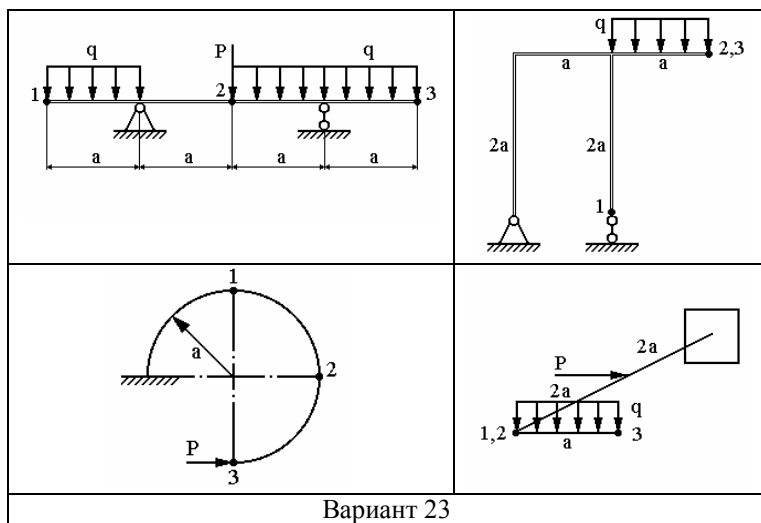


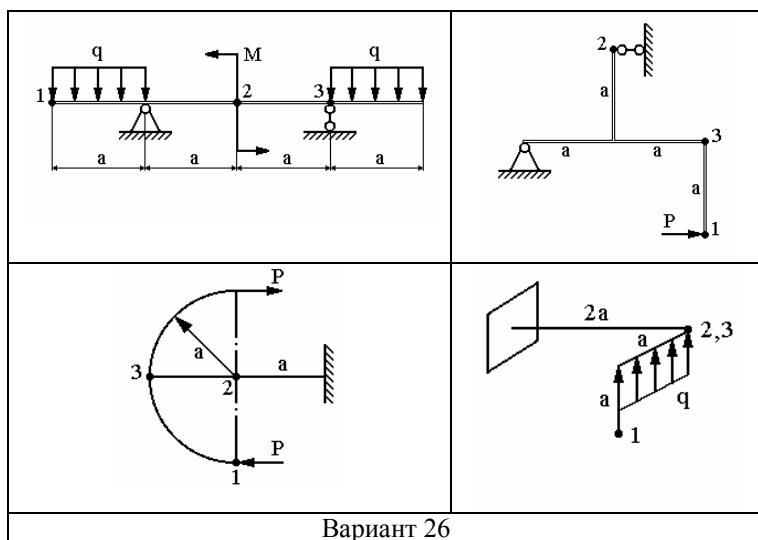
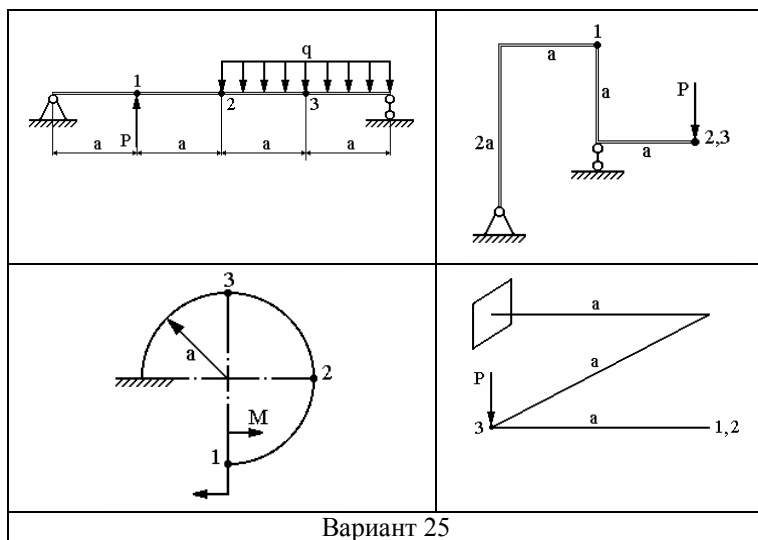
Вариант 18

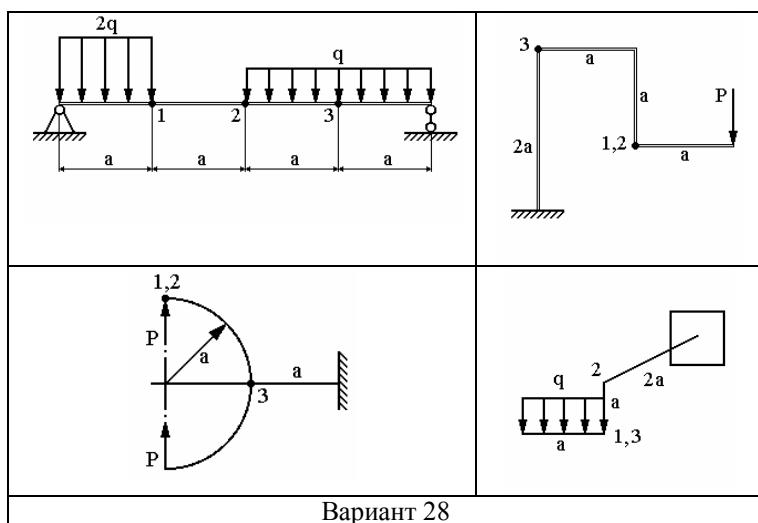
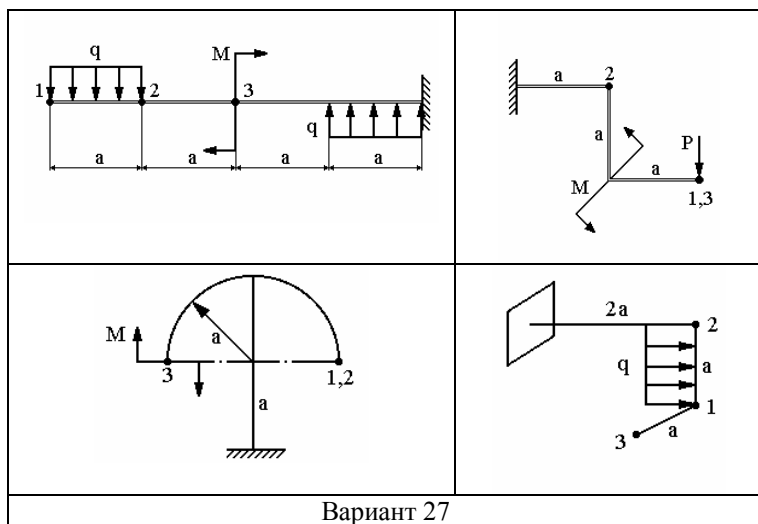


