МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
„МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ“

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

II семестр

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Для студентов очного обучения
факультетов Электроники, ИТ, РТС

МОСКВА 2014

Составители: И.М.Аксененкова, В.П.Барашев, Е.Н.Гущина,
О.А.Евсеева, Т.Р.Игонина, О.А.Малыгина,
Т.А.Морозова, О.Р.Параскевопуло, Е.В.Пронина,
А.В.Татаринцев, Н.С.Чекалкин

Редактор Н.С.Чекалкин

Контрольные задания являются типовыми расчетами по математическому анализу, предназначенными для студентов I курса дневного отделения. Типовые расчеты выполняются студентами в письменном виде и сдаются преподавателю до начала зачетной сессии. Вопросы к зачетам и экзаменам могут быть уточнены и дополнены лектором. В приложении, написанном Т.Р.Игониной и О.А.Малыгиной, излагается краткая теория по интегральному исчислению, а также по теории поля

Печатаются по решению редакционно-издательского совета университета.

Рецензенты: Т.Н.Бобылева,
Д.Л.Кудрявцев

Контрольные задания напечатаны в авторской редакции
Подписано в печать 00.00.2014. Формат 60 x 84 1/16.
Усл. печ. л. 00,00. Усл.кр.-отт. 00,00. Уч.изд.л. 00,00.
Тираж 100 экз. С 00

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
„Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики (технический университет)“
119454, Москва, пр.Вернадского, 78

ВВЕДЕНИЕ

Основные темы по курсу математического анализа II семестра (дневное отделение)

1. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования (замена переменной, интегрирование по частям). Интегрирование дробно-рациональных функций, тригонометрических выражений и выражений, содержащих иррациональности.

2. Определенный интеграл, основные свойства. Теорема Ньютона - Лейбница. Приложения определенного интеграла (вычисление площадей плоских фигур, длины дуги кривой, объема тела вращения и площади поверхности вращения).

3. Несобственные интегралы (от функций на бесконечном интервале и от неограниченных функций). Признаки сходимости.

4. Двойной интеграл, основные свойства. Сведение к повторному интегрированию. Вычисление в полярных координатах. Приложения двойного интеграла к геометрии и механике.

5. Тройной интеграл, основные свойства. Сведение к повторному интегрированию. Вычисление в цилиндрических и сферических координатах. Приложения тройного интеграла к геометрии и механике.

6. Криволинейные интегралы (по длине дуги и по координатам), основные свойства и вычисление. Формула Грина.

7. Поверхностные интегралы, их вычисление.

8. Скалярное поле. Производная по направлению, градиент. Свойства градиента, вычисление.

9. Векторное поле. Дивергенция и ротор векторного поля, основные свойства.

10. Поток векторного поля, вычисление потока непосредственно и по теореме Остроградского - Гаусса.

11. Циркуляция векторного поля, вычисление циркуляции непосредственно и по теореме Стокса.

Данный материал излагается студентам на лекциях и практических занятиях. От студента требуется успешное овладение материалом по указанным темам, т.е. необходимо знать определения понятий, формулировки и доказательства основных теорем курса. Студент также должен продемонстрировать умение решать задачи данного курса.

В течение семестра по курсу математического анализа проводятся *две контрольные работы и выполняется типовой расчет.* Контрольная работа №1 проводится примерно на 6-й неделе обучения, контрольная работа №2 проводится примерно на 13-й неделе, а сдача типового расчета — в конце семестра.

Контрольная работа №1

Тема. „Методы интегрирования. Определенный интеграл и его приложения".

Цель. Проверить усвоение основных приемов интегрирования; проверить умения вычислять определенный интеграл и с помощью определенного интеграла находить площади плоских фигур, длины дуг и т.д.

Содержание. В контрольную работу входят задачи, идентичные задачам части 1 данного пособия (т.е. задачи №1.1, 1.2, 1.3).

Контрольная работа №2

Тема. „Несобственные интегралы. Двойной и тройной интегралы, их приложения".

Цель. Проверить усвоение основных приемов исследования несобственных интегралов на сходимость и их вычисления; проверить умение вычислять двойные и тройные интегралы и решать геометрические задачи с помощью этих интегралов.

Содержание. В контрольную работу №2 входят задачи, идентичные задачам из части 2 данного пособия (т.е. №2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5).

Типовой расчет

Тема. „Криволинейный и поверхностный интегралы. Теория поля“.

Цель. Проверить умение вычислять криволинейные интегралы по координатам непосредственно и по формуле Грина, вычислять поверхностные интегралы, оперировать основными понятиями теории поля, вычислять поток и циркуляцию векторного поля.

Содержание. В типовой расчет входят задачи из части 3 (№ 3.1, 3.2, 3.3, 3.4).

Типовой расчет выполняется каждым студентом в отдельной тетради в соответствии с назначенным ему номером варианта. Студент объясняет решения задач преподавателю, отвечает на вопросы. Типовой расчет также предъявляется в начале экзамена (зачета).

По итогам обучения проводится экзамен (зачет). Примерный вариант экзаменационного билета: билет состоит из 3-х частей. Первая часть соответствует содержанию контрольной работы №1, вторая часть охватывает материал контрольной работы №2, третья — задачи типового расчета.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ (ЗАЧЕТУ)

1. Определение первообразной, теорема о множестве первообразных.

2. Неопределенный интеграл. Основные свойства (линейность, интеграл от производной функции).

3. Неопределенный интеграл. Замена переменной в интеграле.

4. Неопределенный интеграл. Интегрирование по частям.

5. Общая схема интегрирования рациональных функций.
6. Интегрирование простейших дробей.
7. Интегрирование тригонометрических функций.
8. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.
9. Интегрирование квадратичных иррациональностей. Тригонометрические подстановки.
10. Определенный интеграл: определение, геометрический и механический смысл. Интегрирование кусочно-непрерывной функции.
11. Определенный интеграл: определение, свойства линейности и аддитивности, интегрирование неравенств.
12. Определенный интеграл: определение, теорема о среднем, ее геометрический смысл.
13. Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.
14. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Примеры.
15. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных и полярных координатах с помощью определенного интеграла.
16. Определение длины кривой. Вычисление длины кусочно-гладкой кривой.
17. Вычисление объема тела по площадям его плоских сечений. Объем тела вращения.
18. Вычисление площади поверхности вращения.
19. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Примеры сходящихся и расходящихся интегралов.

20. Несобственные интегралы от функции на бесконечном интервале. Примеры сходящихся и расходящихся интегралов.

21. Несобственные интегралы: признаки сходимости.

22. Определение двойного интеграла и его геометрический смысл.

23. Свойства линейности и аддитивности двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному.

24. Двойной интеграл: интегрирование неравенств, оценка интеграла, теорема о среднем.

25. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.

26. Геометрические и механические приложения двойного интеграла.

27. Определение тройного интеграла. Сведение тройного интеграла к повторному.

28. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических координатах. Пример вычисления.

29. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в сферических координатах. Вычисление площади сферы.

30. Определение криволинейного интеграла по длине дуги, его геометрический и механический смысл, вычисление.

31. Определение, основные свойства криволинейного интеграла по координатам и его вычисление.

32. Работа силового поля. Физический смысл криволинейного интеграла по координатам.

33. Теорема Грина.

34. Условие независимости криволинейного интеграла по координатам от выбора пути интегрирования (на плоскости).

35. Вычисление площади гладкой поверхности.

36. Определение интеграла первого типа по поверхности. Основные свойства и его вычисление.

37. Определение и свойства интегралов второго типа по поверхности, вычисление.

38. Производная по направлению и градиент скалярного поля. Геометрический смысл градиента, его свойства.

39. Дивергенция векторного поля. Основные свойства и ее вычисление.

40. Ротор векторного поля. Основные свойства и его вычисление.

41. Задача о вычислении количества жидкости, протекающей за единицу времени через данную поверхность.

42. Поток векторного поля и его вычисление.

43. Теорема Гаусса-Остроградского.

44. Циркуляция векторного поля и ее вычисление.

45. Теорема Стокса. Формула Грина как частный случай теоремы Стокса.

46. Условие независимости криволинейного интеграла по координатам от выбора пути интегрирования в пространстве.

47. Определение и основные свойства потенциального и соленоидального полей.

Рекомендуемая литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.- СПб.: 1997.

2. Высшая математика Т.2./ Краснов М.Л. и др.- М.: 2004.

3. Высшая математика Т.4./ Краснов М.Л. и др.- М.: 2004.

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике.- М.: Айрис Пресс, 2004.

Основные типы задач по темам „Методы интегрирования“ и „Определенный интеграл и его приложения“

Задачи этой части составляют основу контрольной работы №1. Для успешной сдачи контрольной работы рекомендуется прорешать все задачи этой части.

Задача 1.1. Вычислить неопределенный интеграл. *Указание*: использовать метод замены переменной.

1	$\displaystyle\int \frac{\arccos^3 x - 5x + 1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
2	$\displaystyle\int \left(\frac{x-5}{x^2-10x+7} + \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}\right) dx$
3	$\displaystyle\int \left(\cos\left(e^x\right) + \sqrt{e^x+2}\right) e^x dx$
4	$\displaystyle\int \left(\frac{\sin\sqrt{x} + 3x^2}{5\sqrt{x}} + \frac{2x+3}{x^2+3x-1}\right) dx$
5	$\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg} x} - 2}{\cos^2 x}\,dx$
6	$\displaystyle\int \left(\frac{\cos x}{1+3\sin x} + \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\right) dx$
7	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{arcctg} x} + x - 7}{1+x^2}\,dx$
8	$\displaystyle\int \left(\frac{1}{(5x+2)^2+1} + \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^3 x}\right) dx$

9	$\displaystyle\int \frac{2^{1/x}+\sin(1/x)+3}{x^2}\,dx$
10	$\displaystyle\int \left(\frac{x^3}{\sqrt{2x^4+5}}+\frac{\ln(\operatorname{tg} x+2)}{\cos^2 x}\right)dx$
11	$\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+2e^x+2}$
12	$\displaystyle\int \left(\ln(\cos x+1)\sin x+\frac{2}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}\right)dx$
13	$\displaystyle\int \left(3^{\sin x}+\sqrt[3]{\sin x+1}+2\right)\cos x\,dx$
14	$\displaystyle\int \frac{e^{1/x}+\sqrt[8]{x}+1}{x^2}\,dx$
15	$\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{4\sin^2 x-1}$
16	$\displaystyle\int \frac{e^{x^2-1}}{e^{x^2}-1}\,x\,dx$
17	$\displaystyle\int \left(e^{\cos x}-2\cos^3 x+3\right)\sin x\,dx$
18	$\displaystyle\int \left(\sqrt{\frac{1+2\sqrt{x}}{x}}+x^3\cos\left(x^4\right)\right)dx$
19	$\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)+\sqrt[7]{8x}+2^{\ln x}}{2x}\,dx$
20	$\displaystyle\int \frac{x+\arcsin^3 x+5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
21	$\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{2\operatorname{tg} x+5}+3^{\operatorname{tg} x}+1}{\cos^2 x}\,dx$

22	$\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg} 5x - 1}{\cos^2 5x}\, dx$
23	$\displaystyle\int x\left(3^{-x^2} + \cos\left(10x^2 + 2\right) + \sqrt[5]{x}\right) dx$
24	$\displaystyle\int \left(e^{\sin^2 x} + \cos 2x + 1\right) \sin 2x\, dx$
25	$\displaystyle\int \left(\frac{e^{x+2}}{\sqrt{e^{2x+4}}} + \operatorname{tg} 5x + 2\right) dx$
26	$\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x + 1) + \ln x + \sqrt[5]{4x}}{x}\, dx$
27	$\displaystyle\int \left(\frac{1}{(\arccos x + 1)\sqrt{1 - x^2}} + e^{5+\sin^2 x} \sin 4x\right) dx$
28	$\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 3x} + 48x + 1}{1 + 9x^2}\, dx$
29	$\displaystyle\int \left(\frac{\ln(\arccos x + 1) + 3}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt[4]{(2 + 3x^2)^3}}\right) dx$
30	$\displaystyle\int \left(\frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{9 - \operatorname{arctg}^2 x}} + \frac{3x - 4}{1 + x^2}\right) dx$
31	$\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{4 - \arcsin^2 x}} + \frac{5x + 6}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx$
32	$\displaystyle\int \left(\frac{\ln^3 x - 2}{x\sqrt{\ln x}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}(1 + \arcsin x)}\right) dx$

Задача 1.2. Вычислить неопределенный интеграл. *Указание*: использовать метод интегрирования по частям.

1	$\int x^2e^{-2x}dx$	2	$\int x \operatorname{arctg} 2x\,dx$
3	$\int e^{5x}\sin 3x\,dx$	4	$\int \left(5-x^2\right)\cos x\,dx$
5	$\int \dfrac{2x\,dx}{\sin^2 x}$	6	$\int e^{2x}\sin^2 x\,dx$
7	$\int \left(7-x^2\right)\sin x\,dx$	8	$\int \left(2x^2+x-3\right)\sin x\,dx$
9	$\int \ln\left(x^2+1\right)\,dx$	10	$\int \arcsin 5x\,dx$
11	$\int \sin(\ln x)\,dx$	12	$\int \dfrac{\ln\left(\sin^2 x\right)dx}{\cos^2 x}$
13	$\int (x+2)^2\cos 2x\,dx$	14	$\int \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
15	$\int \sin x\ln\cos x\,dx$	16	$\int \dfrac{\ln \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$
17	$\int e^{2x}\left(\ln e^{2x}+1\right)dx$	18	$\int \dfrac{\ln\sin x}{\cos^2 x}\,dx$
19	$\int \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$	20	$\int \left(5x^2-8x+2\right)e^{-x}\,dx$
21	$\int \dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}\,dx$	22	$\int \arcsin^2 x\,dx$
23	$\int \left(x^2+5\right)\ln 2x\,dx$	24	$\int \left(\dfrac{2}{\sin^2 x}+x\ln x\right)x\,dx$
25	$\int x\arcsin(2x)\,dx$	26	$\int \dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{x^3}\,dx$
27	$\int (x+3)\operatorname{arctg} 3x\,dx$	28	$\int \dfrac{\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}{\sqrt[3]{e^x}}\,dx$

29	$\displaystyle\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin^2 x}\,dx$	30	$\displaystyle\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx$
31	$\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\ln^2 x\,dx$	32	$\displaystyle\int \left(x^2-2x+3\right)5^x\,dx$

Задача 1.3. *Указание:* использовать приемы интегрирования дробно-рациональных функций.

1	$\displaystyle\int \frac{x^2-3x+6}{x^2-4x-12}\,dx$	2	$\displaystyle\int \frac{x^2-x-4}{x^2-2x-8}\,dx$
3	$\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{x^2+x-20}\,dx$	4	$\displaystyle\int \frac{x^2+6}{x^2-x-6}\,dx$
5	$\displaystyle\int \frac{x^2-x+4}{x^2-2x-15}\,dx$	6	$\displaystyle\int \frac{x^2+9x-6}{x^2+4x-12}\,dx$
7	$\displaystyle\int \frac{x^2+4x-27}{x^2-x-20}\,dx$	8	$\displaystyle\int \frac{x^2+6x-6}{x^2+x-6}\,dx$
9	$\displaystyle\int \frac{x^2+7x-6}{x^2+2x-8}\,dx$	10	$\displaystyle\int \frac{x^2+7x-14}{x^2+2x-15}\,dx$
11	$\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+16}{2x^2+x-3}\,dx$	12	$\displaystyle\int \frac{x^2+7x+15}{x^2+5x+6}\,dx$
13	$\displaystyle\int \frac{x^2+3x+6}{x^2+2x-3}\,dx$	14	$\displaystyle\int \frac{x^2+x+15}{x^2-x-12}\,dx$
15	$\displaystyle\int \frac{2x^2+15x+43}{2x^2+11x+12}\,dx$	16	$\displaystyle\int \frac{x^2+12x-4}{x^2+x-2}\,dx$
17	$\displaystyle\int \frac{x^2-7x+21}{x^2-5x+4}\,dx$	18	$\displaystyle\int \frac{x^2-7x+15}{x^2-5x+6}\,dx$
19	$\displaystyle\int \frac{2x^2+3x+21}{2x^2-x-6}\,dx$	20	$\displaystyle\int \frac{x^2-x-21}{x^2-2x-8}\,dx$
21	$\displaystyle\int \frac{x^2-3x-4}{x^2-4x+3}\,dx$	22	$\displaystyle\int \frac{x^2+6x-2}{x^2+3x-10}\,dx$

23	$\int \frac{x^2-7x+14}{x^2-8x+15}\,dx$	24	$\int \frac{x^2+9x+30}{x^2+8x+12}\,dx$
25	$\int \frac{x^2-4x+44}{x^2-9x+20}\,dx$	26	$\int \frac{x^2+11x+14}{x^2+6x+8}\,dx$
27	$\int \frac{x^2-8x+13}{x^2-7x+12}\,dx$	28	$\int \frac{x^2+13x+21}{x^2+5x+4}\,dx$
29	$\int \frac{x^2-6x-25}{x^2-5x-14}\,dx$	30	$\int \frac{x^2+x-18}{x^2-4x-5}\,dx$

Задача 1.4. *Указание:* использовать приемы интегрирования дробно-рациональных функций.

1	$\int \frac{x^2-x+6}{x^2-2x+2}\,dx$	2	$\int \frac{x^2+5x+18}{x^2+4x+13}\,dx$
3	$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+13}\,dx$	4	$\int \frac{x^2-5x+5}{x^2-6x+1}\,dx$
5	$\int \frac{x^2-x-1}{x^2-2x+5}\,dx$	6	$\int \frac{x^2+5x+11}{x^2+4x+8}\,dx$
7	$\int \frac{x^2-5x+17}{x^2-6x+18}\,dx$	8	$\int \frac{x^2-7x+27}{x^2-8x+25}\,dx$
9	$\int \frac{x^2-3x+8}{x^2-4x+5}\,dx$	10	$\int \frac{x^2+3x+4}{x^2+2x+10}\,dx$
11	$\int \frac{x^2+7x+5}{x^2+6x+10}\,dx$	12	$\int \frac{x^2-9x+23}{x^2-10x+26}\,dx$
13	$\int \frac{x^2+3x+6}{x^2+2x+2}\,dx$	14	$\int \frac{x^2+7x+17}{x^2+6x+18}\,dx$
15	$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+13}\,dx$	16	$\int \frac{x^2+11x+22}{x^2+10x+26}\,dx$
17	$\int \frac{x^2+9x+27}{x^2+8x+25}\,dx$	18	$\int \frac{x^2+5x+4}{x^2+4x+5}\,dx$

19	$\int \frac{x^2 - x + 13}{x^2 - 2x + 10}\,dx$	20	$\int \frac{x^2 - 5x + 8}{x^2 - 6x + 13}\,dx$
21	$\int \frac{x^2 - 7x + 15}{x^2 - 8x + 17}\,dx$	22	$\int \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 5}\,dx$
23	$\int \frac{x^2 - 7x + 15}{x^2 - 8x + 20}\,dx$	24	$\int \frac{x^2 - 9x + 31}{x^2 - 10x + 29}\,dx$
25	$\int \frac{x^2 + 9x + 15}{x^2 + 8x + 17}\,dx$	26	$\int \frac{x^2 + 11x + 33}{x^2 + 10x + 34}\,dx$
27	$\int \frac{x^2 + 9x + 25}{x^2 + 8x + 20}\,dx$	28	$\int \frac{x^2 + 11x + 27}{x^2 + 10x + 29}\,dx$
29	$\int \frac{x^2 - 9x + 35}{x^2 - 10x + 34}\,dx$	30	$\int \frac{x^2 + 7x + 17}{x^2 + 6x + 13}\,dx$

Задача 1.5. *Указание:* использовать приемы интегрирования тригонометрических выражений.