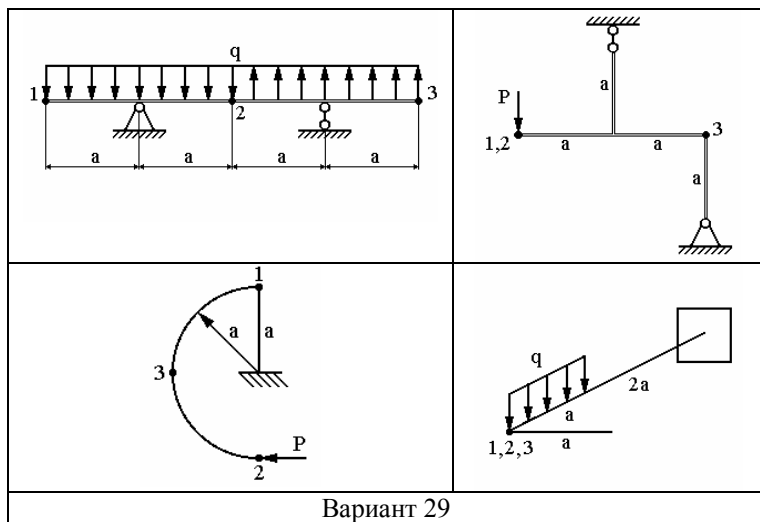




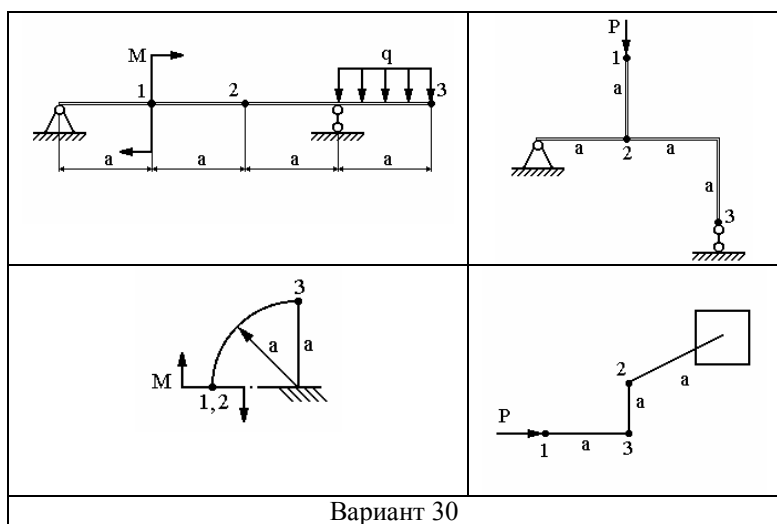








Вариант 29



Вариант 30

Определение перемещений, возможно, несколькими методами. Рассмотрим некоторые из них.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид:

$$E \cdot J_x \cdot y'' = M_x. \quad (2.1)$$

Закон изменения момента зависит от характера приложения нагрузки. В практике чаще всего применяют следующие нагрузки: сосредоточенная сила, момент и равномерно распределенная нагрузка. В общем виде изгибающий момент  $M_x$  может быть записан так

$$M_x = \sum M(z - l_M)^0 + \sum P(z - l_P) + \frac{q(z - l_q)^2}{2} - \frac{q'(z - l_{q'})^2}{2}, \quad (2.2)$$

где  $l_m$  – расстояние от начала координат до точки приложения момента;

$l_P$  – расстояние от начала координат до точки приложения силы;

$l_q$  – расстояние от начала координат до начала распределённой нагрузки;

$l_{q'}$  – расстояние от начала координат до конца распределённой нагрузки.

Последнее вычитаемое включается в уравнение (2.2) в случае обрыва распределенной нагрузки. На рисунке 1 показаны положительные направления внешних нагрузок.

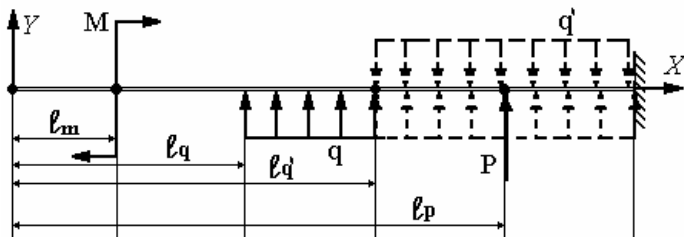


Рисунок 1

Подставив уравнение (2.2) в (2.1) и дважды интегрируя, получим

$$EJ_x y' = EJ_x \varphi_0 + M(z - l_m) + \frac{P(z - l_p)^2}{2} + \frac{q(z - l_q)^3}{6} - \frac{q(z - l_{q'})^3}{6}; \quad (2.3)$$

$$EJ_x y = EJ_x y_0 + EJ_x \varphi_0 z + \frac{M(z - l_m)^2}{2} + \frac{P(z - l_p)^3}{6} + \frac{q(z - l_q)^4}{24} - \frac{q(z - l_{q'})^4}{24}, \quad (2.4)$$

где  $E$  – модуль упругости;

$J_x$  – осевой момент инерции поперечного сечения;

$\varphi_0$  – угол поворота сечения в начале системы координат;

$y_0$  – прогиб в начале системы координат.

Уравнение (2.4) называется универсальным уравнением, поскольку оно позволяет определить прогиб балки без проведения громоздких вычислений постоянных интегрирования на каждом силовом участке и пригодного для различных нагрузок и закреплений балок.

Необходимо иметь в виду, что начало координат, выбирается в крайнем сечении балки.

Постоянные интегрирования (начальные параметры  $EJ_x \varphi_0$  и  $EJ_x y_0$ ) определяются из условий закрепления балок.

=< Примеры >=

Алгоритм решения первой задачи можно разбить на следующие этапы.

1. Выбираем систему координат.
2. Находим неизвестные реакции опорных закреплений.
3. Составляем частное уравнение прогибов для рассчитываемой схемы.
4. Из условий закрепления балки определяем начальные параметры  $y_0$  и  $\varphi_0$ , для чего записываем уравнение прогибов закрепленных точек (сечений) на основе частного уравнения.
5. Подставляем  $y_0$  и  $\varphi_0$  в уравнение для рассчитываемой схемы.
6. Задавая значения  $z$  для указанных точек, вычисляем прогибы.

### Пример 1.

Для заданной статически определимой балки определить прогибы и углы поворота в сечениях 1, 2 и 3 методом начальных параметров. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, углов поворота сечений и прогибов.

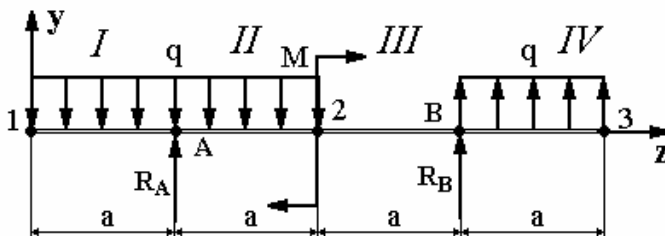


Рисунок 2

Дано:  $q=5 \text{ кН/м}$ ,  $M=10 \text{ кНм}$ ,  $a=2 \text{ м}$ .

1. Выбираем систему координат с началом в левом крайнем сечении.
2. Определяем реакции опорных закреплений

$$\begin{aligned}\sum M_A &= -M + R_B \cdot 2a + q \cdot a \cdot 2,5 \cdot a = 0 ; \\ \sum M_B &= q \cdot 2 \cdot a \cdot 2 \cdot a - R_A \cdot 2 \cdot a - M + q \cdot a \cdot 0,5 \cdot a = 0 .\end{aligned}$$

Отсюда

$$R_B = \frac{M - q \cdot a^2 \cdot 2,5}{2 \cdot a} = \frac{10 - 5 \cdot 4 \cdot 2,5}{2 \cdot 2} = -10 \text{ кН},$$

где знак “-” означает, что истинное направление реакции  $R_B$  противоположное (вниз).

$$R_A = \frac{q \cdot a^2 \cdot 4 - M + 0,5 \cdot q \cdot a^2}{2 \cdot a} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 4 - 10 - 0,5 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 2} = 20 \text{ кН}.$$

Проверка: Составим сумму проекций всех сил на ось Y.

$$\sum Y = -q \cdot a \cdot 2 + R_A + q \cdot a - R_B = 5 \cdot 2 \cdot 2 + 20 + 5 \cdot 2 - 10 \equiv 0.$$

Ноль означает, что реакции определены, верно, и можно приступать к следующему этапу задачи.

3. Для схемы (рисунок 2) составляем уравнение изогнутой оси балки, опираясь на уравнение (2.4)

$$EJ_X y(z) = EJ_X y_0 + EJ_X \varphi_0 z - q \frac{(z)^4}{24} \Big|_I + R_A \frac{(z-a)^3}{6} \Big|_{II} + M \frac{(z-2a)^2}{2} + \\ + q' \frac{(z-2a)^4}{24} \Big|_{III} + R_B \frac{(z-3a)^3}{6} + q \frac{(z-3a)^4}{24} \Big|_{IV}.$$

4. Из условия закрепления балки (вертикальные перемещения на опорах равны нулю) определяем начальные параметры

$$EJ_X y(a) = 0; \quad EJ_X y(3a) = 0.$$

Записывая прогиб из пункта 3 для этих точек, получим два уравнения

$$EJ_X y(a) = EJ_X y_0 + EJ_X \varphi_0 \cdot a - q \frac{a^4}{24} = 0;$$

$$EJ_X y(3a) = EJ_X y_0 + EJ_X \varphi_0 \cdot 3a - q \frac{(3a)^4}{24} + R_A \frac{(3a-a)^3}{6} + \\ + M \frac{(3a-2a)^2}{2} + q' \frac{(3a-2a)^4}{24} = 0.$$

Вычитая из второго первое, получим

$$EJ_X \varphi_0 \cdot 2a - q \frac{a^4 80}{24} + R_A \frac{8a^3}{6} + M \frac{a^2}{2} + q' \frac{a^4}{24} = 0,$$

отсюда получаем



$$EJ_X \varphi_0 = q \frac{79a^3}{48} - R_A \frac{4a^2}{6} + M \frac{a}{4} = 7,5,$$

а из первого уравнения

$$EJ_X y_0 = 7,5 \cdot 2 + 5 \frac{2^4}{24} = -11,667.$$

Так как  $EJ_X y_0 = EJ_X y_1$ , то прогиб в первой точке определен, аналогично  $EJ_X \varphi_0 = EJ_X \varphi_1$ , следовательно и поворот сечения 1 так же определен.

5. Записываем уравнение прогибов из пункта 3, подставляя в него найденные начальные параметры

$$EJ_X y(z) = -11,66 + 7,5z - q \frac{z^4}{24} \Big|_I + R_A \frac{(z-a)^3}{6} \Big|_{II} + M \frac{(z-2a)^2}{2} + \\ + q' \frac{(z-2a)^4}{24} \Big|_{III} + R_B \frac{(z-3a)^3}{6} + q \frac{(z-3a)^4}{24} \Big|_{IV}.$$

Придавая  $z$  значение координат точек 2 и 3, вычислим прогиб.

6. Дифференцируя это уравнение один раз, получим уравнение углов поворота, двукратное дифференцирование приведет к уравнению изгибающих моментов и т.д. Дифференцирование проводят, не раскрывая скобок. Полученные функции используют для построения графиков, рисунок 3.