1	$\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$
2	$\int \frac{\sin x \cos x}{(3 + \cos x)^2}\,dx$
3	$\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x\,dx$
4	$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,dx$
5	$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$
6	$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,dx$
7	$\int \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin 11x\,dx$

8	$\displaystyle\int \frac{dx}{5-3\sin x+4\cos x}$
9	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^3 x}$
10	$\displaystyle\int \cos^9 x\cdot\sin^{10} x\,dx$
11	$\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx$
12	$\displaystyle\int \frac{\sin^7 x}{\cos^1 3x}\,dx$
13	$\displaystyle\int \sin^4 x\cdot\cos^6 x\,dx$
14	$\displaystyle\int \sin x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\,dx$
15	$\displaystyle\int \frac{2\,dx}{1+\sin x+2\cos x}$
16	$\displaystyle\int \frac{\sin^3 x+\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$
17	$\displaystyle\int \sin^5 x\cdot\cos^6 x\,dx$
18	$\displaystyle\int \frac{\sin^7 x\,dx}{\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos^2 x}}$
19	$\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^8 x}\,dx$
20	$\displaystyle\int \cos^6 x\cdot\sin^8 x\,dx$
21	$\displaystyle\int \cos x\cdot\cos 3x\cdot\cos 4x\,dx$

22	$\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x - 1}$
23	$\displaystyle\int \frac{\sin^4 x - 1}{\cos^3 x}\,dx$
24	$\displaystyle\int \cos^7 x \cdot \sin^4 x\,dx$
25	$\displaystyle\int \frac{\cos^{11} x\,dx}{\sin^2 x \cdot \sqrt[5]{\sin x}}$
26	$\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}}\,dx$
27	$\displaystyle\int \cos^4 x \cdot \sin^6 x\,dx$
28	$\displaystyle\int \sin 11x \cdot \cos 5x \cdot \cos 3x\,dx$
29	$\displaystyle\int \frac{1 + \sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$
30	$\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\ \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$

Задача 1.6. *Указание:* использовать приемы интегрирования выражений, содержащих иррациональности.

1	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}\,dx}{\sqrt{x+1} - 2}$	2	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x}}{x}\,dx$
3	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}\,dx}{\sqrt{(x+2)^3} - 5}$	4	$\displaystyle\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{1+x}}$
5	$\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x+1} - 3\right)\sqrt{x+1}}$	6	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt[3]{x} + 4)}$

7	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}(x-1)}$	8	$\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{2-x}+1\right)\sqrt{2-x}}$
9	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$	10	$\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^5}+1}$
11	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}\,dx}{\sqrt{1-x}+6}$	12	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}\,dx$
13	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt{x-1}}$	14	$\displaystyle\int \frac{dx}{(x+11)\sqrt{2+x}}$
15	$\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x+2}-5\right)\sqrt{x+2}}$	16	$\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x-1}+9\right)\sqrt{x-1}}$
17	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}(x-16)}$	18	$\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{2-x}\,dx}{\sqrt[3]{(2-x)^4}+6}$
19	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$	20	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-4}\,dx}{x+5}$
21	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}\,dx}{\sqrt{x+2}+3}$	22	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{25-x}}{x}\,dx$
23	$\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{3-x}\,dx}{\sqrt[5]{(3-x)^6}-1}$	24	$\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x-3}}$
25	$\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\sqrt{x}}$	26	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}-16\right)}$
27	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}(81-x)}$	28	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\sqrt[4]{x}}$

29	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}$	30	$\int \dfrac{dx}{(x+3)\sqrt{x+7}}$

Задача 1.7. *Указание:* использовать приемы интегрирования выражений, содержащих иррациональности.

1	$\int \dfrac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2-8x+20}}$	2	$\int \dfrac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+34}}$
3	$\int \dfrac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+13}}$	4	$\int \dfrac{(2x+5)\,dx}{\sqrt{x^2-10x+16}}$
5	$\int \dfrac{(x+2)\,dx}{\sqrt{x^2-12x+37}}$	6	$\int \dfrac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2-14x+58}}$
7	$\int \dfrac{(2x-7)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+68}}$	8	$\int \dfrac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2-10x+24}}$
9	$\int \dfrac{(2x-3)\,dx}{\sqrt{x^2+14x+48}}$	10	$\int \dfrac{(x-5)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+17}}$
11	$\int \dfrac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{x^2-8x+32}}$	12	$\int \dfrac{(x+2)\,dx}{\sqrt{x^2-14x+54}}$
13	$\int \dfrac{(2x+5)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+25}}$	14	$\int \dfrac{(2x+7)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+53}}$
15	$\int \dfrac{(x-7)\,dx}{\sqrt{x^2-16x+60}}$	16	$\int \dfrac{(x+6)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+60}}$
17	$\int \dfrac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+48}}$	18	$\int \dfrac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+5}}$

19	$\int \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}$	20	$\int \frac{(3-x)\,dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$
21	$\int \frac{(x+4)\,dx}{\sqrt{x^2-8x+7}}$	22	$\int \frac{(1-x)\,dx}{\sqrt{x^2+14x+33}}$
23	$\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+29}}$	24	$\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$
25	$\int \frac{(2-x)\,dx}{\sqrt{x^2+10x+24}}$	26	$\int \frac{(2x+5)\,dx}{\sqrt{x^2-14x+48}}$
27	$\int \frac{(x-6)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+48}}$	28	$\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+14x+48}}$
29	$\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{x^2-12x+35}}$	30	$\int \frac{(4-x)\,dx}{\sqrt{x^2+10x+16}}$

Задача 1.8. *Указание:* использовать приемы интегрирования выражений, содержащих иррациональности.

1	$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$	2	$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$
3	$\int x^3\sqrt{25-x^2}\,dx$	4	$\int \frac{\sqrt{x^2-81}}{x^2}\,dx$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$	6	$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx$
7	$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-x^2}}$	8	$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-16)^3}}$

9	$\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$	10	$\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+25}}$
11	$\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{36-x^2}}$	12	$\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}}$
13	$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{81-x^2}}$	14	$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$
15	$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$	16	$\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$
17	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx$	18	$\displaystyle\int x^3\sqrt{16-x^2}\,dx$
19	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx$	20	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+16\right)^3}}$
21	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-36}}{x^4}\,dx$	22	$\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$
23	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-25\right)^3}}$	24	$\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{81-x^2}}$
25	$\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$	26	$\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{16-x^2}}$
27	$\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$	28	$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$
29	$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-25}}$	30	$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+81}}$

Задача 1.9. Вычислить определенный интеграл.

1	$\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$	2	$\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{5+4\cos x}$
3	$\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/3} \cos^3 x\cdot\sin 2x\,dx$	4	$\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+4\cos x}$
5	$\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{7+\operatorname{tg} x}{(\sin x+2\cos x)^2}\,dx$	6	$\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^4 x\cdot\cos^4 x\,dx$
7	$\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$	8	$\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{x\,dx}{2+\sqrt{2x+1}}$
9	$\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} x\cos x\,dx$	10	$\displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$
11	$\displaystyle\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$	12	$\displaystyle\int\limits_{1}^{e} (x+1)\ln 5x\,dx$
13	$\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{1+x^4}$	14	$\displaystyle\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}(2/3)} \frac{(6+\operatorname{tg} x)\,dx}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}$
15	$\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}\,dx$	16	$\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$
17	$\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4\sin^2 x\cdot\cos^4 x\,dx$	18	$\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\arccos\left(1/\sqrt{3}\right)} \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sin^2 x-\cos^2 x+4}$

19	$\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$	20	$\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$
21	$\displaystyle\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x\,\sin^3 x\,dx$	22	$\displaystyle\int\limits_1^e \frac{\ln x+1}{x\ln x}\,dx$
23	$\displaystyle\int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^x\,(e^x-3)}{e^x+3}\,dx$	24	$\displaystyle\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} (5x+1)\cos 4x\,dx$
25	$\displaystyle\int\limits_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\,dx$	26	$\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin 12x\cdot\cos^5 x\,dx$
27	$\displaystyle\int\limits_{1/5}^{\left(e^{\pi/2}\right)/5} \frac{\sin\ln 5x}{3x}\,dx$	28	$\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{3e^x\,dx}{e^{2x}+2e^x+2}$
29	$\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \arcsin 2x\,dx$	30	$\displaystyle\int\limits_0^1 (x+1)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$

Задача 1.10. Вычислить с помощью определенного интеграла площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми. Сделать чертеж.

1	$\rho=4\cos 4\varphi$	2	$y=\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2},$ $y=1,\ x=0$
3	$y=\arccos\dfrac{x}{3},$ $y=0,\ x=0$	4	$\rho=\sin 6\varphi$

5	$y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $y = 1,\ x = 0$	6	$\rho = 2\sin 4\varphi$
7	$\rho = 3(1 - \cos\varphi)$	8	$y = x^2 - 1$, $y = \sqrt{1 - x^2}$
9	$\rho = 2(1 - \cos\varphi)$	10	$\rho = 2\sin 3\varphi$
11	$\rho = \cos 2\varphi$	12	$y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$
13	$y = \sin x,\ y = \cos x$ $x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{4}$	14	$y = \arccos\dfrac{x}{2}$ $y = \arccos x$
15	$y = (x - 2)^2$, $y = 4x - 8$	16	$\rho = 2(1 - \sin\varphi)$
17	$y = \sin\dfrac{x}{2},\ y = \cos\dfrac{x}{2}$, $x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}$	18	$\rho = 2\cos 6\varphi$
19	$\rho = \dfrac{1}{2} - \sin\varphi)$	20	$\rho = 1 - \sin\varphi$
21	$y = x\sqrt{4 - x^2}$ $y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 2$	22	$y = 3x - x^2 + 4$, $y = x^2 - 5x + 4$
23	$y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{4}$, $y = \sqrt{3},\ x = 0$	24	$y = x^2 - 2x + 1$, $y = 2x - 2$

25	$y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ x = 0$	26	$\rho = 4\sin 3\varphi$
27	$\rho = 3(1 - \sin\varphi)$	28	$y = \arccos\dfrac{x}{4}$, $x = 0,\ y = 0$
29	$y = x\sqrt{9 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 3,\ y = 0$	30	$y = \arccos\dfrac{x}{4}$, $y = \arccos x$
31	$y = (x-3)^2$, $y = 6x - 18$	32	$\rho = 4\cos 3\varphi$

Задача 1.11. Вычислить с помощью определенного интеграла длину дуги кривой. Сделать чертеж.

1	$y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1 - x^2$	2	$\rho = 3(1 + \sin\varphi)$, $-\dfrac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant 0$
3	$\rho = 2(1 - \cos\varphi)$,	4	$y = 1 - \ln\left(x^2 - 1\right)$, $3 \leqslant x \leqslant 4$
5	$\rho = 1 - \sin\varphi$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant -\dfrac{\pi}{6}$	6	$y = \ln\left(x^2 - 1\right)$, $2 \leqslant x \leqslant 3$
7	$y = (x-2)^2$, $0 \leqslant x \leqslant 6$	8	$\rho = 4(1 - \sin\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{6}$
9	$y = e^x + 4$, $\ln\sqrt{8} \leqslant x \leqslant \ln\sqrt{24}$	10	$y = \ln x$, $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{15}$

11	$y = x^2 - 1,$ $y = \sqrt{1 - x^2}$	12	$\rho = 2(1 - \cos\varphi),$
13	$\rho = \dfrac{\varphi}{2},$ $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$	14	$\rho = 2\varphi,$ $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{2}{3}$
15	$\rho = 3\sin 2\varphi,$	16	$y = e^x + 3,$ $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{15}$
17	$\rho = e^{2\varphi/3},$ $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$	18	$y = \sqrt{2x - x^2},$ $0 \leqslant x \leqslant 2$
19	$y = \sqrt{-2x - x^2},$ $-2 \leqslant x \leqslant 0$	20	$y = \ln 7 - \ln x,$ $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$
21	$y = x\sqrt{4 - x^2},$ $y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 2$	22	$\rho = 4\cos\varphi,$ $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}$
23	$\rho = 4\varphi,$ $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3}{4}$	24	$\rho = 7(1 - \sin\varphi),$
25	$\rho = e^{3\varphi/4},$ $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{3}$	26	$y = \ln\left(1 - x^2\right),$ $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4}$
27	$y = \arccos 2x,$ $x = 0,\ y = 0$	28	$\rho = 5(1 + \cos\varphi),$ $-\dfrac{\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant 0$

29	$y = x\sqrt{9-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 3,\ y = 0$	30	$\rho = 2\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{6}$
31	$\rho = 3\sin 2\varphi$,	32	$y = e^x + 5$, $\ln\sqrt{15} \leqslant x \leqslant \ln\sqrt{35}$

Задача 1.12. С помощью определенного интеграла найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси OX (V_{OX}), вокруг оси OY (V_{OY}) или вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой вокруг оси OX (S_{OX}). Сделать чертеж.

1	$y = \cos 2x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$	S_{OX}	2	$y = \sin\dfrac{x}{2},\ y = \cos\dfrac{x}{2}$, $x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}$	V_{OX}
3	$y = 4 - x^2$, $y = \sqrt{4-x^2}$	V_{OX}	4	$y = \sin 3x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6}$	S_{OX}
5	$y = \operatorname{tg} x$, $y = \sqrt{3},\ x = 0$	V_{OX}	6	$y = \arccos\dfrac{x}{2}$, $x = 0,\ y = 0$	V_{OY}
7	$y = x^2 - 2x + 1$, $y = 0,\ x = 2$	V_{OY}	8	$x^2 + (y-1)^2 = 1$	V_{OX}
9	$y = 1 - x^2$, $y = \sqrt{1-x^2},\ x = 0$	V_{OX}	10	$y = x\sqrt{4-x^2}$, $y = 0$	V_{OX}
11	$y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$	S_{OX}	12	$y = e^{1-x},\ y = 0$, $x = 0,\ x = 1$	V_{OX}

13	$y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ x=0$	V_{OX}	14	$y=(x-1)^2$, $y=1$	V_{OY}
15	$y=\arccos\dfrac{x}{2}$, $y=\arccos x$	V_{OY}	16	$y=\arccos x$, $y=\arcsin x,\ x=0$	V_{OY}
17	$y=\cos 3x$, $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}$	S_{OX}	18	$y=\arccos\dfrac{x}{3}$, $x=0,\ y=0$	V_{OY}
19	$y=\sin\dfrac{x}{2}$, $0\leqslant x\leqslant\pi$	S_{OX}	20	$y=-\sqrt{-2x-x^2}$, $y=0$	V_{OX}
21	$y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}$, $y=1,\ x=0$	V_{OX}	22	$y=\sin\dfrac{x}{4},\ y=\cos\dfrac{x}{4}$, $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{16}$	V_{OX}
23	$y=\sqrt{9-x^2}$, $y=x^2-9$	V_{OY}	24	$y=\arccos\dfrac{x}{3}$, $y=\arccos x$	V_{OY}
25	$y=\cos\dfrac{x}{2}$, $0\leqslant x\leqslant\pi$	S_{OX}	26	$y=4-x^2$, $y=\sqrt{4-x^2},\ x=0$	V_{OY}
27	$y=\arccos 2x$, $y=0,\ x=0$	V_{OY}	28	$y=x^2$, $y=0,\ x=2$	V_{OY}
29	$y=\cos\dfrac{x}{3},\ y=\sin\dfrac{x}{3}$, $0\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$	V_{OX}	30	$y^2=2x-x^2$	S_{OX}

31	$y = x\sqrt{1-x^2}$, $y=0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$	V_{OX}	32	$y = \operatorname{tg} 2x$, $y=1,\ x=0$	V_{OX}

Основные типы задач по темам „Несобственные интегралы“ и „Двойной и тройной интегралы и их приложения“

Задачи этой части составляют основу контрольной работы №2. Для успешной сдачи контрольной работы рекомендуется прорешать все задачи этой части.

Задача 2.1. Вычислить несобственный интеграл.

1	$\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$	2	$\displaystyle\int\limits_{1/3}^{+\infty} \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 3x\right)}$
3	$\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} xe^{-3x}\,dx$	4	$\displaystyle\int\limits_0^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
5	$\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^3}+3\sqrt{x}}$	6	$\displaystyle\int\limits_0^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$
7	$\displaystyle\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+16x+15}$	8	$\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$
9	$\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$	10	$\displaystyle\int\limits_0^{2\sqrt{3}/3} \frac{x\,dx}{\sqrt{16-9x^4}}$
11	$\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$	12	$\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{(1+4x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}$

13	$\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x\ln x\,dx}{\left(1+x^2\right)^2}$	14	$\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x}\cos x\,dx$
15	$\displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$	16	$\displaystyle\int\limits_{0}^{1/6} \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)\arcsin 3x}}$
17	$\displaystyle\int\limits_{0}^{1} (\ln x)^2 dx$	18	$\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$
19	$\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(3x+7)\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$	20	$\displaystyle\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{+\infty} \frac{dx}{(1+9x^2)\left(\operatorname{arctg} 3x\right)^2}$
21	$\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x}}$	22	$\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^4+4x^2+8}$
23	$\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx$	24	$\displaystyle\int\limits_{1/5}^{+\infty} \frac{dx}{(1+25x^2)\operatorname{arctg} 5x}$
25	$\displaystyle\int\limits_{0}^{1/4} \frac{\arcsin 4x}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx$	26	$\displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{e^x-2}}$
27	$\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x\sqrt{\sin 2x}}$	28	$\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin 2x\,dx$
29	$\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(x-2)\,dx}{(x+1)(x+2)(x+4)}$	30	$\displaystyle\int\limits_{2/3}^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{x^2\sqrt{9x^2-4}}$

Задача 2.2. Изменить порядок интегрирования в двойном ин-

теграле $\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$.

N	a	b	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
1	0	2	$1-\dfrac{x^2}{4}$	$\sqrt{4-x^2}$
2	0	1	$-\sqrt{2-x^2}$	$2-x$
3	0	2	$-\sqrt{2x-x^2}$	$2-x$
4	0	$\sqrt{2}$	$x^2/2$	$\sqrt{3-x^2}$
5	0	2	$\sqrt{2x-x^2}$	$\sqrt{2x}$
6	0	1	$\sqrt{x}$	$3-2x$
7	0	1	$-\sqrt{1-x^2}$	$1-x$
8	0	$3/2$	$2x^2$	$6-x$
9	1	2	$-x$	$\sqrt{1+x^2}$
10	-1	$1/2$	x	$1-x^2$
11	0	1	$-x$	$\sqrt{4-x^2}$
12	-1	1	$-\sqrt{1-x^2}$	$1-x^2$
13	2	4	$\sqrt{4x-x^2}$	$\sqrt{8x}$

14	-6	2	$\dfrac{x^2}{4}-1$	$2-x$
15	$1/4$	1	$\sqrt{x}$	$\sqrt{4x}$
16	0	1	$\dfrac{1-x^2}{2}$	$\sqrt{1-x^2}$
17	0	1	$\sqrt{2x-x^2}$	$2-x$
18	0	1	$-\sqrt{4-x^2}$	$2x$
19	$1/2$	$3/2$	0	$\sqrt{2x-x^2}$
20	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\dfrac{x^2}{2}$	$\sqrt{3-x^2}$
21	-1	2	x^2-2x-3	$2-x$
22	1	4	0	$\sqrt{x}$
23	0	$3/4$	x^2	x
24	0	1	x	x^2+1
25	-3	1	$x-2$	$3-2x-x^2$
26	1	2	$\sqrt{4x-3-x^2}$	$\sqrt{4x-x^2}$
27	-2	0	$-\sqrt{-2x-x^2}$	$\sqrt{4-x^2}$
28	0	1	x^2-4	$\sqrt{4-x^2}$

29	0	4	$3x^2$	$12x$
30	1	2	0	$\sqrt{4x-x^2}$

Задача 2.3. Вычислить двойной интеграл.