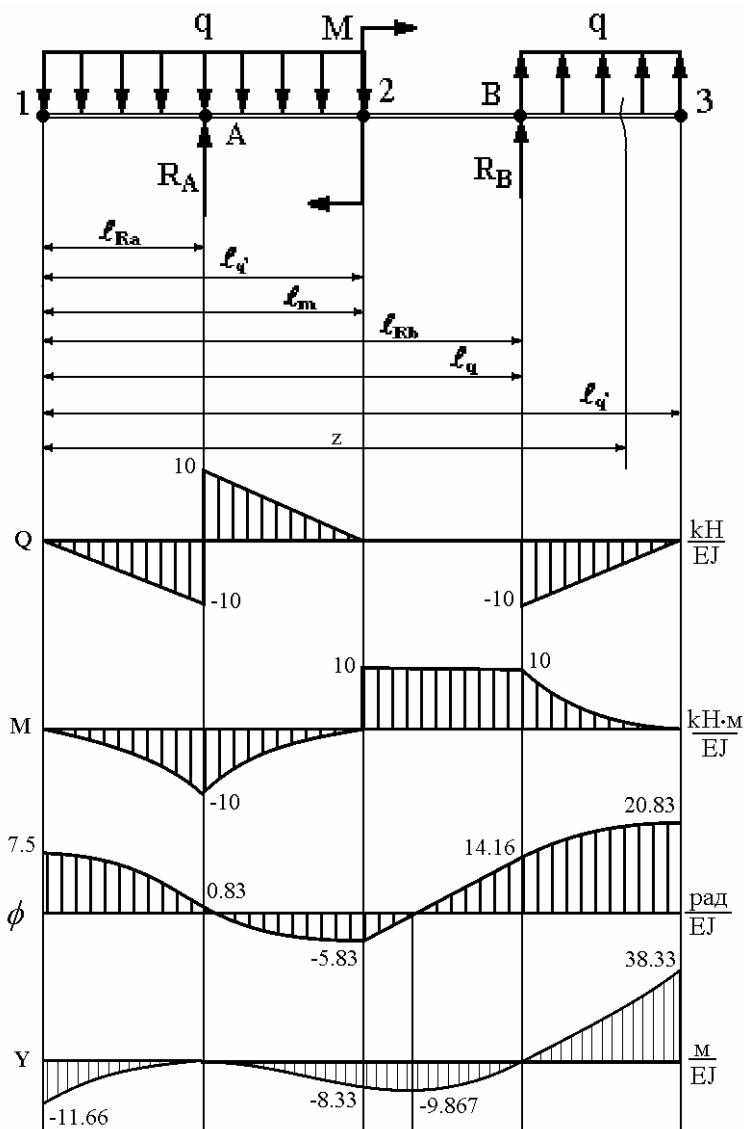


Рисунок 3 – Эпюры внутренних усилий и перемещений

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В РАМАХ

Интеграл Мора в общем виде нагружения стержня содержит шесть слагаемых

$$\delta = \int_l \left( \frac{N_F N_l}{EF} + k_y \frac{Q_F Q_l}{GF} + k_x \frac{Q_F Q_l}{GF} + \frac{M_{xF} M_{xl}}{EJ_x} + \frac{M_{yF} M_{yl}}{EJ_y} + \frac{M_{zF} M_{zl}}{EJ_k} \right) dz .$$

Для растяжения – сжатия используется первое слагаемое. В плоской раме имеем одновременное действие изгиба и растяжения-сжатия, и тогда используется первое, второе и четвертое слагаемое. Однако можно показать, что первое и второе слагаемое на порядок меньше четвертого и ими можно пренебречь. Тогда при изгибе прямолинейных элементов формула Мора будет выглядеть так

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{xl} \cdot M_{xF}}{E \cdot J_{xi}} \cdot dz . \quad (3.1)$$

Здесь знак суммы означает, что интеграл берется по силовому участку, а в случае нескольких участков результаты нужно суммировать.

В случае пространственной системы может возникнуть ситуация когда все шесть силовых факторов отличны от нуля. Но и в этом случае можно показать, что достаточно учесть только изгибающие и крутящие моменты. Очевидно, интеграл Мора будет выглядеть так

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \left( \frac{M_{xF} M_{xl}}{EJ_x} + \frac{M_{yF} M_{yl}}{EJ_y} + \frac{M_{zF} M_{zl}}{EJ_k} \right) dz . \quad (3.2)$$

Во многих случаях бывает удобно вычислять эти интегралы графоаналитическим способом. Этот способ имеет большую историю и в современной литературе известен как способ Верещагина. Для правильного его использования полезно проследить вывод формулы Верещагина

Допустим, что требуется вычислить интеграл от произведения двух функций, из которых одна обязательно должна быть линейной, т.е. зависящей от аргумента в первой степени.

$$I = \int f_1(z) \cdot (kz + b) dz = k \int f_1(z) \cdot z dz + b \int f_1(z) dz .$$

Графически это можно представить следующим образом

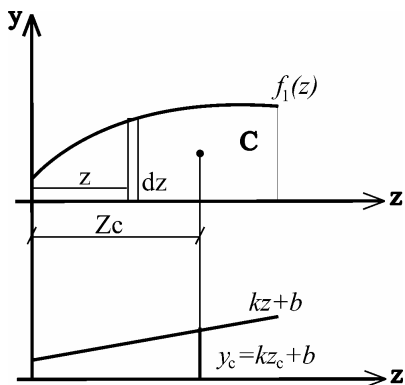


Рисунок 4

Первый интеграл с коэффициентом  $k$  означает статический момент площади ограниченной графиком  $f_1(z)$ , т.к.  $f_1(z)dz$  – элементарный прямоугольник, а  $z$  плечо относительно оси  $y$ . Второй интеграл при коэффициенте  $b$  означает саму площадь, ограниченную графиком  $f_1(z)$ . Обозначим эту площадь  $\omega$  и перепишем интегралы в виде

$$I = kS_y + b\omega .$$

Как известно статический момент можно представить в виде произведения площади на координату центра тяжести и интеграл представит в виде

$$I = k\omega \cdot z_c + b\omega = \omega(kz_c + b) = \omega \cdot y_c .$$

Но  $kz_c + b$  – суть ордината линейной функции, определяемая абсциссой центра тяжести площади  $\omega$ .

Итак, перемещение может быть вычислено по формуле

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\omega \cdot y_c}{EJ_x}. \quad (3.3)$$

Таким образом, для вычисления перемещения по правилу Верещагина требуется произвести следующие действия.

1. Построить эпюры внутренних усилий от заданных сил  $M_F$ , что даст очертание площади  $\omega$ .