1	$\displaystyle\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$D: y^2 \leqslant x \leqslant y$
2	$\displaystyle\iint\limits_D \exp\left(x^2+y^2\right) dxdy$	$D: \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4 \\ y \geqslant 0 \\ x \leqslant 0 \end{cases}$
3	$\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dxdy$	$D: \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant R^2 \\ x \leqslant y \leqslant \sqrt{3}\, x \end{cases}$
4	$\displaystyle\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy$	$D: \begin{cases} 4x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 8x \\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$
5	$\displaystyle\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$	$D: \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant -8x \\ x \leqslant y \leqslant -x \end{cases}$
6	$\displaystyle\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy$	$D: \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 6y \\ 0 \leqslant y \leqslant -x\sqrt{3} \end{cases}$

7	$\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$	$D:\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 1\\ y\leqslant x\leqslant -y\end{cases}$
8	$\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$	$D:\begin{cases} 2x\leqslant x^2+y^2\leqslant 4x\\ 0\leqslant y\leqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}}\end{cases}$
9	$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dxdy$	$D:\begin{cases} -4y\leqslant x^2+y^2\leqslant -8y\\ y\leqslant x\leqslant -y\end{cases}$
10	$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$	$D:\ \pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2$
11	$\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$	$D:\begin{cases} \dfrac{\pi^2}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant \pi^2\\ \sqrt{3}\,x\leqslant y\leqslant 0\end{cases}$
12	$\iint\limits_D \dfrac{ye^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\,dxdy$	$D:\begin{cases} x^2+y^2\leqslant -2x\\ y\leqslant 0\end{cases}$
13	$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$	$D:\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^2\leqslant x^2-y^2\\ 0\leqslant y\leqslant x\end{cases}$
14	$\iint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$	$D:\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4x\\ y\geqslant x\sqrt{3}\end{cases}$
15	$\iint\limits_D \dfrac{y\,dxdy}{(x^2+y^2)\,e^{\sqrt{x^2+y^2}}}$	$D:\begin{cases} x^2+y^2\leqslant -4x\\ y\geqslant 0\end{cases}$

16	$\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy$	$D: 2x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4x$
17	$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$	$D: \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1 \\ x \leqslant y \leqslant x\sqrt{3} \end{cases}$
18	$\iint\limits_D \frac{x\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$D: \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 2y \\ x \leqslant y \end{cases}$
19	$\iint\limits_D dxdy$	$D: \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^2 \geqslant x^2-y^2 \\ x^2+y^2 \geqslant 2x \\ -x \leqslant y \leqslant x \end{cases}$
20	$\iint\limits_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy$	$D: \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant -4y \\ 0 \leqslant x \leqslant -y \end{cases}$
21	$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$D: x \leqslant y \leqslant -x^2$
22	$\iint\limits_D \frac{x\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$D: \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^2 \geqslant x^2-y^2 \\ x^2+y^2 \leqslant 2x \\ x \leqslant y \leqslant -x \end{cases}$
23	$\iint\limits_D \sqrt{36-4x^2-9y^2}\,dxdy$	$D: \begin{cases} 4x^2+9y^2 \leqslant 36 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$
24	$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$D: \begin{cases} 9 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 6y \\ 0 \leqslant x \leqslant y \end{cases}$

25	$\iint\limits_D \sqrt{4-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dxdy$	$D: \begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \geqslant 1 \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36} \leqslant 1 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$
26	$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$	$D: \begin{cases} 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant -2x \\ 0 \leqslant y \leqslant -x \end{cases}$
27	$\iint\limits_D y\,dxdy$	$D: \begin{cases} 4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4x \\ -x \leqslant y \leqslant x \end{cases}$
28	$\iint\limits_D \frac{xe^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\,dxdy$	$D: \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant -2y \\ x \leqslant 0 \end{cases}$
29	$\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$	$D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$
30	$\iint\limits_D y\,dxdy$	$D: \begin{cases} 4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4x \\ -x \leqslant y \leqslant x \end{cases}$
31	$\iint\limits_D x\,dxdy$	$D: \begin{cases} 4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant -4y \\ 0 \leqslant x \leqslant -y \end{cases}$

32	$\iint\limits_D \frac{y\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$D: \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^2 \geqslant y^2-x^2 \\ x^2+y^2 \leqslant -2y \end{cases}$

Задача 2.4. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела V, переходя к цилиндрическим или сферическим координатам

1	$\begin{cases} x^2+y^2-z^2 \leqslant 0 \\ 2z \leqslant x^2+y^2+1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x^2+y^2-z^2 \leqslant 0 \\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1, z \geqslant 0 \\ z \leqslant 4-x^2-y^2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \\ x^2+y^2 \leqslant y \end{cases}$
5	$\begin{cases} 1 \leqslant z \leqslant 2 \\ x^2+y^2 \leqslant 2z \end{cases}$
6	$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 3z^2 \\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqslant 4 \\ x^2+y^2 \leqslant 3z \end{cases}$
8	$\begin{cases} z \geqslant -2 \\ x^2+y^2+z \leqslant 2 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant z^2 \\ x^2+y^2 \geqslant 2-z \end{cases}$

10	$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 6z \\ 9-x^2-y^2 \geqslant 3z \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2z \geqslant x^2+y^2 \\ z^2 \leqslant x^2+y^2 \end{cases}$
12	$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1, z \geqslant 0 \\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 9 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0 \\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4 \end{cases}$
14	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqslant 2 \\ x^2+y^2 \geqslant z \end{cases}$
15	$\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant z \geqslant 0 \\ x^2+y^2 \leqslant 3 \end{cases}$
16	$\begin{cases} x+y+z \leqslant 2 \\ z \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant 1 \end{cases}$
17	$\begin{cases} z \geqslant x^2+y^2 \\ 2z \leqslant 3-x^2-y^2 \end{cases}$
18	$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant z^2 \\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x \leqslant z \leqslant 2x, x \geqslant 0 \\ x^2+y^2 \leqslant 4 \end{cases}$
20	$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 3z \\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4 \end{cases}$
21	$\begin{cases} z \geqslant 0 \\ z \leqslant 4-x^2-y^2 \end{cases}$

22	$\begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant 5 - x - y \\ x^2 + y^2 \leqslant 9 \end{cases}$
23	$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2z \\ x^2 + y^2 \leqslant z^2 \end{cases}$
24	$\begin{cases} 1 \leqslant z \leqslant 2 \\ z \leqslant 4 - x^2 - y^2 \end{cases}$
25	$\begin{cases} z \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ z^2 \leqslant x^2 + y^2 + 1 \end{cases}$
26	$\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 1, z \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4 \end{cases}$
27	$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2 \\ z \leqslant x^2 + y^2 \end{cases}$
28	$\begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2 \\ x + y \leqslant 2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$

Основные типы задач по темам „Криволинейные и поверхностные интегралы“ и „Теория поля“

Задачи этой части составляют содержание типового расчета. Типовой расчет выполняется каждым студентом в отдельной тетради в соответствии с назначенным ему номером варианта.

Основные определения и теоремы, а также разбор решения задач по указанным темам приведены в Приложении.

Задача 3.1. Вычислить двумя способами: непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому кон-

туру L, пробегаемому против часовой стрелки
$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.

N	L	$P(x,y)$	$Q(x,y)$
1	$\triangle ABC$, $A(1,1)\,B(2,2)\,C(1,3)$	$2\left(x^2+y^2\right)$	$(x+y)^2$
2	$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$	$xy+x+y$	$xy+x-y$
3	$x^2+y^2=2x$	$xy+1$	$xy-x+y$
4	$x^2+y^2=4$	$-x^2y$	xy^2
5	$4x^2+9y^2=36$	$x+y$	$-x+y$
6	$y=\sin x$, $y=0$, $0\leqslant x\leqslant \pi$	e^xy	e^x
7	$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$	x^3y	x^2+1
8	$y=x^2$, $y=1$	x^2y	$x+y$
9	$y=3x^2$, $y=2x$	$(x+y)^2$	$-(x-y)^2$
10	$\triangle ABC$, $A(0,0)$, $B(2,4)$, $C(0,4)$	$3x^2y$	x^3+2x
11	$y=2x^2$, $y=2$	x^2-2xy	y^2-2xy
12	$x^2+y^2=4$	y^2+x	x^2+y
13	$y=\dfrac{x^2}{4}$, $y=\dfrac{x}{2}$	$2xy$	$-x^2$

14	$x = 2y^2,\ 2y = x$	$2xy$	$x^2 + y^2$
15	$x^2 + y^2 = 9$	$x + y^2$	$x - y^2$
16	$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$	$y + x^2$	$-x$
17	$2y = x^2 + 2,\ y = 3x - 3$	$x + y$	$x - y$
18	$\triangle ABC,\ A(0,0),\ B(1,1),\ C(0,2)$	xy	$x^2 + y^2$
19	$\|x\| + \|y\| = 1$	$(x + y)^2$	$-(x - y)^2$
20	$x^2 + y^2 = 25$	$x + y^2$	x^3
21	$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$	$x - y$	$x^2 - y^2$
22	$y = x^2,\ y = 3x - 2$	$x^2 - 2xy$	$2xy + y^2$
23	$\triangle ABC,\ A(1,1),\ B(2,2),\ C(1,3)$	$(x + y)^2$	$x^2 + y^2$
24	$y = \sqrt{x},\ 3y = x + 2$	$x^2 - y$	$x^2 + y$
25	$\triangle ABC,\ A(1,2),\ B(2,4),\ C(1,4)$	$\dfrac{y^2 + 1}{y}$	$\dfrac{2y^2 - x}{y^2}$
26	$y = 2\sqrt{x},\ y = 2x$	$2xy^2$	$3x^2y$
27	$x^2 + y^2 = 4$	$x + 2y$	$y - 2x$
28	$\triangle ABC,\ A(1,1),\ B(3,2),\ C(2,5)$	$(x + y)^2$	$-x^2 - y^2$

Задача 3.2. Вычислить площадь части поверхности σ, заключенную внутри цилиндрической поверхности Ц.

	σ	Ц
1	$z = xy$	$x^2 + y^2 = 1$
2	$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$	$x^2 + y^2 = 1$
3	$z = 4 - x - y$	$x^2 + y^2 = 2x$
4	$z^2 = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 = 2x$
5	$x^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0$	$x^2 + y^2 = 1$
6	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$	$x^2 + y^2 = 2y$
7	$x^2 + y^2 + z^2 = 9$	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 9\left(x^2 - y^2\right)$
8	$z^2 = x^2 + y^2$	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4\left(x^2 - y^2\right)$
9	$2z = xy$	$x^2 + y^2 = 4$
10	$2z = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 = 2$
11	$z^2 = 2xy$	$0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$
12	$2z = 4 - x^2 - y^2$	$x^2 + y^2 = 2$
13	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 = 2x$
14	$z = \sqrt{x^2 - y^2}$	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2$

15	$2z = x^2 - y^2$	$x^2 + y^2 = 1$
16	$2z = x^2 + y^2$	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2xy$
17	$1 - z = \left(x^2 + y^2\right)^{3/2}$	$z \geqslant 0$
18	$z = x^2 + y^2$	$4\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2$
19	$x^2 + y^2 = z^2$	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2xy$
20	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2xy$
21	$x^2 + z^2 = 1$	$x + y = 0, x - y = 0$
22	$2z^2 = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 = 2y$
23	$4z = x^2 + y^2$	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8xy$
24	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$	$x^2 + y^2 = 2x$
25	$x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ z \geqslant 0$	$x^2 + y^2 = 9$
26	$z^2 = x^2 - y^2$	$x^2 + y^2 = 2x$
27	$4z = x^2 + y^2,\ z \leqslant 1$	$y^2 = 3x^2$
28	$z = 4 + 2x - y$	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4xy$

Задача 3.3. Найти поток векторного поля через замкнутую поверхность двумя способами: 1) непосредственно, вычисляя потоки через все гладкие куски поверхности;

2) по теореме Остроградского-Гаусса.

N	A	σ
1	$x^2\mathbf{i}+y\mathbf{j}-z\mathbf{k}$	$2z=4-x^2-y^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$
2	$\mathbf{i}+\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$	$z^2=x^2+y^2,\ 0\leqslant z\leqslant 2$
3	$xz\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+\mathbf{k}$	$x^2+y^2=1,\ y\geqslant 0,\ 0\leqslant z\leqslant 2$
4	$(1-z)\,(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})+\mathbf{k}$	$(1-z)^2=x^2+y^2,\ 0\leqslant z\leqslant 1$
5	$xz\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+x\mathbf{k}$	$2z=9-x^2-y^2,\ z\geqslant 0$
6	$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$	$x^2+y^2+z^2=1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$
7	$\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+\mathbf{k}$	$x^2+y^2=4,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ 1\leqslant z\leqslant 3$
8	$x^2\mathbf{i}-z\mathbf{j}+y\mathbf{k}$	$x^2+y^2+z^2=4,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 1,\ z\geqslant 0$
9	$xy(\mathbf{i}+\mathbf{j})+\mathbf{k}$	$y=4-x^2-z^2,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$
10	$\mathbf{i}+\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$	$2-z=x^2+y^2,\ z=-2$
11	$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$	$y^2=x^2+z^2,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ z\leqslant 0$
12	$xz\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$	$x^2+y^2+z^2=4,\ 0\leqslant z\leqslant 1$
13	$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$	$z^2=x^2+y^2,\ -1\leqslant z\leqslant 0,\ x\geqslant 0$

14	$x\mathbf{i}+\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$	$x^2+y^2=9,\ y\geqslant 0,\ 0\leqslant z\leqslant 2$
15	$x^2\mathbf{j}+z\mathbf{k}$	$2z=2-x^2-y^2,\ z\geqslant 0$
16	$\mathbf{i}-\mathbf{j}+x(2-z)\mathbf{k}$	$(2-z)^2=x^2+y^2,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$
17	$y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$	$x^2+y^2+z^2=4,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$
18	$x^2\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$	$z=x^2+y^2,\ x\geqslant 0,\ z\leqslant 4$
19	$yz\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$	$x^2-2y+y^2=0,\ 0\leqslant z\leqslant 4$
20	$2xy\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$	$x+y+z=1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$
21	$x^2\mathbf{i}+y\mathbf{j}+x\mathbf{k}$	$2z=8-x^2-y^2,\ z\geqslant 2,\ y\geqslant 0$
22	$2xyz\mathbf{i}+3xy\mathbf{j}-z^2y\mathbf{k}$	$x+y=2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ 0\leqslant z\leqslant 4$
23	$2x\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-xz\mathbf{k}$	$x^2-2z+z^2=0,\ 0\leqslant y\leqslant 2$
24	$x\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$	$2y-3=x^2+z^2,\ y\leqslant 2,\ z\geqslant 0$
25	$xy\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+2yz\mathbf{k}$	$x^2+y^2=z^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ 0\leqslant z\leqslant 1$
26	$y\mathbf{i}+2x\mathbf{j}+z\mathbf{k}$	$z=1-x^2-y^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$
27	$x\mathbf{i}-y\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$	$x^2+y^2+z^2=4,\ 0\leqslant x\leqslant y,\ z\geqslant 0$
28	$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$	$2z=4-x^2-y^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$

Задача 3.4. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{A}$ по контуру Γ двумя способами: 1) непосредственно, вычисляя линейный интеграл векторного поля по контуру Γ, 2) по теореме Стокса.

N	$\mathbf{A}$	Γ
1	$y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$	$x^2 + z^2 = 4 - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (1 октант)
2	$2y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - 3x\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 3$
3	$xy\mathbf{i} + z^2\mathbf{j}$	$y^2 = 1 - x - z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (1 октант)
4	$x\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + y\mathbf{k}$	$x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
5	$xy\mathbf{i} + x\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 4$, $y = z$
6	$xy(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + z\mathbf{k}$	$x^2 + z^2 = 1 - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (1 октант)
7	$\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 1$, $x = z + 1$
8	$y\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$	$x + 2y + 2z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
9	$z^2\mathbf{i} - x\mathbf{j} - y\mathbf{k}$	$x^2 + z^2 = 4$, $y = z + 1$
10	$y^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	$3x + y + 2z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
11	$y^2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$	$z^2 = 1 - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (1 октант)
12	$z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 9$, $x + y + z = 5$
13	$z^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	$2x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
14	$y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$	$y^2 = 1 - x - z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (1 октант)

15	$z\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 3$
16	$y\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$	$x^2 + z^2 = 4,\ z = y + 2$
17	$xy(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$	$x + 2y + z = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$
18	$z\mathbf{i} - y\mathbf{j} - x\mathbf{k}$	$x^2 + z^2 = 1 - y,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (1 октант)
19	$yz\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 9,\ z = x + 1$
20	$xz\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$	$y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 3$
21	$z\mathbf{i} - y\mathbf{j} - x\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (1 октант)
22	$z\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + y\mathbf{k}$	$z = x^2 + y^2,\ z = 4$
23	$2y\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} - x\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 4,\ y = z$
24	$x\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + y\mathbf{k}$	$2x + y + 2z = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$
25	$-2xz\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 1 - z,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (1 октант)
26	$z\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - x\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (1 октант)
27	$x\mathbf{j} - \mathbf{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z = y$
28	$z\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - x\mathbf{k}$	$x^2 + y^2 = 1 - z,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (1 октант)

ПРИЛОЖЕНИЕ

В данном приложении излагается краткая теория и методика решения типовых задач по следующим темам, указанным ниже. Изучение материала этого Приложения необходимо для успешного выполнения контрольных работ и типового расчета, а также является полезным при подготовке к экзамену (зачету).

1. Неопределенный интеграл
2. Определенный интеграл
3. Несобственные интегралы
4. Криволинейные интегралы
5. Поверхностные интегралы
6. Элементы теории поля

1 Неопределенный интеграл

1.1 Определение первообразной

Определение 1.1 *Пусть функция $f(x)$ задана на некотором интервале $(a,b) \subset R$. Если найдется такая функция $F(x)$, что при всех $x \in (a,b)$ имеет место равенство*

$$F'(x) = f(x)$$

*то функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$.*

Нахождение первообразной - операция, обратная к операции вычисления производной. Найти первообразную по данной функции $f(x)$ означает восстановить функцию $F(x)$ по ее производной.

Однозначно восстановить функцию $F(x)$ по ее производной невозможно: если $F(x)$ первообразная функции $f(x)$, то для произвольной константы $C \in R$ функция $F(x) + C$ также является первообразной функции $f(x)$, и любая первообразная представима в этом виде.

Теорема 1.1 *Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на (a,b) и функция $\Phi(x)$ – некоторая другая первообразная. Тогда эти первообразные отличаются на константу, т.е.*

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

при некоторой постоянной C.

1.2 Неопределенный интеграл и таблица неопределенных интегралов

Определение 1.2 *Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** от $f(x)$ и обозначается*

$$\int f(x)\,dx$$

При этом $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, x - переменной интегрирования, $\int$ - знаком интеграла. Таким образом,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Таблица неопределенных интегралов для часто встречающихся функций сразу следует из таблицы производных.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$
2. При $n \neq -1$
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$
3. В любом интервале, где $x \neq 0$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$
4. Если $a = const$, $a > 0$, $a \neq 1$, то
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
5. В частности, если $a = e$, то
$$\int e^x dx = e^x + C$$

6.
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

7.
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

8. В любом интервале, где $\cos x \neq 0$,
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

9. В любом интервале, где $\sin x \neq 0$,
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

10. На интервале $(-|a|, |a|)$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$
В частности, на интервале $(-1, 1)$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$

11. Если $a = const \neq 0$, то
$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$
В частности,
$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

12. Если $k = const \neq 0$, то
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C$$
при этом правую часть этого равенства называют иногда *«длинным логарифмом»*.

13. Если $a = const \neq 0$, то

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

при этом правую часть этого равенства часто называют *«высоким логарифмом»*.

1.3 Свойства неопределенного интеграла

Свойства неопределенного интеграла вытекают из определения и соответствующих свойств производных.

1. Из определения вытекает, что

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C$$

и

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

Эти равенства показывают, что операции дифференцирования и интегрирования можно рассматривать как взаимно обратные.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx,$$

где k - произвольная постоянная.

3. Интеграл от суммы равен сумме интегралов:

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Из 2 и 3 следует, что для любых постоянных k_1 и k_2

$$\int \big(k_1 f(x) + k_2\, g(x)\big)dx = k_1 \int f(x)\,dx + k_2 \int g(x)\,dx$$

Последнее равенство называют свойством линейности неопределенного интеграла.

1.4 Непосредственное интегрирование

Непосредственным интегрированием будем называть интегрирование с помощью свойства линейности и использования таблицы.

Пример 1.4.1. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int (2\sin x + 5\cos x)\,dx$$

Решение:

$$\int (2\sin x + 5\cos x)\,dx = \int 2\sin x\,dx + \int 5\cos x\,dx =$$

$$= 2\int \sin x\,dx + 5\int \cos x\,dx = 2(-\cos x) + 5\sin x + C =$$

$$= 5\sin x - 2\cos x + C$$

Пример 1.4.2. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \left(3x^2 - 7e^x + \frac{1}{4x^2-9}\right) dx$$

Решение:

$$\int \left(3x^2 - 7e^x + \frac{1}{4x^2-9}\right) dx = 3\int x^2 dx - 7\int e^x dx + \int \frac{dx}{4x^2-9} =$$

$$= 3\,\frac{x^3}{3} - 7e^x + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-(3/2)^2} =$$

$$= x^3 - 7e^x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot(3/2)}\ln\left|\frac{x-3/2}{x+3/2}\right| + C =$$

$$= x^3 - 7e^x + \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-3/2}{x+3/2}\right| + C$$

Пример 1.4.3. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \left(3^x e^x + \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{6}{x^2+7}\right) dx$$

Решение:

$$\int \left(3^x e^x + \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{6}{x^2+7}\right) dx =$$

$$= \int (3e)^x dx + \int \frac{dx}{\sin^2 x} - 6\int \frac{dx}{x^2+7} =$$

$$= \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} - \operatorname{ctg} x - 6\int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2} =$$

$$= \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} - \operatorname{ctg} x - \frac{6}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$$

Пример 1.4.4. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \left(\frac{8x^5+\sqrt{x}}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right) dx$$

Решение:

$$\int \left(\frac{8x^5+\sqrt{x}}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right) dx =$$

$$= 8\int x^2\, dx + \int x^{-5/2}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} - \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} =$$

$$= \frac{8x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{-3/2} + \ln\left|x + \sqrt{x^2+3}\right| - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

1.5 Методы интегрирования

1.5.1 Метод интегрирования подстановкой

Формула интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Пусть $u = \varphi(x)$. Тогда

$$\int f(u)\, du\Big|_{u=\varphi(x)} = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx$$

В левой части после вычисления интеграла $\int f(u)du$ сделана подстановка $u = \varphi(x)$. Формулу замены переменной можно также представить в виде

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x))$$

Этот прием называют подведением под знак дифференциала.