2. Освобождаем систему от заданной нагрузки и прикладываем к ней единичную нагрузку в том направлении, в котором необходимо найти перемещение. Если определяется линейное перемещение, то единичная нагрузка представляет собой сосредоточенную силу, равную единице. Если определяется угловое перемещение, то единичная сила представляет собой момент, равный единице. Построить эпюру  $M_1$ .

3. Перемножить эпюры от внешней нагрузки и от единичной силы по выражению (3.3).

Произведение  $\omega \cdot y_c$  берется со знаком «плюс», если эпюры  $\omega$  и  $y_c$  расположены по одну сторону от оси эпюры, и со знаком «минус», если они расположены по разные стороны от оси.

Если на рассматриваемом участке стержня обе эпюры  $M_F$  и  $M_1$  прямолинейные, то безразлично, на какой эпюре брать площадь, а на какой – ординату.

Правило Верещагина неприменимо для кривого бруса, а также в случае, когда поперечное сечение бруса переменное. При ступенчато-переменном сечении правило Верещагина применимо.

Число участков определяется условиями нагружения.

Если обе эпюры представляют трапеции, то в этом случае целесообразно использовать формулу для перемножения трапеций (рисунок 5).

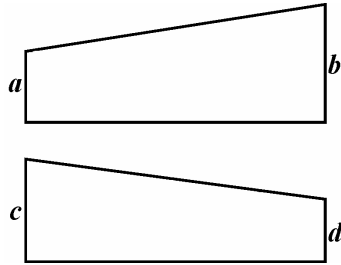


Рисунок 5

$$\delta = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l}{6} (2ac + 2bd + ad + cb).$$

Если одна из эпюр состоит из двух треугольников разных знаков, то добавляют два равновеликих треугольника противоположных знаков CBK и ADK, что не влияет на результат вычислений (рисунок 6).

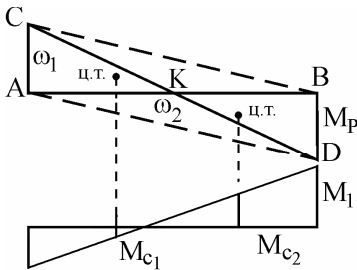


Рисунок 6

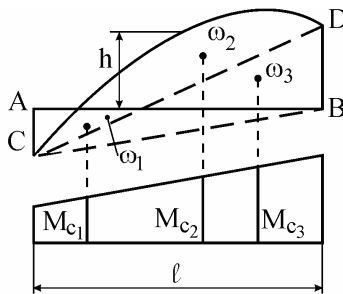


Рисунок 7

Грузовую параболическую эпюру можно заменить двумя треугольниками ABC и CBD и параболической эпюрой, площадь которой  $\omega_2 = \frac{2}{3}lh$ , где  $h$  – средняя ордината эпюры. Если найденное перемещение оказалось отрицательным, то это означает, что перемещение направлено против действия единичной нагрузки.

В тех случаях, когда грузовая эпюра имеет сложное очертание, с целью облегчения вычислений при перемножении эпюр целесообразно ее расслоить, т.е. вместо полной эпюры построить отдельные эпюры

изгибающих моментов от каждой нагрузки. Эти эпюры имеют вид прямоугольников, прямолинейных и параболических треугольников, для которых значения площадей и центров тяжести известны.

Другой способ перемножения криволинейных эпюр представлен в приложении А.

Рассмотрим применение способа Верещагина на примерах.

### Пример 2

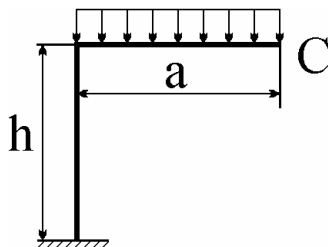


Рисунок 8

Для рамы определить горизонтальное, вертикальное перемещение и угол поворота сечения  $C$ . Жесткость поперечного сечения ( $EJ_x$ ) постоянна для всех участков.

Для определения перемещений строим эпюры изгибающих моментов  $M_F$  от заданной нагрузки (рисунок 9), от единичной горизонтальной силы  $M_1$ , от единичной вертикальной силы  $M_2$  и от единичного момента  $M_3$  (рисунок 10).

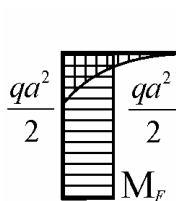


Рисунок 9

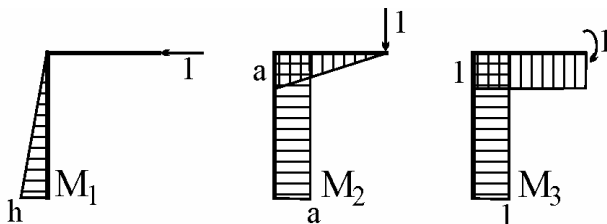


Рисунок 10

Для определения горизонтального перемещения сечения  $C$  перемножаем эпюры  $M_F$  и  $M_1$ . Удобнее взять площадь ( $\omega$ ) на эпюре  $M_1$ , а ординату  $y_c$  на эпюре  $M_F$ .

$$\Delta_c^{op} = -\frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot h \cdot \frac{q \cdot a^2}{2} = -\frac{q \cdot a^2 \cdot h^2}{4 \cdot E \cdot J_x}.$$

Знак «минус» показывает, что перемещение произойдет не влево (как приложена единичная сила), а вправо.

Для определения вертикального перемещения сечения  $C$  перемножаем эпюры  $M_F$  и  $M_2$ . При перемножении эпюр на ригеле площадь ( $\omega$ ) берем на эпюре  $M_F$  (т.к. она криволинейна), а ординату под центром тяжести ( $y_c$ ) на эпюре  $M_2$ . При перемножении эпюр на стойке безразлично, где брать площадь или ординату.

$$\Delta_c^{ep} = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{q \cdot a^2}{2} \cdot a \cdot \frac{3}{4} \cdot a + \frac{q \cdot a^2}{2} \cdot h \cdot a \right) = \frac{1}{E \cdot J_x} \left( \frac{q \cdot a^4}{8} + \frac{q \cdot a^3 \cdot h}{2} \right).$$

Знак «плюс» говорит о том, что сечение  $C$  переместится вертикально вниз (по направлению приложенной единичной силы).

Для определения угла поворота сечения  $C$  перемножаем эпюры  $M_F$  и  $M_3$ . Берем площадь на эпюре  $M_F$  и ординату на эпюре  $M_3$ .

$$\varphi_c = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{q \cdot a^2}{2} \cdot a \cdot 1 + \frac{q \cdot a^2}{2} \cdot h \cdot 1 \right) = \frac{1}{E \cdot J_x} \left( \frac{q \cdot a^3}{6} + \frac{q \cdot a^2 \cdot h}{2} \right).$$

Знак «плюс» говорит о том, что сечение  $C$  поворачивается по ходу часовой стрелки, т.е. в направлении приложенного единичного момента.



### Пример 3

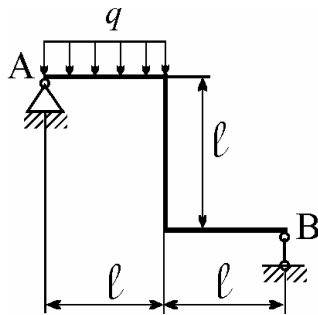


Рисунок 11

Для заданной рамы (рисунок 11) определить горизонтальное перемещение сечения  $B$  и угловое перемещение сечения  $A$ .

Строим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки и от единичных нагрузок. Для построения эпюр необходимо знание опорных реакций. Поэтому для каждого режима нагружения необходимо их определение.

Для режима нагружения заданной внешней нагрузкой

$$\sum M_A = -\frac{q \cdot l^2}{2} + R_B \cdot 2 \cdot l = 0; \quad R_B = \frac{q \cdot l}{4};$$

$$\sum M_B = q \cdot l \cdot \frac{3}{2} \cdot l - R_B \cdot 2 \cdot l = 0; \quad R_A = \frac{3 \cdot q \cdot l}{4}.$$

На верхнем ригеле расслоим эпюру (построим ее отдельно от  $R_A$  и равномерно распределенной нагрузки) (рисунок 12).

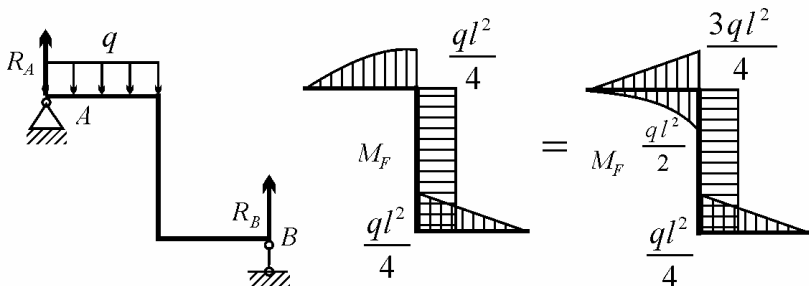


Рисунок 12

Для режима нагружения единичной горизонтальной силой в точке В (рисунок 13).

$$\begin{aligned} \sum X = H_A - 1 &= 0; & H_A &= 1; \\ \sum M_A = R_B \cdot 2 \cdot l - 1 \cdot l &= 0; & R_B &= 0,5; \\ \sum Y = R_A + R_B &= 0; & R_A &= -0,5. \end{aligned}$$

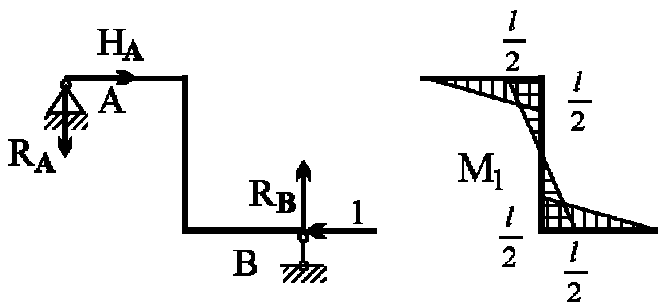


Рисунок 13.

Перемножая единичную эпюру  $M_1$  (рисунок 13) и грузовую  $M_F$  (рисунок 12), получим горизонтальное перемещение точки В.

$$\Delta_{\varphi}^{exp} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{q \cdot l^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot q \cdot l^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot l \cdot \frac{q \cdot l^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot l \cdot \frac{q \cdot l^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{q \cdot l^2}{4} \right) =$$

$$= -\frac{q \cdot l^4}{48 E \cdot J_x}.$$

Для режима нагружения единичным моментом в точке А (рисунок 14).

$$\begin{aligned} \sum M_A &= -1 + R_B \cdot 2 \cdot l = 0; & R_B &= \frac{1}{2l}; \\ \sum Y &= -R_A + R_B = 0; & R_A &= \frac{1}{2l}; \\ \sum X &= H_A = 0; & H_A &= 0. \end{aligned}$$

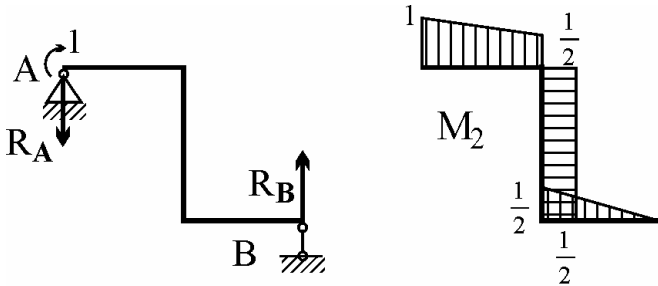


Рисунок 14

Угол поворота сечения А будет равен

$$\varphi_A = \frac{1}{E \cdot J} \left[ \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot q l^2 \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{q l^2}{2} \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{q l^2}{4} \cdot l \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{q l^2}{4} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right] = \frac{15 q l^3}{48 E J_x}.$$

#### Пример 4

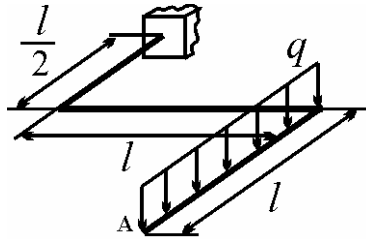


Рисунок 15

Определить вертикальное перемещение точки А (рисунок 15) заданного ломаного бруса. Поперечное сечение представляет собой прямоугольное сечение размером  $b$  на  $h$ .

1. Построим эпюры изгибающих и крутящих моментов  $M_F$  от заданной нагрузки (рисунок 16).