Пример 1.5.1. В ычислить интеграл

$$\int e^{x^2}xdx$$

Решение: Обозначим $u = x^2$, тогда $du = 2xdx$, и $xdx = \frac{1}{2}du$. По формуле интегрирования подстановкой получаем:

$$\int e^{x^2}xdx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ xdx = \dfrac{1}{2}\,du \end{array} \right| = \int e^u \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C =$$
$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Решение этой задачи с помощью подведения под знак дифференциала имеет вид

$$\int e^{x^2}xdx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Пример 1.5.2. *Линейная замена.*

Пусть

$$\int f(z)dz = F(z) + C$$

Вывести формулу

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Решение: Положим $z = ax + b$, тогда $dz = adx$, и $dx = \frac{1}{a}dz$. По формуле интегрирования подстановкой получаем:

$$\int f(ax+b)dx = \int f(z)\frac{1}{a}\,dz\Big|_{z=ax+b} =$$

$$= \frac{1}{a}F(z) + C\Big|_{z=ax+b} = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Замечание. В справедливости формулы можно также убедиться с помощью непосредственного дифференцирования.

Отсюда получаем следующие равенства, которые полезно запомнить.

Дополнение к табличным интегралам.

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

$$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C\,; \int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\left(|ax+b|\right) + C$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1} + C,\ n \neq -1$$

1.5.2 Метод интегрирования по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы. Тогда $(uv)' = u'v + v'u$. Интегрируя это равенство, получаем формулу, которая называется формулой интегрирования по частям.

Формула интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Пример 1.5.3. Вычислить интеграл

$$\int 5e^{2x}xdx$$

Решение: По формуле интегрирования по частям

$$\int 5e^{2x}xdx = 5\int e^{2x}xdx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^{2x}dx & v = \dfrac{1}{2}\,e^{2x} \end{array} \right| = 5\left(x\,\frac{1}{2}\,e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx \right) =$$

$$= 5\left(\frac{x}{2}\,e^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x} \right) + C$$

Пример 1.5.4. Вычислить интеграл

$$\int x\ln xdx$$

Решение: По формуле интегрирования по частям

$$\int x\ln xdx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx & v = \dfrac{1}{2}\,x^2 \end{array} \right| = \ln x \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\int x^2\frac{dx}{x} =$$

$$= \ln x \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^2}{4} + C$$

Пример 1.5.5. Вычислить интеграл

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,xdx$$

Решение: По формуле интегрирования по частям

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,xdx = \left| \begin{array}{ll} u = \mathrm{arctg}\,x & dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{1+x^2}$$

Преобразуем интеграл в правой части:

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\big((x^2+1) \operatorname{arctg} x - x\big) + C$$

Повторное применение формулы интегрирования по частям.

Пример 1.5.6. Вычислить интеграл

$$\int x^2 \sin x dx$$

Решение: По формуле интегрирования по частям

$$\int x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x dx \right) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

Возвращение к исходному интегралу.

Пример 1.5.7. Вычислить интеграл

$$I = \int \sqrt{1-x^2} dx$$

<u>Решение</u>: Применим формулу интегрирования по частям. При этом в правой части получается такой же интеграл I .

$$I = \int \sqrt{1-x^2}dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2} & du = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x + C$$

Получаем уравнение

$$I = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x + C\,,$$

откуда

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C$$

<u>*Замечание*</u>. Этим же приемом вычисляются также интегралы вида $\int e^{ax}\sin(bx)dx$ и $\int e^{ax}\cos(bx)dx$

<u>Пример 1.5.8.</u> Найти интеграл

$$J = \int e^x \sin x dx$$

<u>Решение</u>: Применим дважды формулу интегрирования по частям.

$$J = \int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

Получаем уравнение

$$J = -e^x \cos x + e^x \sin x - J\,,$$

откуда

$$J = \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x(-\cos x + \sin x) + C$$

Типы интегралов, которые вычисляются по формуле интегрирования по частям.

1. Интегралы вида

$$\int P(x) \sin(ax) dx, \int P(x) \cos(ax) dx, \int P(x) e^{ax} dx,$$

где $P(x)$ - многочлен, $a = const$. Применяя формулу интегрирования по частям, полагаем

а) для первого интеграла $u = P(x)$,$dv = \sin(ax)dx$;

б) для второго интеграла $u = P(x)$, $dv = \cos(ax)dx$;

в) для третьего интеграла $u = P(x)$, $dv = e^{ax}dx$.

2. Интегралы вида

$$\int P(x) \arcsin x dx, \int P(x) \arccos x dx, \int P(x) \operatorname{arctg} x dx,$$

$$\int P(x) \operatorname{arcctg} x dx, \int P(x) \ln x dx,$$

где $P(x)$ - многочлен. В таких интегралах полагаем
$dv = P(x)dx$, а в качестве u берем оставшуюся функцию, т.е., соответственно, $u = \arcsin x$, $u = \arccos x$, $u = \operatorname{arctg} x$, $u = \operatorname{arcctg} x$, $u = \ln x$.

3. Интегралы вида

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx,\ \int e^{ax}\cos(bx)dx, a = const.$$

Здесь полагаем $u = e^{ax}$ и, дважды применяя формулу интегрирования по частям, приходим к уравнению относительно искомого интеграла (см. пример, разобранный выше).

1.6 Интегрирование некоторых типов элементарных функций

1.6.1 Интегрирование рациональных функций

1.6.1.1 Интегрирование неправильных рациональных дробей

Функция $R(x)$ называется рациональной функцией, или *рациональной дробью*, если она представляет собой отношение двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Пусть степень многочлена $P(x)$ равна m, а степень $Q(x)$ равна n. Если $m < n$, то дробь $R(x)$ называется *правильной*, а если $m \geqslant n$, то *неправильной*. Если дробь неправильная, то ее числитель $P(x)$ можно поделить на знаменатель $Q(x)$ и представить дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = N(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}.$$

Здесь $N(x)$ - многочлен, называемый *целой частью* рациональной дроби $R(x)$, а $r(x)$ - остаток , степень которого меньше n. Следовательно, *интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию многочленов и правильных дробей.*

Пример 1.6.1.

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 2x + 1}{x - 2}dx.$$

<u>Решение</u>: Подынтегральное выражение является неправильной дробью. Для вычисления интеграла представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Разделим многочлен

$$P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 1 \quad \text{на} \quad Q(x) = x - 2 :$$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^3 & + & 5x^2 & - & 2x & + & 1 & \; x - 2 \\ \cline{8-8}
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \; x^2 + 7x + 12 \\ \cline{1-3}
 & & 7x^2 & - & 2x & + & 1 & \\
 & & 7x^2 & - & 14x & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 12x & + & 1 & \\
 & & & & 12x & - & 24 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 25 &
\end{array}$$

Следовательно, $N(x) = x^2 + 7x + 12$, $r(x) = 25$. Таким образом,

$$R(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 2x + 1}{x - 2} = x^2 + 7x + 12 + \frac{25}{x - 2}$$

и искомый интеграл равен

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 2x + 1}{x - 2}\, dx = \int \left(x^2 + 7x + 12 + \frac{25}{x - 2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 12x + 25 \ln |x - 2| + C.$$

1.6.1.2 Интегрирование правильных рациональных дробей

Теорема 1.2 ***Теорема о разложении правильной рациональной дроби.*** *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная рациональная дробь, и знаменатель* $Q(x)$ *представлен в виде*
$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{m_s}$,
где $p_i^2 - 4q_i < 0$.
Тогда имеет место следующее разложение

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{A_j^{(1)}}{x - x_j} + \ldots + \frac{A_j^{(k_j)}}{(x - x_j)^{k_j}} \right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{B_i^{(1)}x+C_i^{(1)}}{x^2+p_ix+q_i}+\ldots+\frac{B_i^{(m_i)}x+C_i^{(m_i)}}{(x^2+p_ix+q_i)^{m_i}}\right),$$

где

$$A_j^{(1)},A_j^{(2)},\ldots,A_j^{(k_j)},j=1,2,\ldots,r;\ B_i^{(1)},B_i^{(2)},\ldots,B_i^{(m_i)},$$

$C_i^{(1)},C_i^{(2)},\ldots,C_i^{(m_i)},i=1,2\ldots s,$ – *действительные числа.*

Следствие 1.2.1 *Интегрирование правильных рациональных дробей сводится к вычислению интегралов вида:*

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}\,dx\quad \textit{и}\quad \int\frac{Ax+B}{(x^2+p\,x+q)^n}\,dx,$$

где $p^2-4q<0$ *, а* n *– натуральное.*

Подынтегральные функции $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ и $\dfrac{Ax+B}{(x^2+p\,x+q)^n}$ называются *простейшими* дробями.

Замечание. Вид разложения правильной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших зависит только от знаменателя $Q(x)$.

Для иллюстрации теоремы приведем вид разложения для ряда правильных дробей без вычисления коэффициентов.

$$\frac{5x-1}{(x+3)(x+4)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x+3};$$

$$\frac{4x+1}{(x+3)(x+4)x(x-2)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-2};$$

$$\frac{5x^2+1}{(x+3)(x+1)^3}=\frac{A}{x+3}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3};$$

$$\frac{4x+1}{(x^2+x+1)\,x(x-2)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-2};$$

$$\frac{4x^3+3}{(x^2+x+1)^2\,x(x-2)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+x+1}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+x+1)^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-2};$$

$$\frac{3x-6}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Пример 1.6.2. Вычислить интеграл

$$\int \frac{1}{x^2+7x+12}\,dx.$$

Решение: Подынтегральное выражение является правильной дробью. Для вычисления интеграла представим эту дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого сначала найдем корни знаменателя и разложим его на линейные множители

$$x^2+7x+12 = (x+3)(x+4).$$

Тогда существуют такие числа A и B, что

$$\frac{1}{x^2+7x+12} = \frac{1}{(x+4)(x+3)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+3} =$$

$$= \frac{Ax+3A+Bx+4B}{(x+4)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A+4B)}{(x+4)(x+3)}.$$

Полученная дробь должна совпадать с исходной при любых x, следовательно, коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях обеих дробей должны быть равными. Отсюда

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + 4B = 1 \end{cases},$$

то есть $A=-1$, $B=1$. Таким образом, исходную дробь можно представить в виде

$$\frac{1}{x^2+7x+12} = \frac{-1}{x+4} + \frac{1}{x+3}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{1}{x^2+7x+12}\,dx = \int \frac{-1}{x+4}\,dx + \int \frac{1}{x+3}\,dx =$$

$$= -\ln|x+4| + \ln|x+3| + C.$$

1.6.1.3 Интегрирование простейших дробей

Из теоремы о разложении правильной рациональной дроби вытекает, что любую правильную рациональную дробь можно представить в виде линейной комбинации дробей вида:

$$1)\frac{A}{x-a},\quad 2)\frac{A}{(x-a)^n},\quad 3)\frac{Ax+B}{x^2+px+q},$$

$$4)\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},\ (p^2-4q)<0.$$

Эти дроби называются *простейшими* дробями. Вычислим интегралы от этих дробей.

$$1)\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\int\frac{1}{x-a}\,d(x-a)=A\ln|x-a|+C$$

$$2)\int\frac{A}{(x-a)^n}\,dx=A\int(x-a)^{-n}\,d(x-a)=\frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C.$$

$$3)\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+\frac{p^2}{4}\right)+q-\frac{p^2}{4}}\,dx=$$

$$=\int\frac{A\left(x+\frac{p}{2}\right)+B-A\frac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}\,d\left(x+\frac{p}{2}\right)$$

Сделаем замену $t=x+\frac{p}{2}$ и обозначим

$$B-A\frac{p}{2}=M, q-\frac{p^2}{4}=L^2.$$

Тогда искомый интеграл перепишется в виде

$$\int\frac{At+M}{t^2+L^2}\,dt=\frac{A}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+L^2}+M\int\frac{1}{t^2+L^2}\,dt=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{d(t^2+L^2)}{t^2+L^2}+M\int\frac{1}{t^2+L^2}\,dt=$$

$$= \frac{A}{2}\ln(t^2+L^2) + \frac{M}{L}\operatorname{arctg}\frac{t}{L} + C =$$
$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{M}{L}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2L} + C.$$

4) Метод интегрирования простейших дробей последнего типа изложен в лекциях.

Пример 1.6.3. Вычислить интеграл

$$\int \frac{7}{(5x+12)^9}\,dx.$$

Решение: Сделаем замену $t = 5x+12$, тогда $dt = 5dx$. Следовательно,

$$\int \frac{7}{(5x+12)^9}\,dx = \frac{7}{5}\int\frac{dt}{t^9} = \frac{7}{5}\frac{t^{-8}}{(-8)} + C = \frac{-7}{40(5x+12)^8} + C$$

Пример 1.6.4. Вычислить интеграл

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+3}\,dx.$$

Решение:

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{3x+5}{(x^2+2x+1)+2}\,dx = \int \frac{3(x+1)+2}{(x+1)^2+2}\,dx$$

Сделаем замену $t = x+1$, $dt = dx$. Тогда искомый интеграл перепишется в виде

$$\int \frac{3(x+1)+2}{(x+1)^2+2}\,dx = \int\frac{3t+2}{t^2+2}\,dt = \int\frac{3t}{t^2+2}\,dt + \int\frac{2}{t^2+2}\,dt =$$
$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+2) + \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$
$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+3) + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

1.6.1.4 Схема интегрирования рациональных дробей

1. Определить тип заданной рациональной дроби (неправильная, правильная, простейшая).
2. Если дробь неправильная, то представить её в виде суммы многочлена и правильной дроби.
3. Если дробь правильная, то представить её в виде суммы простейших дробей.
4. Проинтегрировать полученные выражения.

Пример 1.6.5. Вычислить интеграл

$$\int \frac{2x^3+3x^2+8x+8}{x^4+2x^3+4x^2}\,dx$$

Решение: Подынтегральное выражение является правильной дробью. Для вычисления интеграла представим эту дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого сначала найдем корни знаменателя и разложим его на множители

$$x^4+2x^3+4x^2 = x^2(x^2+2x+4)$$

Тогда разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{2x^3+3x^2+8x+8}{x^4+2x^3+4x^2} = \frac{2x^3+3x^2+8x+8}{x^2(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+4} =$$

$$= \frac{Ax^3+2Ax^2+4Ax+Bx^2+2Bx+4B+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+2x+4)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(4A+2B)x+4B}{x^2(x^2+2x+4)}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях, получаем

$$\left\{\begin{array}{rcl} A+C &=& 2 \\ 2A+B+D &=& 3 \\ 4A+2B &=& 8 \\ 4B &=& 8 \end{array}\right. ,$$

откуда $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = -1$.

Следовательно,

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 8x + 8}{x^4 + 2x^3 + 4x^2}\, dx = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x^2} +$$

$$+ \int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 4}\, dx$$

Дальнейшие вычисления провести самостоятельно.

Пример 1.6.6. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2 + 5x + 8}{x+1}\, dx.$$

Решение: Подынтегральное выражение является неправильной дробью. Для вычисления интеграла представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби

$$\int \frac{x^2 + 5x + 8}{x+1}\, dx = \int \left(x + 4 + \frac{4}{x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + 4\ln|x+1| + C$$

1.6.2 Интегрирование тригонометрических выражений

1.6.2.1 Интегрирование произведений синусов и косинусов от разных аргументов

Интегралы вида

$$\int \sin\alpha x \cos\beta x\, dx, \ \int \sin\alpha x \sin\beta x\, dx, \int \cos\alpha x \cos\beta x\, dx$$

вычисляются с применением формул

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x)$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x)$$
$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x)$$

Пример 1.6.7.

$$\int\sin 5x\sin 3xdx=\frac{1}{2}\int\cos 2xdx-\frac{1}{2}\int\cos 8xdx=$$
$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$$

1.6.2.2 Интегрирование произведений степеней синуса и косинуса с одинаковыми аргументами

$$\int\sin^n x\cos^m x\,dx$$

1. n и m - *целые* числа, и хотя бы одно из чисел n, m - *нечетное.* Замена $t=\sin x$ при нечетном m
(или $t=\cos x$ при нечетном n).

   Пример 1.6.8.

$$\int\sin^6 x\cos^5 xdx=\int\sin^6 x\cos^4 x\cos xdx=$$
$$=\int\sin^6 x(1-\sin^2 x)^2 d\sin x=\int t^6(1-t^2)^2dt=$$
$$=\frac{t^7}{7}-\frac{2t^9}{9}+\frac{t^{11}}{11}+C=\frac{\sin^7 x}{7}-\frac{2\sin^9 x}{9}+\frac{\sin^{11} x}{11}+C$$

   Пример 1.6.9.

$$\int\frac{\sin^4 x}{\cos x}dx=\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\cos xdx=$$

$$= \int \frac{\sin^4 x}{(1-\sin^2 x)}\, d\sin x = \int \frac{t^4}{(1-t)(1+t)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt - \int (t^2+1)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\ln|1-t| + \ln|1+t|\right) - \frac{t^3}{3} - t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| - \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

2. n и m – *четные положительные числа.* Можно понизить степени тригонометрических функций с помощью формул

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

<u>Пример 1.6.10.</u>

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx\right) =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

3. n и m - *четные* и *хотя бы одно* из них *отрицательно.* Подстановка $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$.

<u>Пример 1.6.11.</u>

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x) d \operatorname{tg} x = \int (t^2 + t^4) dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C$$

4. $(n+m)$ - *четное отрицательное* число. Подстановка $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 1.6.12.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x \sin^3 x}}$$

Решение: Поскольку $n + m = -2$, то подстановка $t = \operatorname{tg} x$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x \sin^3 x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\cos^4 x \operatorname{tg}^3 x}} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}} =$$

$$= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}} = \frac{(\operatorname{tg} x)^{-1/2}}{-1/2} + C = -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + C.$$

1.6.2.3 Универсальная тригонометрическая подстановка

Определение 1.3 *Функция $R(u, v)$ называется* ***рациональной функцией двух переменных****, если она представляет собой отношение многочленов* ***двух переменных*** *$P(u, v)$ и $Q(u, v)$:*

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}.$$

Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

где $R(u, v)$ - рациональная функция, сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \ \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \ \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\, t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 1.6.13.

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = 2\int \frac{dt}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)(1+t^2)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C.$$

1.6.2.4 Частные тригонометрические подстановки

1. Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ нечетна относительно $\sin x$, т.е.

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то можно использовать подстановку $t = \cos x$.

Пример 1.6.14.

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+2\cos x}dx.$$

Решение: Положим $t = \cos x$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+2\cos x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{1+2\cos x}\,dx = -\int \frac{(1-t^2)}{1+2t}\,dt$$

Доделать самостоятельно.

2. Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ нечетна относительно $\cos x$, т.е.

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то можно использовать подстановку $t = \sin x$.

3. Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то можно использовать подстановку $t = \operatorname{tg} x$. При этом

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 1.6.15.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x - 3\cos^2 x} dx$$

Решение: Поскольку подынтегральное выражение не меняется при замене $\sin x$ на $(-\sin x)$ и $\cos x$ на $(-\cos x)$, то положим $t = \operatorname{tg} x$.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x - 3\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\dfrac{t^2}{1+t^2} - \dfrac{3}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{1}{t^2-3}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\ln|t-\sqrt{3}| - \ln|t+\sqrt{3}| \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}} \right| + C$$

1.6.3 Интегрирование иррациональных функций

1.6.3.1 Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

Пусть R- рациональная функция, $r_1, \dots, r_n$ - рациональные числа. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx$$

сводятся к интегралам от рациональной дроби заменой

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d},$$

где m - наименьший общий знаменатель дробей

$$r_1 = \frac{p_1}{m_1}, \ldots, r_n = \frac{p_n}{m_n}.$$

Приведем два частных случая интегрирования дробно-линейных иррациональностей.

1. Интегралы вида
$$\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right) dx$$
сводятся к интегралам от рациональной дроби
заменой $x = t^n$.

2. Интегралы вида
$$\int R\left(x, \left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\right) dx$$
сводятся к интегралам от рациональной дроби заменой.
$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Пример 1.6.16. Вычислить интеграл $\int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$

Решение:

Сделаем замену $t = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$, тогда $x = \frac{1}{t^2-1}$, $dx = \frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$. Тогда

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx = \int \frac{-2t^2 dt}{(t^2-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{t-1} - \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2(t-1)} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}+1} + \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}-1} + C$$

Пример 1.6.17. Вычислить интеграл $\int \frac{x+3+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx.$

Решение: Замена $t = x^{1/6}$, тогда $x = t^6, dx = 6t^5dt$. Тогда

$$\int \frac{x+3+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{(t^6+3+t^3)6t^5dt}{t^2} = 6\int (t^9+t^6+3t^3)dt =$$

$$= \frac{3}{5}t^{10} + \frac{6}{7}t^7 + \frac{9}{2}t^4 + C = \frac{3}{5}x^{5/3} + \frac{6}{7}x^{7/6} + \frac{9}{2}x^{2/3} + C$$

1.6.3.2 Интегрирование квадратических иррациональностей с помощью тригонометрических (гиперболических) подстановок

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)dx$$

после выделения под знаком радикала полного квадрата и использования линейной подстановки $t = x + \frac{B}{2A}$ сводятся к интегралам одного из следующих трех типов

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx,$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx.$$

После использования надлежащей тригонометрической подстановки интегралы этих трех типов сводятся к интегралам от функции, рационально зависящей от $\sin x$ и $\cos x$.

1.
$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx.$$

Подстановка $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$). Тогда при $x = a\sin t$ имеем $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = a\cdot\cos t, dx = a\cdot\cos t dt.$

2.
$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx.$$

Подстановка $x = a\cdot\operatorname{tg} t$ (или $x = a\cdot\operatorname{ctg} t$). Тогда при $x = a\cdot\operatorname{tg} t$ имеем $\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2(1+\operatorname{tg}^2 t)} = \dfrac{a}{\cos t}; dx = \dfrac{adt}{\cos^2 t}.$

3.
$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx.$$

Подстановка $x = \dfrac{a}{\sin t}$ $\left(\text{или } x = \dfrac{a}{\cos t}\right)$. При $x = \dfrac{a}{\sin t}$ имеем

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = \sqrt{\frac{a^2(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t} - a^2} = \frac{a\cos t}{\sin t};$$

$$dx = -\frac{a\cos t dt}{\sin^2 t}, t = \arcsin\frac{a}{x}.$$

<u>Пример 1.6.18.</u> $\displaystyle\int x\sqrt{9-x^2}\,dx$

<u>Решение</u>: Это интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$, поэтому используем замену $x = 3\sin t$. Тогда

$$\int x\sqrt{9-x^2}\,dx = \int 3\sin t\cdot 3\cos t\cdot 3\cos t dt =$$

$$= -27\int \cos^2 t\cdot d(\cos t) = -27\frac{\cos^3 t}{3} + C = -9\cos^3 t + C =$$

$$= -9\frac{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3}{27} + C = -\frac{1}{3}(9-x^2)^{3/2} + C.$$

Пример 1.6.19.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx$$

Решение: Это интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, используем замену $x = 2\operatorname{tg} t$. Тогда $\sqrt{x^2+2^2} = 2\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 t)} = \dfrac{2}{\cos t}$;
$dx = \dfrac{2dt}{\cos^2 t}$ и, следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx = \int \frac{2}{\cos t \cdot 2\operatorname{tg} t}\frac{2dt}{\cos^2 t} = 2\int \frac{1}{\sin t \cdot \cos^2 t}dt =$$

$$= 2\int \frac{\sin t \cdot dt}{\sin^2 t \cdot \cos^2 t} = -2\int \frac{du}{(1-u^2)u^2},$$

где $u = \cos t$. Представив подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей, получим:

$$-2\int \frac{du}{u^2(1-u)(1+u)} = -\int \left(\frac{2}{u^2} + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{u} - \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \frac{2}{\sin t} - \ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{4+x^2}}{x} - \ln\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{\sqrt{4+x^2}-x} + C.$$

На последнем шаге пользуемся равенством.

$$\sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}.$$

Пример 1.6.20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

Решение: Это интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ поэтому используем замену $x = \dfrac{3}{\sin t}$. Тогда $t = \arcsin\dfrac{3}{x}$,

$$\sqrt{x^2-3^2} = \sqrt{\frac{3^2}{\sin^2 t} - 3^2} = \sqrt{\frac{3^2(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t}} = \frac{3\cos t}{\sin t},$$

$$dx = -\frac{3\cos t dt}{\sin^2 t}.$$

Следовательно

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{\sin t \cdot \sin t}{3 \cdot 3\cos t} \frac{(-3\cos t)dt}{\sin^2 t} =$$

$$= -\int \frac{dt}{3} = -\frac{t}{3} + C = -\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{x} + C.$$

При вычислении интегралов вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx, \int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right) dx,$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$$

свести подынтегральную функцию к рациональной можно также с помощью *гиперболических* подстановок.

Напомним, что гиперболические функции определяются следующим образом.

$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ - *гиперболический синус*;

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ - *гиперболический косинус*;

$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ - *гиперболический тангенс.*

Нетрудно проверить, что справедливы соотношения:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;\ \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}(2x);\ \operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;\ (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

Глядя на эти равенства, нетрудно догадаться, какую подстановку нужно использовать при вычислении интеграла с квадратичной иррациональностью.

При этом, если $x = \operatorname{sh} t$, то $dx = \operatorname{ch} t \cdot dt$ и $t = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Пример 1.6.21. $\int \sqrt{9+x^2}dx$

Решение: Поскольку $\operatorname{ch}^2 t = \operatorname{sh}^2 t + 1$, положим $x = 3 \operatorname{sh} t$, тогда $t = \ln\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{x^2+9}\right)$, $dx = 3 \operatorname{ch} t \cdot dt$ и, следовательно,

$$\int \sqrt{9+x^2}dx = \int \sqrt{9+9\operatorname{sh}^2 t} \cdot 3 \operatorname{ch} t dt = 9 \int \operatorname{ch}^2 t \cdot dt =$$

$$= 9 \int \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} dt = 9 \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{8} + \frac{9}{2} t + C =$$

$$= \frac{9}{4} \operatorname{sh}(2t) + \frac{9}{2} \cdot t + C = \frac{9}{2} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + \frac{9}{2} \cdot t + C =$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{9+x^2} + \frac{9}{2} \ln\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{x^2+9}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{9+x^2} + \frac{9}{2} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+9}) + C_1.$$

2 Определенный интеграл

2.1 Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Задача о нахождении площади криволинейной трапеции

Рассмотрим *криволинейную трапецию* D, ограниченную отрезком $[a, b]$ оси Ox, графиком непрерывной функции $y = f(x) > 0$, заданной на отрезке $[a, b]$, и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.

$y = f(x)$

Задача о нахождении площади криволинейной трапеции D приводит к понятию «определенный интеграл», который обозначается $\int_a^b f(x)dx$. При этом площадь криволинейной трапеции D равна $S(D) = \int_a^b f(x)dx$. Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Задача о нахождении работы переменной силы

Пусть материальная точка перемещается под действием переменной силы $F = F(x)$ вдоль оси Ox. Вычисление *работы* A переменной силы по перемещению из точки $x = a$ в точку $x = b$, $(a < b)$ сводится к вычислению определенного интеграла

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Задача о нахождении пути материальной точки при движении с переменной скоростью v(t)

Путь S материальной точки, пройденный за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$ вычисляется с помощью определенного интеграла от абсолютной величины скорости

$$S = \int_a^b |v(t)|dt.$$

Задача о нахождении массы неоднородного стержня

Масса m неоднородного стержня плотности $\rho = \rho(x)$ на отрезке $[a, b]$ сводится к вычислению определенного интеграла

$$m = \int_a^b \rho(x)dx.$$

2.2 Свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

2. Интеграл от суммы равен сумме интегралов

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Из 1 и 2 следует, что для любых постоянных C_1 и C_2

$$\int_a^b (C_1f_1(x) + C_2f_2(x))dx = C_1\int_a^b f_1(x)dx + C_2\int_a^b f_2(x)dx.$$

Последнее равенство называют свойством *линейности* определённого интеграла.

3. Свойство аддитивности. Для любых трех чисел a, b, c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

если все эти интегралы существуют.

4.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

5.

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

6. Интегрирование неравенств. Если на отрезке $[a, b]$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

В частности, если $f(x) \geqslant 0$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

Отметим еще одно полезное неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

7. Теорема об оценке.

Теорема 2.1 *Если m и M - наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

8. Теорема о среднем.

Теорема 2.2 *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

9. Теорема о производной определенного интеграла по верхнему пределу.

Теорема 2.3 *Если f(x) - непрерывная функция и*
$\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ *то*

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Отсюда следует, что всякая непрерывная функция имеет первообразную.

2.3 Непосредственное интегрирование по формуле Ньютона-Лейбница

Формула Ньютона - Лейбница. Если $F(x)$ является первообразной непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Правая часть обозначается $F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b$ и формула Ньютона - Лейбница записывается в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 2.3.1.

$$\int_1^2 \frac{x+4}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_1^2 \frac{4}{x^2}dx =$$

$$= \ln|x|\Big|_1^2 - \frac{4}{x}\Big|_1^2 = \ln 2 - \left(\frac{4}{2} - \frac{4}{1}\right) = \ln 2 + 2$$

Пример 2.3.2.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Пример 2.3.3. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\sin x dx =$

$$= -\int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)d(\cos x) = \left(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

2.4 Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 2.4 *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, функция $\varphi(t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, где $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, а также множество значений функции $\varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ принадлежит отрезку $[a, b]$, то*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 2.4.1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{2x+5}{\sqrt{x+2}}dx.$

Решение: Сделаем замену $t = \sqrt{x+2}$, откуда $x = t^2 - 2$, $x' = 2t$. Новые пределы интегрирования $\alpha = \sqrt{-1+2} = 1$, $\beta = \sqrt{2+2} = 2$. Тогда

$$\int_{-1}^{2} \frac{2x+5}{\sqrt{x+2}}dx = \int_1^2 \frac{(2t^2+1)2t}{t}dt = 2\int_1^2 (2t^2+1)dt =$$

$$= \left(\frac{4}{3}t^3 + 2t\right)\Bigg|_1^2 = \frac{32}{3} - \frac{4}{3} + (4-2) = \frac{34}{3}.$$

2.5 Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 2.5 *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.

Пример 2.5.1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x dx$.

<u>Решение</u>: Пусть $u = x, dv = \sin x dx$. Тогда $du = dx, v = -\cos x$.

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

<u>Пример 2.5.2.</u> $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x \big|_0^1 - \int_0^{1/2} \frac{x}{1+x^2} dx =$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

Здесь $u = x, v = \operatorname{arctg} x$.

2.6 Геометрические приложения определенного интеграла

2.6.1 Вычисление площадей, ограниченных кривыми, заданными в декартовых координатах

Рассмотрим *плоскую область* D, ограниченную графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x), f_1(x) \leqslant f_2(x)$, заданными на отрезке $[a, b]$, и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$(см. рис.). Требуется найти площадь области D.

y Рис. 2 D $f_2(x)$ $f_1(x)$

Эту площадь можно найти по формуле

$$S(D) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Пример 2.6.1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x$ и $y = 2x - x^2$.

Решение: Найдем абсциссы точек пересечения указанных графиков, то есть корни уравнения $2x - x^2 = -x, -x^2 + 3x = 0$. Эти корни $x_1 = a = 0, x_2 = b = 3$ определяют пределы интегрирования. Так как на интервале $[0, 3]$ прямая проходит ниже параболы $y = 2x - x^2$, то

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

2.6.2 Вычисление площадей, ограниченных кривыми, заданных параметрически

Рассмотрим криволинейную трапецию D, ограниченную отрезком $[a, b]$ оси Ox, вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, графиком неотрицательной непрерывной функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \text{при } t =\in [\alpha, \beta].$$

Здесь α и β определяются из равенств $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$, а функция $x = x(t)$ имеет непрерывную неотрицательную производную $x'(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$.

Тогда площадь криволинейной трапеции D находится по формуле

$$S(D) = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt.$$

Пример 2.6.2. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Решение: Перейдем к параметрической записи

$x = 5\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ t \in [0,\, 2\pi]$. Ограничимся вычислением площади верхней половины. Здесь x меняется от (-5) до 5, следовательно, t меняется от π до 0.

Рис. 53.

$$\frac{1}{2}S = \int_{\pi}^{0} 2\sin t \cdot (5\cos t)' dt = 5\int_{0}^{\pi} 2\sin^2 t dt =$$

$$= 5\int_{0}^{\pi} (1 - \cos 2t) dt = 5\pi$$

Следовательно, $S = 10\pi$.

2.6.3 Вычисление площадей в полярных координатах

Напомним, что полярными координатами точки M является пара чисел (ρ, φ), где $\rho > 0$ – длина отрезка MO – полярный радиус, $\varphi, \varphi \in [0,\, 2\pi]$, – угол между MO и полярной осью (см. рис.). Положительным направлением полярного угла φ будем считать его изменение против часовой стрелки.

$O\ \varphi\ M$ Рис. 4.

$y = \rho\sin\varphi$

Рис. 5. $O\ y\ M\ x = \rho\cos\varphi$

Если совместить начало декартовой системы координат с полюсом, а положительную полуось Ox - с полярной осью, то связь между полярными и декартовыми координатами точки M выражается с помощью формул

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi,$$

и, следовательно,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Вычисление площади криволинейного сектора.

$\beta\ O\ \rho = \rho(\varphi)$

Рис. 6.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного дугой кривой, заданной уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi.$$

Если область на плоскости ограничена дугами кривых, уравнения которых заданы в полярных координатах в виде $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi) \leqslant \rho_2(\varphi)$, и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$,

$\rho = \rho_1(\varphi)$ β O α $\rho = \rho_2(\varphi)$

Рис. 7.

то площадь такой области (как разность площадей криволинейных секторов, ограниченных кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$) определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (\rho_2^2 - \rho_1^2) d\varphi.$$

Пример 2.6.3. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\rho^2 = 9 \cos 2\varphi$.

Решение: Вычислим площадь четверти данной фигуры, лежащей в первой четверти, т.е.$\varphi \in [o,\, \pi/4]$.

$$\frac{1}{4} S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 9 \cos 2\varphi \cdot d\varphi = \frac{9}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = \frac{9}{4}$$

Следовательно, $S = 9$.

2.6.4 Вычисление объема тела через площади его сечений

Пусть имеется некоторое тело, для которого известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox, являющаяся функцией от $x : Q = Q(x)$. Объем рассматриваемого тела в предположении, что Q – непрерывная функция, равен определенному интегралу

$$V = \int_a^b Q(x)dx.$$

Пример 2.6.4. Найти объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$.

Рис. [illegible]8.

Решение: При $x = const$ сечениями будут эллипсы $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{25} = 1 - \dfrac{x^2}{4}$ с площадью $Q(x) = 15\pi\left(1 - \dfrac{x^2}{4}\right)$. Тогда объем эллипсоида

$$V = 15\pi \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = 15\pi \left(x - \frac{1}{12}x^3\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 40\pi.$$

2.6.5 Вычисление объема тела вращения

Пусть требуется определить объем ***тела вращения***,

$y = f(x)$
Рис. 49.

образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной частью графика функции $y = f(x)$ от $x = a$ до $x = b$, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и осью $y = 0$. Площадь сечения такого тела плоскостью $x = const$ равна $Q(x) = \pi y^2 = \pi(f(x))^2$, и формула вычисления объема в этом случае имеет вид

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$ и $x = 0$, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_c^b x^2 dy = \pi \int_a^b (\varphi(y))^2 dy.$$

Пример 2.6.5. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = \dfrac{3}{2}\cos x$ и прямой $y = 0$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$.

Решение: При вращении кривой $y = \dfrac{3}{2}\cos x$ вокруг оси Ox возникает тело вращения

$-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}$ y

Рис. 10.

Найдём объём этого тела вращения.

$$V=\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}y^2dx=\frac{9\pi}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x)^2dx=$$

$$=\frac{9\pi}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx=\frac{9\pi}{8}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{9\pi^2}{8}.$$

Пример 2.6.6. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной аркой *циклоиды*, заданной на плоскости xOy параметрическими уравнениями

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ a>0,$$

лежащей между точками $O(0,0)$ (соответствует $t=0$) и $A(2\pi a,0)$ (соответствует $t=2\pi$).

A $2\pi a$ O y

Рис. 11.

Решение:

$$V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2dx=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2ad(t-\sin t)=$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt.$$

Этот интеграл предлагается вычислить самостоятельно.
Ответ: $V = 5\pi^2 a^3$.

2.6.6 Вычисление площади поверхности вращения

Пусть требуется определить площадь поверхности ***вращения***, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $y = f(x)$, $f(x) \geqslant 0$, от $x = a$ до $x = b$.

Формула для площади поверхности вращения имеет вид

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Если кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{при } t = \in [\alpha, \beta],$$

то площадь поверхности вращения примет вид

$$S = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Пример 2.6.7. Найти площадь поверхности вращения, полученной при вращении дуги циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, вокруг оси Ox.

Рис. 12.

<u>Решение</u>: Имеем $x' = 1 - \cos t,\ y' = \sin t$ и, следовательно,

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{(2-2\cos t)}dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t) 2\sin(t/2)dt = \frac{64\pi}{3}.$$

Указание. Для вычисления интеграла воспользоваться формулой

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x)$$

2.6.7 Вычисление длины дуги с помощью определенного интеграла

Длина дуги в декартовых координатах.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на отрезке $[a, b]$ вместе со своей производной. Если кривая задана уравнением $y = f(x), a \leqslant x \leqslant b$, то формула для вычисления длины дуги имеет вид

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx.$$

Длина дуги кривой, заданной в параметрической форме. Если кривая задана параметрически

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x(t), \\ y & = & y(t) \end{array} \right. \quad \text{при } t =\in [\alpha, \beta].$$

$x(t)$ и $y(t)$ - непрерывные функции с непрерывными производными, то длина дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Если пространственная линия задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad \text{то} \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t)^2)}dt$$

Длина дуги в полярных координатах.

Если кривая задана в полярных координатах

$$\rho = \rho(\varphi), \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,$$

то длина дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Пример 2.6.8. Найти длину дуги полукубической параболы

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3},\ 0 \leqslant x \leqslant 3.$$

Решение: Имеем $y' = \sqrt{x}$ и, следовательно,

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + x} dx = \frac{2}{3}(1 + x)^{3/2}\Big|_0^3 = \frac{14}{3}.$$

Пример 2.6.9. Найти длину дуги одной арки циклоиды

$$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Решение: Имеем $x' = 1 - \cos t,\ y' = \sin t$ и, следовательно,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2 - 2\cos t)} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2|\sin(t/2)|dt = \int_0^{2\pi} 2\sin(t/2)dt = 8.$$

Пример 2.6.10. Найти длину дуги кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$.

Решение: Имеем $\rho = 1 + \cos\varphi$, $\rho' = -\sin\varphi$ и, следовательно,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2 + 2\cos\varphi)} d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2|\cos(\varphi/2|d\varphi = 2\int_0^{\pi} 2\cos(\varphi/2)d\varphi = 8\sin(\varphi/2)\Big|_0^{\pi} = 8.$$

2.7 Приложения определенного интеграла в механике и физике

2.7.1 Работа переменной силы

Пусть материальная точка перемещается под действием переменной силы $F = F(x)$ вдоль оси Ox. Работа A переменной силы по перемещению из точки $x = a$ в точку $x = b$ $(a < b)$ вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Пример 2.7.1. Какую работу нужно совершить, чтобы поднять тело массы m с уровня h от поверхности Земли на высоту H?

Решение: Будем рассматривать тело как материальную точку. Тело перемещается, преодолевая действие переменной силы тяготения $F = \gamma \dfrac{mM}{x^2}$, где x - расстояние до центра Земли.

Пусть радиус Земли равен R.

$$A = \int_{R+h}^{R+H} \gamma \frac{mM}{x^2} dx = -\gamma \frac{mM}{x}\Big|_{R+h}^{R+H} =$$

$$= \gamma mM \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R+H} \right)$$

На поверхности Земли $mg = \gamma \dfrac{mM}{R^2}$ и, следовательно,

$$A = \frac{\gamma mM}{R^2} R^2 \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R+H} \right) = mg \frac{H-h}{(R+h)(R+H)} R^2 =$$

$$= mg \frac{H-h}{\left(1+\dfrac{h}{R}\right)\left(1+\dfrac{H}{R}\right)}.$$

Пример 2.7.2. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 3 *см*, если сила в $10H$ растягивает ее на 1 *см*? Считать, что для таких растяжений справедлив закон Гука.