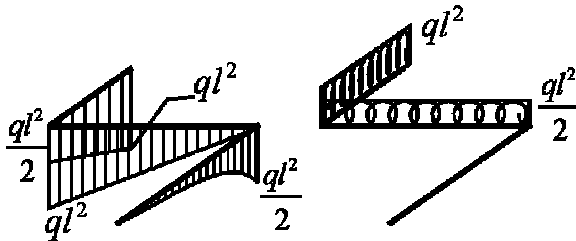


Рисунок 16

2. Освобождаем систему от внешних усилий, прикладываем в точке А вертикальную единичную силу  $F$ . Строим эпюры изгибающих и крутящих моментов от данной силы (рисунок 17).

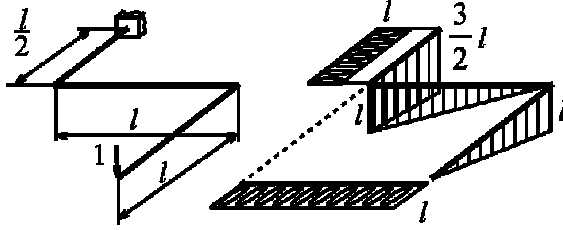


Рисунок 17

Так как в формулу (3.2) для определения перемещений входят моменты инерции, то целесообразно для каждого слагаемого написать их выражения.

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12}; \quad J_k = \beta hb^3,$$

где  $\beta$  – коэффициент, зависящий от соотношения  $h$  и  $b$ .

3. Определяем перемещение, перемножая эпюры  $M_F$  и  $M_1$  по формуле Верещагина (3.3).

$$\begin{aligned} \Delta_A = \frac{1}{EJ_x} & \left[ \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} l \frac{3}{4} l + \frac{ql^2}{2} \frac{1}{2} l \frac{2}{3} l + \frac{l}{2 \cdot 6} \left( 2 \frac{ql^2}{2} l + 2ql^2 \frac{2}{3} l + \frac{ql^2}{2} \frac{2}{3} l + ql^2 l \right) \right] + \\ & + \frac{1}{GJ_k} \left[ \frac{ql^2}{2} l \cdot l + ql^2 \frac{l}{2} \cdot l \right] = \frac{55ql^4}{48EJ_x} + \frac{ql^4}{GJ_k}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ ,  $J_k = \frac{12\beta}{k^2} J_x$ ,

где  $k = \frac{h}{b}$ , получим

$$\Delta_A = \frac{ql^4}{EJ_x} \left[ \frac{55}{48} + \frac{k^2(1+\mu)}{6\beta} \right].$$

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПЛОСКИХ КРИВЫХ СТЕРЖНЯХ БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ

В стержнях большой кривизны все эпюры, как от заданных нагрузок, так и от единичных нагрузок нелинейны, поэтому правило Верещагина неприменимо.

В этом случае перемещения определяются путем аналитического вычисления интеграла Мора.

$$\Delta = \sum \int \frac{M_{F\varphi} M_{1\varphi} ds}{EJ}.$$

Для определения искомых перемещений в кривом брусе следует.

1. Найти опорные реакции при действии заданной нагрузки.
2. Составить уравнения изгибающего момента на участках бруса от заданной нагрузки ( $M_{F\varphi}$ ).
3. По направлению искомого перемещения приложить в заданном сечении единичную нагрузку (единичную силу, или единичный момент).
4. Найти опорные реакции при нагружения единичными нагрузками.
5. Составить уравнения изгибающего момента на участках бруса от единичных нагрузок ( $M_{1\varphi}$ ,  $M_2$  и т.д.);
6. По формуле Мора найти перемещения.

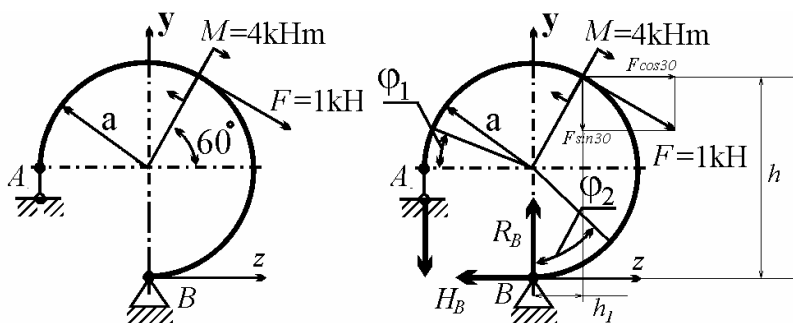


Рисунок 18

### Пример 5

Определить горизонтальное перемещение и угол поворота сечения А (рисунок 18) бруса большой кривизны,  $a=2\text{ м}$ .

Определяем опорные реакции от заданной нагрузки.

$$\sum M_B = -R_A a + M + Fh \cos(30) + Fh_1 \sin(30) = 0,$$

где  $h = a + a \sin(60) = 3,73 \text{ м}$ ;  $h_1 = a \cos(60) = 1 \text{ м}$ ;

$$R_A = \frac{M + Fh \cos(30) + Fh_1 \sin(30)}{a} = \frac{4 + 3,73 \cdot 0,866 + 1 \cdot 1 \cdot 0,5}{2} = 3,865 \text{ кН};$$

$$\sum X = -H_B + F \cos 30 = 0;$$

$$H_B = F \cos 30 = 0,866 \text{ кН};$$

$$\sum Y = R_B - R_A - F \sin 30 = 0;$$

$$R_B = R_A + F \sin 30 = 4,365 \text{ кН}.$$

Проверка

$$\sum M_A = -M - F \cos(30)(h - a) - F \sin(30)(a + h_1) + R_B a \equiv 0$$

Выражение изгибающего момента от заданной нагрузки в произвольном сечении первого участка кривого бруса имеет вид:

$$M_{F\varphi_1} = -R_A(a - a \cos \varphi_1) = -3,865a(1 - \cos \varphi_1);$$

$$0 \leq \varphi_1 \leq 120,$$

на втором участке

$$M_{F\varphi_2} = R_B a \sin \varphi_2 + H_B(a - a \cos \varphi_2) = 8,73 \sin \varphi_2 - 1,732 \cos \varphi_2 + 1,732$$

$$0 \leq \varphi_2 \leq 150.$$

Для определения горизонтального перемещения приложим в сечении А (рисунок 19) горизонтально направленную единичную силу.