Решение: По закону Гука $F = kx$, где k - коэффициент пропорциональности. По условию $10H = k \cdot 0,01$ *м*.

$$A = \int_0^{0,03} kx dx = k \frac{x^2}{2} \bigg|_0^{0,03} = \frac{10^3}{2} \cdot 9 \cdot 10^{-4} (\text{Дж}) = 4,5 \cdot 10^{-1} (\text{Дж})$$

2.7.2 Путь и перемещение при движении с переменной скоростью

Пусть материальная точка движется вдоль прямой с переменной скоростью $v(t)$. Путь S, пройденный за промежуток времени от $t = t_0$ до $t = t_1$, вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)| dt.$$

. Если x_0 - координата точки в момент времени $t = t_0$, x_1 - координата в момент времени $t = t_1$, то

$$x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt.$$

Пример 2.7.3. Пусть материальная точка движется вдоль прямой с переменной скоростью (гармонические колебания)

$$v(t) = \frac{2\pi}{T} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi \right),$$

где T – период, φ – начальная фаза. Пусть $\varphi = 0$ и в момент времени $t_0 = 0$ координата точки $x_0 = 0$. Найти координату точки в момент времени t_1 и путь, пройденный к этому моменту: а)$t_1 = \dfrac{1}{4T}$; б) $t_1 = \dfrac{1}{2T}$.

<u>Решение</u>: Обозначим $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Тогда имеем

$$x_1 = x_0 + \omega \int_{t_0}^{t_1} \cos(\omega t) dt = \sin(\omega t)\Big|_0^{t_1} = \sin(\omega t_1).$$

$$\text{а) } x_1 = \sin(\omega(T/4)) = \sin(\pi/2) = 1;$$

$$\text{б) } x_1 = \sin(\varphi(T/2)) = \sin(\pi) = 0 = x_0,$$

т. е. за половину периода точка возвращается в исходное положение. Вычислим теперь пройденный путь.

$$S = \int_{t_0}^{t_1} |\nu(t)| dt = \omega \int_0^{t_1} |\cos(\omega t)| dt = \int_0^{\omega t_1} |\cos(s)| ds$$

$$\text{а) } S = \int_0^{\pi/2} |\cos(s)| ds = \int_0^{\pi/2} \cos(s) ds = 1;$$

$$\text{б) } S = \int_0^{\pi} |\cos(s)| ds = 2\int_0^{\pi/2} \cos(s) ds = 2.$$

2.7.3 Вычисление статических моментов и координат центра масс

Статические моменты и центр тяжести плоской кривой.

Пусть однородная дуга $L = AB$ с линейной плотностью $\rho = const$ задана графиком непрерывно дифференцируемой функции на отрезке $[a, b]$.

$y = f(x)$

Рис. 13.

Статические моменты M_x и M_y кривой AB относительно осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$M_x = \rho \int_a^b y ds = \rho \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx = \rho \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx;$$

$$M_y = \rho \int_a^b x ds = \rho \int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}dx = \rho \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Масса дуги $L = AB$ с линейной плотностью $\rho = const$ определяется по формуле

$$M = \rho \int_a^b ds = \rho \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx = \rho \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Координаты *центра тяжести (центра масс)*

$$x_c = \frac{M_y}{M},\ y_c = \frac{M_x}{M}.$$

Если рассматриваемая дуга L *симметрична* относительно некоторой прямой, то центр тяжести *лежит на этой прямой.*

Моменты инерции I_x и I_y кривой L относительно осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$I_x = \rho \int_a^b y^2 ds = \rho \int_a^b y^2\sqrt{1+(y')^2}dx;$$

$$I_y = \rho \int_a^b x^2 ds = \rho \int_a^b x^2\sqrt{1+(y')^2}dx.$$

Замечание. Если кривая L задана *параметрически*

$$\begin{cases} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{cases} \quad \text{при } t =\in [\alpha, \beta],$$

то во всех приведенных выше формулах дифференциал дуги

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Например, формула для массы примет вид

$$M = \rho \int_a^b ds = \rho \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Пример 2.7.4. Найти статические моменты M_x ,M_y, центр тяжести и моменты инерции I_x и I_y однородной ($\rho = 1$) четверти окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Решение: Перейдем к параметрическим уравнениям четверти окружности

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t, t \in [0,\ \pi/2].$$

В данном случае $ds = dt$ и, следовательно,

$$M_x = \int_0^R yds = \int_0^{\pi/2} R\sin tRdt = -R^2\cos t\Big|_0^{\pi/2} = R^2;$$

$$M_y = \int_0^R xds = \int_0^{\pi/2} R\cos tRdt = R^2\sin t\Big|_0^{\pi/2} = R^2;$$

$$M = \int_0^R ds = R\int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi R}{2}.$$

Координаты *центра масс*

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{2R}{\pi},\ y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{2R}{\pi}.$$

Моменты инерции I_x и I_y четверти окружности относительно осей Ox и Oy

$$I_x = \rho\int_a^b y^2ds = \int_0^{\pi/2} R^2\sin^2 tRdt = \frac{R^3}{2}\int_0^{\pi/2}(1 - \cos 2t)dt =$$

$$= \frac{R^3}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^3}{4};$$

$$I_y = \rho\int_a^b x^2 ds = \int_0^{\pi/2} R^2\cos^2 tRdt = \frac{R^3}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{R^3}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^3}{4}.$$

Статические моменты и центр тяжести плоской фигуры.

Рассмотрим плоскую пластину, имеющую вид *криволинейной трапеции* D . Она ограничена отрезком $[a,b]$ оси Ox, графиком непрерывной функции $y = f(x) > 0$, заданной на отрезке $[a,b]$, и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.

$y = f(x)$ D Рис. 14.

Будем считать, что на пластине D распределена масса с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x)$.

Статические моменты M_x и M_y пластины D относительно осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho\cdot y^2 dx = \frac{1}{2}\int_a^b \rho(x)f^2(x)dx;$$

$$M_y = \int_a^b \rho\cdot x\cdot ydx = \int_a^b \rho(x)\cdot x\cdot f(x)dx.$$

Масса M пластины D определяется по формуле

$$M = \int_a^b \rho \cdot y dx = \int_a^b \rho(x) \cdot f(x) dx.$$

Координаты *центра масс*

$$x_c = \frac{M_y}{M},\ y_c = \frac{M_x}{M}.$$

Моменты инерции I_x и I_y пластины D относительно осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \rho \cdot y^3 dx = \frac{1}{3}\int_a^b \rho(x) f^3(x) dx;$$

$$I_y = \int_a^b \rho \cdot x^2 \cdot y dx = \int_a^b \rho(x) \cdot x^2 \cdot f(x) dx.$$

Пример 2.7.5. Найти статические моменты M_x , M_y и центр тяжести однородной ($\rho = 1$) пластины D , имеющей вид «четверти эллипса»

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

Решение: Перейдем к параметрическим уравнениям четверти эллипса $x = \alpha \cos t, y = b \sin t,\ t \in [0, \pi/2]$. При изменении x от 0 до α переменная t меняется от $\pi/2$ до 0. Статические моменты M_x и M_y пластины D относительно осей Ox и Oy:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho \cdot y^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b b^2 \sin^2 t \cdot a(-\sin t) dt = \frac{ab^2}{2}\int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 t) \cdot d(\cos t) =$$

$$= \frac{ab^2}{2}\int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 t) \cdot d(\cos t) = \frac{ab^2}{3};$$

$$M_y = \int_a^b \rho \cdot x \cdot y dx = \int_{\pi/2}^0 \alpha \cos t \cdot b \sin t \cdot a \cdot (-\sin t) dt =$$

$$= -ba^2 \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t \cdot d(\sin t) = \frac{a^2 b}{3}.$$

.

Масса M пластины D определяется по формуле

$$M = \int_a^b \rho \cdot y dx = \int_{\pi/2}^0 b \sin t \cdot (-a \sin t) dt = \frac{\pi ab}{4}.$$

Координаты *центра масс*

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{4a}{3\pi},\ y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{4b}{3\pi}.$$

2.7.4 Приложение к задачам электротехники

Вычисление энергии, тока и напряжения.

Пусть через участок электрической цепи проходит электрический заряд. Скорость поступления в цепь электрической энергии $W(t)$ в момент времени t представляет собой *мгновенную мощность* $p(t) = W'(t)$.

При заданной мощности $p(t)$ энергия, поступающая в приемник за промежуток времени от $t = t_0$ до $t = t_1$, вычисляется по формуле

$$W = \int_{t_0}^{t_1} p(t) dt.$$

Пример 2.7.6. Найти энергию, поступающую в приемник за промежуток времени от 0 до t , если мгновенная мощность $p(t) = A\cos\varphi + A\cos(2\,\omega t - \varphi)$, где амплитуда A, фаза φ, частота $2\,\omega$ предполагаются постоянными.

Решение:

$$W = \int_0^t p(s) ds = \int_0^t (A\cos\varphi + A\cos(2\omega s - \varphi)) ds =$$

$$= \left((A\cos\varphi)s + \frac{A}{2\omega}\sin(2\omega s - \varphi) \right)\Big|_0^t =$$
$$= (A\cos\varphi)t + \frac{A}{2\omega}\sin(2\omega t - \varphi) + \frac{A}{2\omega}\sin\varphi.$$

Напряжение на элементе электрической цепи – *индуктивности* – определяется по формуле

$$U_L = L\frac{di}{dt},$$

где $i = i(t)$ — ток в цепи, L — индуктивность.

При заданном напряжении U_L ток в индуктивности равен

$$i = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t U_L(s)ds,$$

где $i(0)$ — значение тока в начальный момент времени.

Пример 2.7.7. Найти ток на индуктивности, если напряжение на индуктивности $U_L = L(-a)e^{-at}$, где L – индуктивность, a– постоянная, $i(0) = 1$.

Решение: Напряжение на элементе электрической цепи – индуктивности – определяется по следующей формуле

$$U_L = L\frac{di}{dt},$$

где $i = i(t)$ – ток в цепи, L – индуктивность. Отсюда

$$i = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t U_L(s)ds = 1 - \frac{La}{L}\int_0^t e^{-as}ds = e^{-at}.$$

Ток на элементе электрической цепи – *ёмкости* – определяется по формуле

$$i = C\frac{dU_C}{dt},$$

где $i = i(t)$ — ток в цепи, C — ёмкость, U_C — напряжение на ёмкости.

При заданном токе напряжение на ёмкости

$$U_C = U_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(s)ds,$$

где $U_C(0)$ - значение напряжения в начальный момент времени.

2.7.5 Простейшие дифференциальные уравнения и их решение

Пример 2.7.8. Материальная точка массы m свободно падает под действием силы тяжести $F = mg$. Найти закон движения точки (без учета сопротивления воздуха), если заданы положение $S_0 = S(0)$ и скорость $v_0 = v(0)$ в начальный момент времени $t = 0$.

Решение: Поскольку ускорение является второй производной от перемещения $g = a(t) = S''(t)$, то получаем уравнение вида $S''(t) = g$, которое является простейшим дифференциальным уравнением второго порядка.

Задача сводится к нахождению функции по заданной второй производной. Проинтегрировав обе части уравнения дважды, получим

$$S(t) = g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2,$$

где C_1, C_2 - некоторые произвольные постоянные. Эти постоянные определим из заданных начальных условий:
$C_2 = S(0) = S_0$- положение точки в начальный момент времени, $C_1 = S'(0) = v(0) = v_0$ - начальная скорость. Окончательно получим

$$S(t) = g\frac{t^2}{2} + v_0 t + S_0.$$

Пример 2.7.9. *Переходный процесс в линейной электрической цепи.*

Пусть линейная электрическая цепи, состоящая из последовательно соединенных элементов – сопротивления r и индуктивности L – присоединяется к источнику э.д.с.$E(t) = E$. Описать переходный процесс (значение тока в начальный момент времени $i(0) = 0$).

Решение: Переходный процесс в данной электрической цепи на основании второго закона Кирхгофа описывается уравнением

$$U_r + U_L = E(t).$$

Поскольку $U_r = r \cdot i$, а $U_L = L\dfrac{di}{dt}$, получаем уравнение

$$ri + L\frac{di}{dt} = E(t).$$

Мы пришли к дифференциальному уравнению первого порядка. Методы решения таких уравнений будут изучаться позднее. Покажем, как это уравнение можно решить с помощью непосредственного интегрирования. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{r}{L}i + \frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$$

и для удобства обозначим $k = \dfrac{r}{L}$, $m = m(t) = \dfrac{E(t)}{L}$. В новых обозначениях

$$k \cdot i + \frac{di}{dt} = m(t).$$

Домножим это уравнение на e^{kt}:

$$e^{kt}k \cdot i + \frac{di}{dt}e^{kt} = m(t)e^{kt}.$$

Поскольку $e^{kt}k \cdot i + \dfrac{di}{dt}e^{kt} = (i \cdot e^{kt})'$, то приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt}(i \cdot e^{kt}) = m(t)e^{kt}.$$

Интегрируя, получим

$$(i \cdot e^{kt}) = \frac{1}{L}\int_0^t E(t) \cdot e^{ks} ds + C.$$

Поскольку значение тока в начальный момент времени $i(0) = 0$, то $C = 0$ и, следовательно,

$$i(t) = \frac{e^{-kt}}{L}\int_0^t E(t) \cdot e^{ks} ds.$$

В случае постоянной э.д.с.$E(t) = E = const.$

$$i(t) = \frac{e^{-kt}}{L}\int_0^t E\cdot e^{ks}ds = \frac{Ee^{-kt}}{Lk}(e^{kt}-1) = \frac{E}{r} - \frac{E}{r}\exp(\frac{-r}{L}t).$$

3 Несобственные интегралы

3.1 Несобственные интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы 1-го рода)

3.1.1 Определение. Понятие сходящихся и расходящихся интегралов

Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geqslant a$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$, где $b \in [a, +\infty)$. Тогда интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ имеет смысл при любом $b > a$ и является функцией аргумента b.

Рис. 51 $y = f(x)$ S $b \to +\infty$

Определение 3.1 *Если существует конечный предел*

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

то его называют ***несобственным интегралом 1-го рода*** *от функции$f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ и обозначают*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

При этом говорят, что несобственный интеграл *существует* или *сходится.* Если же не существует конечного предела, несобственный интеграл *не существует* или *расходится.* Если $f(x) \geqslant 0$ на интервале $[a, +\infty)$, то величина несобственного интеграла $I = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ является площадью неограниченной области, расположенной между графиком функции $y = f(x)$, прямой $x = a$ и осью Ox.

$y = f(x)$ Рис. 16 O a $+\infty$

Аналогично определяется несобственный интеграл 1-го рода от функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$. Если функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$, где $-\infty < a < b$, то полагают

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

$-\infty$ $y = f(x)$ Рис. 17 S b O

Если функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$ числовой оси, то *несобственный интеграл 1-го рода* с двумя бесконечными пределами определяется равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c - произвольное число.

По определению интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ существует только в том случае, если сходятся оба интеграла, стоящие в правой части равенства.

Пример 3.1.1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение: Это несобственный интеграл *1-го рода* с двумя бесконечными пределами, поэтому представим его в виде суммы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Вычислим сначала

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}.$$

$S = \frac{\pi}{2}$

$y = \frac{1}{x^2+1}$

Рис. 18.

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{2}.$$

и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

3.1.2 Основные свойства несобственных интегралов с бесконечными пределами

1. Свойство линейности.

   Если несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$ сходятся, то для любых постоянных C_1 и C_2

$$\int_a^{+\infty} (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x))dx =$$

$$= C_1 \int_a^{+\infty} f_1(x)dx + C_2 \int_a^{+\infty} f_2(x)dx.$$

2. *Формула Ньютона - Лейбница.* Если $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant a$, а $F(x)$ - первообразная, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

   где по определению

$$F(+\infty) = \lim_{b\to+\infty} F(b).$$

3. *Интегрирование по частям.*

   Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)\cdot v(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} udv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vdu,$$

   где

$$uv\Big|_a^{+\infty} = \lim_{b\to+\infty} u(x)\cdot v(x) - u(a)\cdot v(a).$$

3.1.3 Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами

В ряде задач нужно только установить сходимость или расходимость несобственного интеграла.

Признак сравнения. Пусть $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ при $x \in [a, +\infty)$. Тогда:

1) если интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;

2) если интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ также расходится.

Этот признак имеет простую геометрическую интерпретацию: если конечна площадь под графиком большей функции $g(x)$, то конечна площадь под графиком меньшей функции $f(x)$.

Аналогичным образом интерпретируется второе утверждение.

Замечание. Признак сравнения остается верным, если неравенства $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ выполнены не для всех $x \in [a, +\infty]$, а начиная лишь с некоторого $A > a$, т.е. для $x \in [A, +\infty]$.

Пример 3.1.2. Исследовать на сходимость *интеграл Эйлера - Пуассона* $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx$.

Решение: Для сравнения выберем функцию $g(x) = e^{-x+1}$. Поскольку справедливо неравенство $-\dfrac{x^2}{2} \leqslant -x+1$ и, следовательно, $0 \leqslant e^{-x^2/2} \leqslant e^{-x+1}$, а интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x+1}dx = -e^{-x+1}\Big|_0^{+\infty} = e$$

сходится, то и исходный интеграл *Эйлера - Пуассона* также сходится.

Предельный признак сравнения.

Пусть $f(x) \geqslant 0,\ \varphi(x) > 0$ на $[a, \infty)$. Если существует конечный предел, не равный нулю,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k,\ 0 < k < +\infty,$$

то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

При $k = 0$ из сходимости $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

При $k = \infty$ из расходимости $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

При применении признака сравнения удобно сравнивать подынтегральную функцию с функцией $\dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, для которой сходимость или расходимость соответствующего несобственного интеграла легко установить непосредственно.

Пример 3.1.3. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$, $a > 0$, в зависимости от параметра α.

Решение: Пусть $\alpha \neq 1$, тогда

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b x^{-a}dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_a^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} +\infty & (\alpha < 1), \\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} & (\alpha > 1) \end{cases}$$

При $\alpha = 1$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|x|\bigg|_a^b\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty.$$

Следовательно, интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Пример 3.1.4. Исследовать на сходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{x} - \cos x}{x^3 + \sqrt{x^5} + 3\sin x + 5}\,dx.$$

Решение: Поделим числитель и знаменатель на старшую степень знаменателя подынтегральной функции. При больших значениях x подынтегральная функция приблизительно равна

$$\frac{2x^{-5/2} - \cos x \cdot x^{-3}}{1 + x^{-1/2} + 3\sin x \cdot x^{-3} + 5x^{-3}} \approx \frac{2x^{-5/2}}{1}.$$

Поэтому в качестве функции сравнения возьмем функцию $\varphi(x) = \dfrac{2}{x^{5/2}}$. Проверим, что при $x \to +\infty$ подынтегральная функция эквивалентна функции $\varphi(x) = \dfrac{2}{x^{5/2}}$. В самом деле:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2\sqrt{x} - \cos x)\cdot x^{5/2}}{(x^3 + \sqrt{x^5} + 3\sin x + 5)\cdot 2} = 1.$$

Таким образом, $\alpha = \dfrac{5}{2} > 1$, и по предельному признаку сравнения данный интеграл сходится.

Пример 3.1.5. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x + 5}\,dx$.

Решение: Наводящие соображения: функция $y = \ln x$ растет медленнее, чем функция $y = x$. Поэтому возьмем в качестве функции сравнения $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$. Имеем:

1) Интеграл $\displaystyle\int_2^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ – расходится;

2) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln x + 5} = \infty$.

Тогда в силу предельного признака сравнения получаем, что исходный интеграл также расходится.

3.1.4 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов 1-го рода

Определение 3.2 *Несобственный интеграл* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *называют* ***абсолютно сходящимся****, если сходится интеграл* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *и* ***условно сходящимся****, если интеграл* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится, а интеграл* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *расходится. Если интеграл абсолютно сходится, то функция* $f(x)$ *называется* ***абсолютно интегрируемой*** *на* $[a, +\infty)$.

Теорема 3.1 *Если интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *абсолютно сходится, то он сходится и в обычном смысле.*

Пример 3.1.6. Исследовать на абсолютную сходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3+1}\,dx.$$

Решение:

Поскольку $\left|\dfrac{\cos x}{x^3+1}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^3+1}$, а интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx$ сходится (почему?), то исходный интеграл сходится абсолютно.

3.2 Несобственные интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы 2-го рода)

3.2.1 Определение. Понятие сходящихся и расходящихся интегралов

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a, b)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b_1]$, где $b_1 = b - \varepsilon \in [a, b)$, $\varepsilon > 0$, но не интегрируемая на отрезке $[a, b]$ (имеет разрыв при $x = b$).

$b_1 \to b$ Рис. 2 $y = f(x)$ 0

Определение 3.3 *Если существует конечный предел*

$$\int_0^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

то его называют ***несобственным интегралом 2-го рода.*** *При этом говорят, что несобственный интеграл существует или сходится. Если же не существует конечного предела, несобственный интеграл не существует или расходится.*

Аналогичным образом определяются несобственные интегралы от функции, имеющей разрыв при $x = a$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет разрыв внутри отрезка $[a, b]$ в некоторой точке $c(a < c < b)$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

По определению интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ существует только в том случае, если сходятся оба интеграла, стоящие в правой части равенства.

Пример 3.2.1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Решение: Подынтегральная функция на интервале $(-1,\ 1)$ имеет два разрыва при $x = -1$ и при $x = 1$. Поэтому представим исходный интеграл в виде суммы двух интегралов, в каждом из которых подынтегральная функция имеет ровно один разрыв:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

По определению

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b_1 \to 1+0} \int_0^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}.$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Рис. 21.

Аналогично

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} (\arcsin 0 - \arcsin(-1+\varepsilon)) = \frac{\pi}{2}.$$

и, следовательно,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$$

Пример 3.2.2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

Решение: Подынтегральная функция на отрезке $[-1, 1]$ интегрирования имеет один разрыв при $x = 0$. Поскольку функция $f(x)$ имеет разрыв внутри отрезка $[-1, 1]$ в точке $x = 0$, то представим интеграл в виде суммы

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

$y = \frac{1}{x^2}$

Рис. 22.

По определению интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ сходится только в том случае, если сходятся оба интеграла, стоящие в правой части равенства. Так как $\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2} dx = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\varepsilon}^{1} = \infty$ расходится, то и исходный интеграл также расходится.

Замечание. Для несобственных интегралов 2-го рода справедливы те же свойства, что и для несобственных интегралов 1-го рода.

3.2.2 Признаки сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций

Признак сравнения. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при $a \leqslant x < b$ и имеют разрыв при $x = b$. Если $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$ при $x \in [a, b)$, то:

1) если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^b \varphi(x)dx$;

2) если интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx.$

Пример 3.2.3. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^1 \frac{\cos^2(1/x)}{\sqrt{x}}dx.$$

Решение: Поскольку при $x \in (0,1]$ справедливо неравенство $0 < \dfrac{\cos^2(1/x)}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ и интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2$ сходится, то и исходный интеграл также сходится.

Предельный признак сравнения.

Пусть $f(x) \geqslant 0,\ \varphi(x) > 0$ на $[a, b)$. Если существует конечный предел, не равный нулю,

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k,\ 0 < k < +\infty,$$

то интегралы $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ и $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно. При $k = 0$ из сходимости $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx$ следует сходимость $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. При $k = \infty$ из расходимости $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx$ следует расходимость интеграла $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

При применении признака сравнения удобно сравнивать подынтегральную функцию с функцией $\dfrac{1}{x^\alpha}, \alpha > 0$, для которой сходимость или расходимость соответствующего несобственного интеграла легко установить непосредственно.

Пример 3.2.4. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}dx$ в зависимости от параметра α.

Решение: Пусть $\alpha \neq 1$ тогда

$$\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^b x^{-\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{0+\varepsilon}^b =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} +\infty \ (\alpha > 1) \\ \dfrac{b^{1-\alpha}}{\alpha-1} \ (\alpha < 1) \end{cases}$$

При $\alpha = 1$

$$\int_0^b \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^b \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\Big|_{0+\varepsilon}^b\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}(\ln b - \ln(0+\varepsilon)) = \infty.$$

Следовательно, интеграл

$$\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}dx$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Пример 3.2.5. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+3x^2+5x}$.

Решение: Подынтегральная функция на промежутке $(0,1]$ интегрирования имеет разрыв при $x = 0$. При малых x подынтегральная приблизительно равна

$$\frac{1}{x(x^2+3x+5)} \approx \frac{1}{5x}.$$

Поэтому в качестве функции сравнения возьмем функцию $\varphi(x) = \dfrac{1}{5x}$. Проверим, что при $x \to 0$ подынтегральная функция эквивалентна функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{5x}$. В самом деле:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to0}\frac{5}{x^2+3x+5} = 1.$$

Поскольку $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{5x}$ расходится ($\alpha = 1$), то по предельному признаку сравнения исходный интеграл расходится.

Пример 3.2.6. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$.

Решение: Возьмем в качестве функции сравнения $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Имеем:

1) Интеграл $\displaystyle\int_0^{1/2} \varphi(x)dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ – сходится;

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\ln x} = 0.$

Тогда в силу предельного признака сравнения получаем, что исходный интеграл также сходится.

Абсолютная и условная сходимость для несобственных интегралов 2-го рода определяется так же как и для несобственных интегралов 1-го рода.

Пример 3.2.7. Исследовать на абсолютную сходимость

$$\int_0^1 \frac{\sin 2x}{x^3 + \sqrt{x}}dx.$$

Решение: Поскольку $\left|\dfrac{\sin 2x}{x^3 + \sqrt{x}}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^3 + \sqrt{x}}$, а интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3 + \sqrt{x}}\,dx$ сходится, то исходный интеграл сходится абсолютно.

4 Криволинейные интегралы

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана векторная функция

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \qquad (1)$$

т.е. каждому $t \in [a, b]$ сопоставляется вектор с началом в точке $(0, 0, 0)$, имеющий координаты $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (рис.23).

z B $A(x, y, z)$

Рис.23.

При изменении t от a до b конец вектора $\vec{r}(t)$ описывает некоторую линию (кривую) L от точки $A = (x(a), y(a), z(a))$ до точки $B = (x(b), y(b), z(b))$. Говорят, что такая пространственная линия L задана уравнением (1). В частности, при $z(t) = 0$ мы получим уравнение плоской кривой: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$. Задание кривой уравнением (1) определяет не только геометрическое место точек с координатами $(x(t), y(t), z(t))$, но и «порядок» точек на кривой: при возрастании t от a до b точка $(x(t), y(t), z(t))$ «пробегает» кривую от точки A до точки B.

Определение 4.1 *Кривая L, на которой определен порядок «следования» точек, называется* ***ориентированной****, а выбранный порядок –* ***ориентацией****. У кривой может быть две ориентации.*

Определение 4.2 ***Касательной*** *к кривой L в точке $M(\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t))$ называется предельное положение секущей $\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ при $\Delta t \to 0$, если оно существует (рис.24).*

Рис. 24.

Производная от вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t:

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

легко показать, что

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Определение 4.3 *Кривая L называется* ***гладкой****, если при любом $t \in [a,b]$ существуют и непрерывны производные $x'(t); y'(t); z'(t)$.*

Определение 4.4 *Кривая L называется* ***кусочно-гладкой****, если функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывны, и отрезок $[a,b]$ можно разбить на конечное число подотрезков, на каждом из которых эти функции имеют непрерывные производные.*

В дальнейшем мы будем рассматривать только гладкие или кусочно-гладкие кривые. Наглядно говоря, кривая, заданная уравнением (1), является гладкой при $t \in [a,b]$, если в каждой её точке существует касательная, «непрерывно» меняющаяся вдоль L.

4.1 Криволинейный интеграл 1-го рода (по длине дуги)

Пусть на кривой L задана функция $f(M)$. Разобьем кривую L на части L_k , $1 \leqslant k \leqslant n$ в каждой части выберем произвольную точку M_k . Затем умножим $f(M_k)$ на Δs_k – длину части L_k , и все такие произведения просуммируем:

$$f(M_1)\Delta s_1 + \ldots\ldots + f(M_n)\Delta s_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k. \qquad (2)$$

Такая сумма называется интегральной суммой.

Определение 4.5 ***Криволинейным интегралом 1-го рода (по длине дуги)*** *от функции $f(M)$ называется предел её интегральных сумм (2) при $\max\limits_k \Delta s_k \to 0$ при условии, что этот предел существует и не зависит от способа разбиения кривой L на части L_k и выбора на них точек M_k :*

$$\lim_{\max\limits_k \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k = \int_L f(M)ds. \qquad (3)$$

Теорема 4.1 *Пусть функция $f(M)$ определена и непрерывна на кривой L. Тогда криволинейный интеграл 1-го рода* (по длине дуги) *от функции $f(M)$ существует.*

Основные свойства криволинейного интеграла 1-го рода

1) Значение криволинейного интеграла 1-го рода не зависит от выбора ориентации на кривой L.

2) Линейность.

$$\int_L (c_1 f_1(M) + c_2 f_2(M))ds = c_1 \int_L f_1(M)ds + c_2 \int_L f_2(M)ds,$$

где c_1, c_2 – постоянные.

3) Аддитивность. Если кривая $L = AB$ разбита на две части $L_1 = AC$ и $L_2 = CB$, то

$$\int_L f(M)ds = \int_{L_1} f(M)ds + \int_{L_2} f(M)ds.$$

4) Если на L выполнено неравенство $m_1 \leqslant f(M) \leqslant m_2$ и l - длина линии L, то

$$m_1 l \leqslant \int_L f(M)ds \leqslant m_2 l.$$

5) Если $f(M)$ непрерывна на L, то

$$\int_L f(M)ds = f(M_0)l,$$

где M_0 - некоторая «средняя» точка на L (теорема о среднем). Если $f(M) \equiv 1$, то

$$\int_L ds = l.$$

Последнее соотношение позволяет использовать криволинейный интеграл 1-го рода для нахождения длины дуги кривой.

Если $f(M) \geqslant 0$, то $f(M)$ можно интерпретировать как плотность, а интеграл $\int_L f(M)ds$ как массу.

Отметим также, что с помощью интеграла 1-го рода можно вычислять статические моменты кривой относительно осей координат, а также координаты ее центра тяжести. Приведем соответствующие формулы для плоской кривой.

Пусть $f(M) = f(x, y)$ – линейная плотность плоской кривой L . Тогда

1) масса кривой L

$$m = \int_L f(M)ds;$$

2) координаты центра тяжести

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_L xf(x,y)ds,\ y_0 = \frac{1}{m}\int_L yf(x,y)ds;$$

3) моменты инерции соответственно относительно осей Ox , Oy и начала координат

$$J_x = \int_L y^2 f(x,y)ds,\ J_y = \int_L x^2 f(x,y)ds,\ J_0 = \int_L (x^2+y^2)f(x,y)ds.$$

Аналогичные формулы имеют место для случая пространственной кривой.

Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода (по длине дуги).

1) Если кривая L задана параметрически: $x = x(t), y = y(t)$, $z = z(t), t \in [a;b]$, то

$$\int_L f(M)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x_t'(t)]^2 + [y_t'(t)]^2 + [z_t'(t)]^2}dt. \tag{4}$$

2) Если кривая L плоская и $y = y(x),\ a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\int_L f(M)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1 + [y_x'(x)]^2}dx. \tag{5}$$

3) Если кривая L задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то

$$\int_L f(M)ds = \int_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi,\ \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho(\varphi)^2 + [\rho'(\varphi)]^2}d\varphi. \tag{6}$$

Вычисление криволинейного интеграла, как мы видим, сводится к вычислению определенного интеграла.

<u>Пример 4.1.1.</u> Вычислить $I = \displaystyle\int_L (x+y+z)ds$, если $L:\ x = \cos t, y = \sin t, z = t$ при $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

Решение:

Используем формулу (4):

$$I = \int_0^{\pi/2} (\cos t + \sin t + t)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2}dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} (\cos t + \sin t + t)dt = \sqrt{2}\left(2 + \frac{\pi^2}{8}\right).$$

Пример 4.1.2. Вычислить $I = \int_L x^2 ds$, если $L : y = \ln x$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Решение: Используем формулу (5):

$$I = \int_1^2 x^2\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (1 + x^2)^{1/2}d(1 + x^2) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(5^{3/2} - 2^{3/2}\right).$$

Пример 4.1.3. Найти длину дуги кривой $L : x = \cos t$, $y = \sin t$, при $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

Решение:

$$l = \int_L ds = \int_0^{\pi/2} \sqrt{((\cos t)')^2 + ((\sin t)')^2}dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

4.2 Криволинейный интеграл 2-го рода (по координатам)

Пусть L - ориентированная кусочно-гладкая кривая с начальной точкой A и конечной точкой B. На кривой L задана вектор-функция

$$\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k} =$$
$$= P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Разобьем кривую L на части точками $A_k, 1 \leqslant k \leqslant n$, $A = A_0, A_1, \ldots, An = B$. Координаты точки A_k обозначим через (x_k, y_k, z_k). Положим

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \, \Delta z_k = z_{k+1} - z_k.$$

В каждой части $A_{k-1}A_k$ разбиения кривой L выберем произвольную точку M_k . Составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} [P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i]$$

Отметим, что $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ – проекции дуги $A_{k-1}A_k$ соответственно на оси Ox, Oy, Oz. Пусть Δl – длина наибольшей из дуг $A_{k-1}A_k$.

Определение 4.6 *Если при $\Delta l \to 0$ существует конечный предел интегральных сумм σ, не зависящий ни от способа разбиения кривой L, ни от выбора точек M_k на дугах A_{k-1}, A_k, то этот предел называется **криволинейным интегралом 2-го рода** от вектор-функции $\vec{a}(M)$ по кривой L и обозначается*

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Таким образом, по определению

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left[P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i\right].$$

Теорема 4.2 *Теорема существования.* *Пусть L – ориентированная кусочно-гладкая кривая, функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ определены и непрерывны на L. Тогда существует криволинейный интеграл 2-го рода (по координатам)* $\int_L Pdx + Qdy + Rdz.$

<u>Замечание</u>. В случае плоской кривой L криволинейный интеграл 2-го рода (по координатам) имеет вид

$$\int_L Pdx + Qdy.$$

Обозначим через

$$\vec{r}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

радиус-вектор точки $M(x, y, z)$. Тогда
$d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}.$
Используя скалярное произведение, приходим к более краткой записи криволинейного интеграла 2-го рода

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L (\vec{a}, d\vec{r}).$$

Пусть $\vec{\tau}(M)$ – единичный касательный вектор к линии L в точке M, направленный в соответствии с ориентацией L.

A B M

Рис. 35.

Будем считать, что ориентированная кривая L задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(l)$, где параметр l – длина кривой, отсчитываемая от начальной точки A. Тогда

$$\frac{d\vec{r}}{dl} = \vec{\tau}, \; d\vec{r} = \vec{\tau} \cdot dl,$$

где $\vec{\tau} = \vec{\tau}(l)$ единичный вектор касательной в точке $M = M(l)$.

Теорема 4.3 ***(связь с криволинейным интегралом 1-го рода)***

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L (\vec{a}, \vec{\tau}) ds,$$

где интеграл справа – криволинейный интеграл по длине дуги L от скалярного произведения $(\vec{a}, \vec{\tau})$.

Свойства аддитивности и линейности, приведенные выше для криволинейного интеграла 1-го рода, справедливы и для криволинейного интеграла 2-го рода. При изменении ориентации кривой знак криволинейного интеграла по координатам меняется на противоположный

$$\int_{AB} (\vec{a}, d\vec{r}) = -\int_{BA} (\vec{a}, \vec{r}) ds$$

Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода (по координатам)

1) Пусть кривая L задана параметрическим уравнением

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \ a \leqslant t \leqslant b.$$

Тогда

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_a^b (Px'_t + Qy'_t + Rz'_t) dt, \tag{7}$$

где $P = P(x(t), y(t), z(t))$, аналогично определены Q и R.

2) Если кривая L плоская и $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_a^b (P(x, y) + Q(x, y) y'(x)) dx. \tag{8}$$

Пример 4.2.1. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода от функции $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ вдоль кривой L :
$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}, \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$

Решение:

По формуле (7)

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_0^1 (t^3 \cdot 1 + t \cdot 2t + t^2 \cdot 3t^2) dt = \frac{91}{60}.$$

Пример 4.2.2. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $\int_{AB} x^2dx + xydy$ вдоль отрезка AB, где $A(0,0), B(1,1)$.
Решение: Уравнение прямой AB: $x = y$

Рис. 26.

По формуле (8) $\int_{AB} x^2dx + xydy = \int_0^1 (x^2 + x^2)dx =$
$= \left(\dfrac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{2}{3}.$

Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом 2-го рода по границе L некоторой плоской области D с двойным интегралом по этой области.

Теорема 4.4 *Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области, ограниченной кусочно-гладким контуром L , то имеет место равенство*

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{9}$$

Символ $\oint_L$ обозначает интегрирование по замкнутому контуру L - границе области D. Ориентация на L выбирается таким образом, что при интегрировании по L область D остается слева (положительная ориентация). При этом граница области D может состоять, вообще говоря, из нескольких замкнутых кривых (в этом случае область называется многосвязной).

5 Поверхностные интегралы

Пусть задана вектор-функция двух аргументов u и v, изменяющихся в некоторой области $D(u, v)$:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}. \tag{10}$$

При этом будем предполагать, что при разных значениях аргумента $(u, v) \neq (u_1, v_1)$ значения вектор-функции также различны: $\vec{r}(u, v) \neq \vec{r}(u_1, v_1)$.

Вектор $\vec{r}(u, v)$ откладывается из точки O (начало декартовой системы координат), т.е. он является радиус-вектором точки $M(u, v)$. Геометрическое место всех точек $M(u, v)$ образует некоторую *поверхность* σ в пространстве (рис. 27).

$M(u, v)$ $\vec{r}_v$ $\vec{r}_u$ $\vec{r}(u, v)$ O линия u

Рис. 27.

При фиксированом v рассмотрим линию, заданную уравнением $u \to \vec{r}(u, v)$ (линия u на рисунке). Через $\vec{r}_u$ обозначим касательный вектор к линии u в точке $M(u, v)$. Аналогично $\vec{r}_v$ – вектор, направленный по касательной к линии v в точке $M(u, v)$.

Теорема 5.1 *Касательные в точке M ко всевозможным линиям, проведенным через эту точку на поверхности σ, располагаются в одной плоскости.*

Такая плоскость называется *касательной плоскостью* к поверхности в точке M. Она определяется векторами $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$.

Определение 5.1 *Прямая, проведенная через точку M перпендикулярно касательной плоскости, называется* ***нормалью*** *к поверхности в точке M (рис. 28). Вектор на этой прямой будем называть вектором нормали.*

$\overrightarrow{N}$ $\boldsymbol{\vec{r}_u}$

Рис. 28.

Вектор нормали $\overrightarrow{N}$ можно вычислить как векторное произведение $\overrightarrow{N} = \pm\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]$ касательных векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$.

Определение 5.2 *Поверхность σ называется* ***гладкой****, если в каждой её точке существует касательная плоскость, непрерывно меняющаяся вдоль поверхности (т.е. при изменении точки M).*

Отметим, что это равносильно тому, что функция $\vec{r}(u, v)$ дифференцируема и имеет непрерывные частные производные.

Если поверхность σ задана уравнением $z = f(x, y)$ (точка (x, y) принадлежат области D), то она будет гладкой тогда и только тогда, когда функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в области D.

Определение 5.3 *Поверхность σ называется* ***кусочно-гладкой****, если она состоит из конечного числа гладких частей, примыкающих друг к друг по кусочно-гладким или просто гладким линиям.*

Гладкими поверхностями являются, например, плоскость, сфера, эллипсоид, кусочно-гладкими - куб, конус.

Определение 5.4 *Поверхность σ называется* ***двусторонней****, если какова бы ни была её точка M и каков бы ни был на ней замкнутый контур C, проходящий через точку M и не пересекающий границы σ, после его обхода мы возвращаемся в точку M с исходным направлением нормали.*

Определение 5.5 *Поверхность σ называется* ***односторонней****, если на ней существует хотя бы один замкнутый контур, обходя который, мы придем в начальную точку с противоположным направлением нормали.*

Примерами двусторонних поверхностей являются плоскость, сфера, эллипсоид, односторонней поверхности — лист Мебиуса.

Фиксировать определенную сторону гладкой двусторонней поверхности — это значит из двух возможных векторов нормали $\overrightarrow{N}$ в каждой точке M выбрать такой, чтобы любые два выбранных вектора можно было бы перевести друг в друга непрерывным образом. Тем самым, выбор направления нормали в одной точке однозначно определяет выбор направления нормали во всех точках. Стороной поверхности будем называть совокупность точек поверхности с нормалями.

В случае незамкнутой двусторонней поверхности мы не будем как-либо заранее предопределять выбор той или другой стороны. Всякая замкнутая поверхность, является, очевидно, двусторонней и мы будем всюду выбирать на ней внешнюю сторону, т.е. в каждой её точке будем указывать внешнюю нормаль.