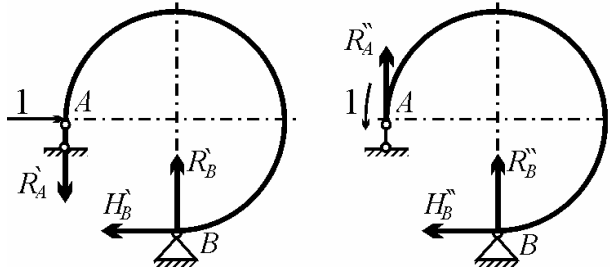


Рисунок 19

Выражение изгибающего момента имеет вид:

– для первого участка

$$M_{1\varphi_1} = 1a \sin \varphi_1 + R'_A (a - a \cos \varphi_1) = 2(\sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 + 1) ;$$

– для второго участка

$$M_{1\varphi_2} = R'_B a \sin \varphi_2 + H'_B (a - a \cos \varphi_2) = 2(\sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 + 1) ,$$

где  $R'_A = R'_B = 1$ ,  $H'_B = 1$  – опорные реакции.

По формуле Мора вычислим горизонтальное перемещение.

$$\Delta_A^{zop} = \frac{1}{EJ} \left[ \int_0^{\frac{2}{3}\pi} M_{F\varphi_1} M_{1\varphi_1} a d\varphi_1 + \int_0^{\frac{5}{6}\pi} M_{F\varphi_2} M_{1\varphi_2} a d\varphi_2 \right] .$$

Получаем 
$$\Delta_A^{zop} = \frac{216,8}{EJ} .$$

Определяем угол поворота сечения А. Следуя общей методике определения перемещений по формуле Мора, приложим в сечении А единичный момент (рисунок 19). Составим выражение изгибающего момента:

– для первого участка

$$M_{2\varphi_1} = 1 - R''_A (a - a \cos \varphi_1) = 1 - 0,5 \cdot 2(1 - \cos \varphi_1) = \cos \varphi_1 ;$$



– для второго участка

$$M_{2\varphi_2} = -R''_B a \sin \varphi_2 = -0,5 \cdot 2 \sin \varphi_2 = -\sin \varphi_2,$$

где  $R''_A = R''_B = \frac{1}{a} = 0,5$ ,  $H''_B = 0$  – опорные реакции.

Применив формулу Мора, получим

$$\varphi_A = \frac{1}{EJ} \left[ \int_0^{\frac{2}{3}\pi} M_{F\varphi_1} M_{2\varphi_1} a d\varphi_1 + \int_0^{\frac{5}{6}\pi} M_{F\varphi_2} M_{2\varphi_2} a d\varphi_2 \right].$$

$$\text{Отсюда } \varphi = -\frac{32,14}{EJ}.$$

Знак «минус» показывает, что сечение поворачивается не по направлению единичного момента, а в противоположную сторону.

Обычно подынтегральные функции выражаются через тригонометрические функции в различных комбинациях. Так как эти комбинации довольно типичны, представляется целесообразным дать сводку наиболее часто встречающихся при решении подобных задач интегралов (таблица 2).

Таблица 2

N	$F(\varphi)$	$\int F(\varphi)$
1	$\sin \varphi$	$1 - \cos \varphi$
2	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$
3	$\sin^2 \varphi$	$\frac{1}{2} \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right)$
4	$\cos^2 \varphi$	$\frac{1}{2} \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right)$
5	$\sin \varphi \cdot \cos \varphi$	$\frac{1}{2} \sin^2 \varphi$
6	$1 - \cos \varphi$	$\varphi \cdot \sin \varphi$
7	$(1 - \cos \varphi)^2$	$\frac{2}{3} \varphi - 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi$
8	$(1 - \cos \varphi) \sin \varphi$	$1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi$
9	$(1 - \cos \varphi) \cos \varphi$	$\sin \varphi - \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi$

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Формула Симпсона для вычисления значений интеграла вида

$$\Delta = \int_s a(s) \cdot b(s) \, ds ,$$

(если  $a(s)$  и  $b(s)$  не выше второго порядка)

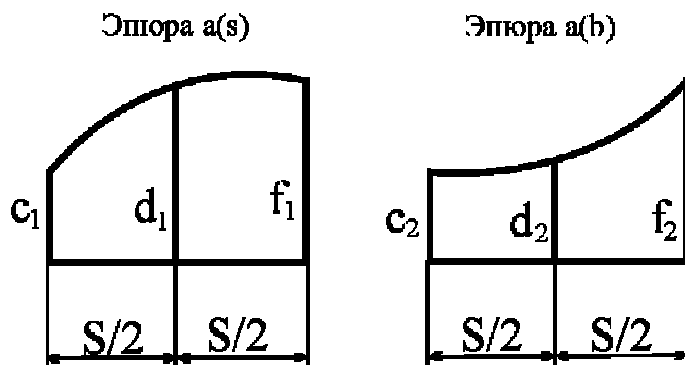


Рисунок 20

$$\Delta = \frac{S}{6EJ} (c_1 \cdot c_2 + 4 \cdot d_1 \cdot d_2 + f_1 \cdot f_2) .$$

## ЛИТЕРАТУРА

Сопротивление материалов / под ред. Писаренко Г.С. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев: Вища шк., 1986. – 775 с.

Федосьев В.И. Сопротивление материалов – М.: Наука, 1974. – 560 с.

Виктор Владиславович Черканов,  
Анатолий Владимирович Данилов,  
Дмитрий Павлович Вольных

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

*Домашнее расчётно-проектировочное задание  
и методические указания к выполнению расчётно-проектировочной  
работы для студентов машиностроительных специальностей*

Издано в авторской редакции

Подписано в печать 12.12.05. Формат 60х84 1/16.

Печать-ризография. Усл.п.л. 2,56.

Тираж 200 экз. Заказ 2005 -

Издательство Алтайского технического  
университета им. И.И. Ползунова,  
656038, г. Барнаул, пр-т Ленина, 46

Лицензия на издательскую деятельность  
ЛР № 020822 от 21.09.98 г.

Отпечатано в типографии АлтГТУ  
Лицензия на полиграфическую деятельность  
ПЛД № 28-35 от 15.07.97 г.