5.1 Поверхностные интегралы 1-го типа (по площади поверхности)

Пусть задана некоторая гладкая двусторонняя поверхность σ и на ней функция $f(M)$. Разобьем поверхность сеткой линий на n

ячеек $\sigma_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n$ с площадями $\Delta\sigma_k$. В каждой ячейке выберем точку M_k и составим *интегральную сумму*:

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\sigma_k. \tag{11}$$

Определение 5.6 ***Поверхностным интегралом 1-го типа от функции*** $f(M)$ ***по поверхности*** σ *называется предел интегральных сумм (11) при стремлении к нулю наибольшего диаметра ячеек* $\delta = \max\limits_k(diam\Delta\sigma_k) \to 0$*, если предел существует и не зависит от способа разбиения и выбора точек* M_k *. Он обозначается* $\iint_\sigma f(M)d\sigma$*. Таким образом, получаем*

$$\lim_{\max\limits_k(diam\Delta\sigma_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\sigma_k = \iint_\sigma f(M)d\sigma. \tag{12}$$

Свойства аддитивности и линейности, приведенные выше для криволинейных интегралов, справедливы и для поверхностного интеграла 1-го типа. Свойство аддитивности формулируется в данном случае следующим образом. Для кусочно-гладкой поверхности σ , состоящей из частей $\delta_1, \ldots \delta_q$, имеем

$$\iint_\sigma f(M)d\sigma = \iint_{\delta_1} f(M)d\sigma + \ldots + \iint_{\delta_q} f(M)d\sigma. \tag{13}$$

При изменении ориентации поверхности знак поверхностного интеграла 1-го типа не меняется.

Для поверхностного интеграла 1-го типа также выполнены теоремы об оценке и о среднем.

Теорема 5.2 *<u>Теорема существования.</u> Если функция* $f(M)$ *непрерывна на поверхности* σ *, то поверхностный интеграл* 1*-го типа существует.*

*<u>Замечание.</u>*Если функция $f(M) = 1$, то получаем формулу для вычисления площади поверхности

$$S = \iint_\sigma d\sigma.$$

Вычисление поверхностного интеграла 1-го типа

Вычисление методом проектирования на координатные плоскости

Пусть гладкая поверхность σ взаимно однозначно проектируется на область D плоскости Oxy. В этом случае справедлива формула

$$\iint_{\sigma} f(M)d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}, \tag{14}$$

где $z = z(x,y)$ — уравнение поверхности σ, ($z(x,y)$ — непрерывно дифференцируемая функция), $\cos\gamma$ — направляющий косинус единичного вектора нормали к поверхности в точке $(x,y,z(x,y))$,

$$\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}.$$

Формула (14) может быть записана в виде:

$$\iint\limits_{\sigma} f(M)d\sigma = \iint\limits_{D(x,y)} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy. \tag{15}$$

Пример 5.1.1. Вычислить $\iint_{\sigma}(1+x+z)d\sigma$, если σ – плоскость треугольника $x+y+z=1$,

Рис. 29.

Решение: Выразим z из уравнения плоскости : $z = 1 - x - y$. Вычислим частные производные и значение выражения

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -1,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3}.$$

По формуле (15) имеем:

$$\iint_{\sigma}(1 + x + z)d\sigma = \iint_{D_{xy}}(1 + x + 1 - x - y)\sqrt{3}dxdy =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 (2 - y)dy \int_0^{1-y} dx = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

Вычисление поверхностного интеграла с помощью координат на поверхности

Иногда вычисляют поверхностный интеграл путем введения координат на самой поверхности. Рассмотрим данный метод на примере цилиндрической и сферической поверхностей.

На цилиндре $x^2 + y^2 = R^2$ введем в качестве координат точек цилиндра координаты (φ, z), где $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty < z < +\infty$. Тогда

$$x = R \cdot \cos\varphi,$$

$$y = R \cdot \sin\varphi,$$

$$z = z,$$

$$d\sigma = R \cdot d\varphi \cdot dz.$$

На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ введем в качестве координат ее точек углы (φ, θ), где $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Тогда

$$x = R \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi,$$

$$y = R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi,$$

$$z = R \cdot \cos\theta,$$

$$d\sigma = R^2 \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

Пример 5.1.2. Найти площадь цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = x$.

Решение:

$$S = \iint_\sigma d\sigma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} R dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos\varphi d\varphi = 2R^2.$$

Пример 5.1.3. Вычислить интеграл $\iint_\sigma \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$, где поверхность σ – это полусфера радиуса R при $z \geqslant 0$.

Решение:

$$\iint_\sigma \sqrt{x^2+y^2} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} R^3 \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi^2 R^3}{2}.$$

5.2 Поверхностный интеграл 2-го типа (по координатам)

Пусть задана гладкая двусторонняя поверхность σ и задана её *ориентация*, т.е. указано направление нормали (фиксирована какая-либо из двух сторон поверхности).

Предположим, что поверхность σ взаимно однозначно проектируется на область D плоскости Oxy. Пусть поверхность задана уравнением $z = z(x, y)$, где $z(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть в точках поверхности σ задана некоторая функция $f(M) = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность сеткой линий на n ячеек σ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ и спроектируем их на координатную плоскость Oxy. Площадь проекции ΔS_k берется со знаком «плюс», если выбрана верхняя сторона поверхности. В этом случае нормаль $\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$ к выбранной стороне поверхности составляет с осью Oz острый угол γ , т.е. $\cos\gamma > 0$. Соответственно площадь проекции ΔS_k берется со знаком «минус», если выбрана нижняя сторона поверхности. В каждой ячейке σ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ выберем точку M_k ,$M_k = (x_k, y_k, z(x_k, y_k))$, и составим интегральную сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z(x_k, y_k))\Delta S_k. \qquad (16)$$

Определение 5.7 *Поверхностным интегралом 2-го типа от функции $f(M)$ (по координатам (x,y)) называется предел интегральных сумм (16) при стремлении к нулю наибольшего диаметра ячеек $\sigma = \max\limits_k(diam\Delta\sigma_k) \to 0$, если предел существует и не зависит от способа разбиения и выбора точек M_k. Он обозначается $\iint_\sigma f(x,y,z)dxdy$. Таким образом, получаем*

$$\lim_{\max\limits_k(diam\Delta\sigma_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta S_k = \iint_\sigma f(x,y,z)dxdy.$$

Аналогичным образом, если вместо плоскости Oxy проектировать элементы σ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ поверхности σ на плоскости Ozy и Oxz , определяются поверхностные интегралы 2-го типа по координатам (z,y) и (x,z) , которые обозначаются соответственно

$$\iint_\sigma f(x,y,z)dzdy \ \text{ и } \ \iint_\sigma f(x,y,z)dxdz.$$

Объединяя эти три интеграла, придем к виду, который наиболее часто используется на практике

$$\iint_\sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy, \qquad (17)$$

где (P,Q,R) есть функции (x,y,z) , определенные в точках поверхности σ. Интеграл (17) можно записать более коротко. Введем вектор-функцию

$$\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k} =$$

$$= P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$\iint_\sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint_\sigma (\vec{a}(M), d\vec{\sigma}).$$

<u>*Замечание.*</u>Знак поверхностного интеграла 2-го типа за-висит от выбора ориентации поверхности.

Как и в случае криволинейных интегралов, для поверхностных интегралов 1-го и 2-го типа имеется связь, которая задается следующей формулой

$$\iint_\sigma (\vec{a}(M), d\vec{\sigma}) = \iint_\sigma (\vec{a}(M), \vec{n}(M)) d\sigma. \tag{18}$$

Здесь

$$\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k} -$$

–вектор выбранной нормали.

6 Элементы теории поля

6.1 Понятие поля. Скалярное и векторное поля

В физических задачах часто встречаются два типа величин: скаляры и векторы. Например, если каждой точке данной области пространства поставить в соответствие некоторое число (значение физической величины, скажем температуры), то говорят, что задано *скалярное поле* (поле температур). Если же каждой точке данной области пространства поставить в соответствие вектор (например, при движении жидкости или газа каждой точке сопоставлен вектор скорости), то говорят, что задано *векторное поле.*

Определение 6.1 ***Скалярным полем*** $u(M)$ *называется числовая функция, заданная в точках пространственной области* V*.*

Определение 6.2 ***Векторным полем*** *называется векторная функция* $\vec{a}(M)$*, заданная в области* V*.*

В декартовой системе координат скалярное поле $u(M)$ задается некоторой функцией трех переменных x, y, z, которая обычно обозначается той же самой буквой u, что и сама физическая величина:

$$u(M) = u(x, y, z).$$

Аналогично скалярному полю, векторное поле в декартовой системе координат задается вектором

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат,
$P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – координаты вектора $\vec{a}(M)$.

Примерами скалярных полей служат поле плотности массы тела, поле распределения температур тела, поле плотности электрического заряда тела. К векторным полям относятся поле сил тяготения, поле магнитной напряженности, поле скоростей частиц движения жидкости или газа.

Поля подразделяются на стационарные и нестационарные. Мы будем изучать только стационарные поля, то есть такие, которые не меняются с течением времени.

Перейдем к рассмотрению основных характеристик скалярных и векторных полей.

6.2 Скалярное поле. Производная поля по направлению. Градиент

Геометрическую характеристику поведения скалярного поля в области V чаще всего вводят при помощи поверхности уровня.

Определение 6.3 *Поверхностью уровня скалярного поля $u(M)$ называется геометрическое место точек M области V пространства, в которых значение поля равно одной и той же постоянной c , т.е. $u(M) = c$.*

Различным значениям постоянной c соответствуют различные поверхности уровня скалярного поля величины u. В декартовой системе координат всевозможные поверхности уровня скалярного поля величины u определяются уравнениями вида:

$$u(x, y, z) = c. \tag{19}$$

Пример 6.2.1. Найти поверхности уровня скалярного поля $u(M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, заданного в декартовой системе координат в области V , совпадающей со всем пространством.

Решение: Для нахождения поверхностей уровня, отвечающих значению величины поля c, положим

$$u(M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c.$$

Тогда $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, то есть поверхностями уровня в рассматриваемом случае являются всевозможные сферы радиуса c.

Для плоского скалярного поля (соответствующего $z = 0$) уравнение (19) приобретает вид $u(x, y) = c$ и определяет совокупность *линий уровня*.

Поверхности уровня позволяют судить о скорости изменения скалярного поля $u(M)$ по тому или иному направлению качественно. Для количественной характеристики скорости изменения поля введем понятие производной по направлению $\vec{l}$.

Пусть $u(M)$ – скалярное поле в некоторой пространственной области V, задаваемое в декартовой системе координат функцией $u(x, y, z)$ трех переменных, которую будем предполагать дифференцируемой, $\vec{l}$ – некоторое фиксированное направление, задаваемое единичным вектором

$$\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

M M_1

Рис. 30.

а α, β, γ – углы, образуемые направлением l с осями координат. Зафиксируем точку $M(x, y, z)$, а точку $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ будем выбирать на луче, выходящем из точки M в направлении вектора $\vec{\tau}$.

Определение 6.4 *Производной скалярного поля $u(M)$ по направлению $\vec{l}$ называется предел:*

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \lim_{|M_1M|\to 0} \frac{\Delta u}{|M_1M|} = \lim_{|M_1M|\to 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{|M_1M|}.$$

Заметим, что отношение $\dfrac{u(M_1) - u(M)}{|M_1M|}$ – есть средняя скорость изменения поля $u(M)$ при переходе от точки M к точке M_1 вдоль направления $\vec{l}$. Предел этого отношения при $|M_1M| \to 0$ дает мгновенную скорость изменения скалярного поля в точке M по направлению $\vec{l}$. Отсюда, в частности, следует, что при $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} > 0$ поле $u(M)$ возрастает вдоль $\vec{l}$ в точке M, а при $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} < 0$ - убывает. Укажем формулу для вычисления производной скалярного поля по направлению $\vec{l}$ в декартовой системе координат

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos\gamma. \tag{20}$$

Определение 6.5 ***Градиентом*** *скалярного поля $u(M)$ называется вектор*

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{k}.$$

Формула (20) может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = (\vec{\tau}, \operatorname{grad} u) \tag{21}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = |\vec{\tau}| \cdot |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi. \tag{22}$$

Здесь φ – угол между $\operatorname{grad} u$ и направляющим вектором $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ прямой $\vec{l}$. Из последней формулы видно, что максимум $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ в точке M по всем возможным направлениям $\vec{l}$ достигается при условии совпадения направления $\vec{l}$ с направлением градиента ($\varphi = 0$). Таким образом,

$$\max \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = |\operatorname{grad} u|. \tag{23}$$

Отсюда следует, что градиент направлен в сторону наибыстрейшего возрастания функции u, а его длина равна скорости возрастания (таким образом, градиент определяется самим полем, а не выбором системы координат). Сформулированное утверждение можно рассматривать как инвариантное (т.е. не зависящее от выбора системы координат) определение градиента.

Пример 6.2.2. Установить характер роста скалярного поля $u = xyz$ по направлению вектора $\vec{l} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ в точке $M(1,1,1)$ и найти величину скорости изменения данного поля в указанном направлении.

Решение: Вычислим частные производные:

$\operatorname{grad} u(M_0)$

$u = c$

$\vec{l}$

Рис. 31.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot z,\ \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot z,\ \frac{\partial u}{\partial z} = x \cdot y.$$

Их значения в точке $M(1,1,1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M(1,1,1)}=1,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M(1,1,1)}=1,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M(1,1,1)}=1.$$

Найдем единичный вектор направления $\vec{l}$:

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=\frac{\vec{i}-2\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}=\frac{1}{3}(\vec{i}-2\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}),$$

т.е. $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$. Используя формулу (20), имеем:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M(1,1,1)}=1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Поскольку $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{1}{3}>0$, то скалярное поле $u(M)$ в направлении l возрастает.

Наибольшая скорость изменения поля определяется по формуле (23)

$$\max\left.\frac{\partial u}{\partial\vec{l}}\right|_{M(1,1,1)}=|\operatorname{grad}u|\Big|_{M(1,1,1)}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}.$$

Теорема 6.1 *Градиент скалярного поля $u(M)$ в точке M направлен по нормали к поверхности уровня скалярного поля $u(M)$, проходящей через точку M.*

Доказательство. По определению вектор перпендикулярен поверхности в данной точке, если он перпендикулярен касательной плоскости к поверхности в этой точке. Возьмем касательную l в точке M_0 и проведем на поверхности σ кривую L, касающуюся в точке M_0 прямой l. Кривая L может быть задана вектор-функцией

$$\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{k}.$$

Поскольку L лежит на поверхности σ, то

$$u(x(t),\,y(t)\,z(t))\equiv u(x_0,\,y_0,\,z_0)=c. \tag{24}$$

Продифференцируем обе части (24) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=0,$$

или, записывая по другому: $\left(\operatorname{grad} u, \dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)=0$,

так как вектор $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ параллелен l, то $\operatorname{grad} u$ перпендикулярен l и следовательно он ортогонален σ . Теорема доказана.

Покажем, как с помощью градиента можно найти единичный вектор $\vec{n}$ нормали к поверхности, заданной уравнением

$$F(x,y,z)=c \tag{25}$$

Так как формула (25) определяет одну из поверхностей уровня скалярного поля $u=F(x,y,z)$, то из теоремы 6.1 следует, что $\operatorname{grad} u$ ортогонален к поверхности (25). Поэтому, чтобы найти единичный вектор нормали, нужно $\operatorname{grad} u$ разделить на его длину:

$$\vec{n}=\pm\frac{\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|}=\pm\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot\vec{i}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\vec{j}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\vec{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}. \tag{26}$$

Сопоставляя формулу (26) с другим выражением единичного вектора нормали

$$\vec{n}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k},$$

имеем формулы для нахождения направляющих косинусов нормали к поверхности (25):

$$\cos\alpha=\pm\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta = \pm\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma \ = \ \pm\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \tag{27}$$

Пример 6.2.3. Найти единичный вектор нормали к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в произвольной её точке.

Решение: Сфера является одной из поверхностей уровня поля $u = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. Тогда, используя (8), имеем:

$$\vec{n} = \pm\frac{2x \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} + 2z \cdot \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \pm\frac{x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}}{R}.$$

Направляющие косинусы нормали (знак «плюс» соответствует внешней нормали)

$$\cos\alpha = \pm\frac{x}{R},\ \cos\beta = \pm\frac{y}{R},\ \cos\gamma = \pm\frac{z}{R}.$$

Основными свойствами градиента являются:

1. Линейность

$$\operatorname{grad}(c_1u_1 \pm c_2u_2) = c_1 \operatorname{grad} u_1 \pm c_2 \operatorname{grad} u_2,$$

$c_1,\ c_2$ – постоянные, $u_1(M), u_2(M)$ – скалярные поля.

2. Градиент произведения

$$\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v.$$

3. Градиент частного

$$\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$$

4. Градиент сложной функции
   $\operatorname{grad} F(u) = F'(u) \cdot \operatorname{grad} u$, где $F(u)$ – сложная функция.

6.3 Векторное поле. Дивергенция. Ротор

Так как всякий вектор определяется длиной и направлением в пространстве, то векторное поле представляет собой «одновременно» поле длин и поле направлений. Для поля направлений геометрической характеристикой может служить совокупность векторных линий.

Определение 6.6 ***Векторной линией*** *данного векторного поля* $\vec{a}(M)$ *называется всякая линия в области* V *пространства, которая в каждой своей точке касается вектора поля* $\vec{a}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$*, заданного в этой точке.*

Вывод и решение дифференциальных уравнений, которые определяют векторную линию, рассматриваются в третьем семестре в курсе «Дифференциальные уравнения».

Важными характеристиками векторного поля являются дивергенция и ротор.

Определение 6.7 ***Дивергенцией*** *векторного поля*

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z) \cdot \vec{i} + Q(x, y, z) \cdot \vec{j} + R(x, y, z) \cdot \vec{k},$$

где P, Q, R*– непрерывно - дифференцируемые функции, называется скалярная величина*

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{28}$$

Свойства дивергенции

1) $\operatorname{div}(c_1 \cdot \vec{a}_1 + c_2 \cdot \vec{a}_2) = c_1 \cdot \operatorname{div} \vec{a}_1 + c_2 \cdot \operatorname{div} \vec{a}_2$.
2) $\operatorname{div} \vec{a} = 0$, если $\vec{a}$ – постоянное векторное поле.
3) $\operatorname{div}(u \cdot \vec{a}) = (\vec{a}, \operatorname{grad} u) + u \cdot \operatorname{div} \vec{a}$, где u - скалярное поле.

В частности, если $\vec{a}$ – постоянное векторное поле, то

$$\operatorname{div}(u \cdot \vec{a}) = (\vec{a}, \operatorname{grad} u).$$

Определение 6.8 ***Ротором*** *векторного поля $\vec{a}$ называется вектор:*

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot \vec{k}$$

или в форме, удобной для запоминания

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{29}$$

Свойства ротора

1) $\operatorname{rot}(c_1 \cdot \vec{a}_1 + c_2 \cdot \vec{a}_2) = c_1 \cdot \operatorname{rot} \vec{a}_1 + c_2 \cdot \operatorname{rot} \vec{a}_2$.
2) $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$, если - постоянное векторное поле.
3)$\operatorname{rot}(u \cdot \vec{a}) = [\operatorname{grad} u, \vec{a}] + u \cdot \operatorname{rot} a$, если u – скалярное поле.

Пример 6.3.1. Найти дивергенцию и ротор поля

$$\vec{a} = 2y \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

Решение:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial (2y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1,$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & x & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right) \cdot \vec{i} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial (2y)}{\partial z}\right) \cdot \vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{\partial(2y)}{\partial y}\right)\cdot\vec{k}=0-0+(1-2)\cdot\vec{k}=-\vec{k}.$$

Введем полезное понятие.

Определение 6.9 ***Оператором ∇ («набла») или символическим вектором Гамильтона,*** *называется выражение*

$$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

правила обращения с которым следующие:
1) Если u - скалярное поле, то

$$(\nabla,\vec{a})=\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u=\vec{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}=\operatorname{grad}u.$$

2) Если $\vec{a}=P\cdot\vec{i}+Q\cdot\vec{j}+R\cdot\vec{k}$ – векторное поле, то

$$(\nabla,\,\vec{a})=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\operatorname{div}\vec{a};$$

$$[\nabla,\vec{a}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2y&x&z\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ Q&R\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&R\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}\\ P&Q\end{vmatrix}=\operatorname{rot}\vec{a}$$

Пользуясь оператором ∇ , легко доказать, например, первое свойство ротора:

$$\operatorname{rot}(c_1\cdot\vec{a}+c_2\cdot\vec{a}_2)=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ c_1\cdot P_1+c_2\cdot P_2&c_1\cdot Q+c_2\cdot Q_2&c_1\cdot R_1+c_2\cdot R_2\end{vmatrix}=$$

= (по свойству определителей)=

$$= c_1 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \end{vmatrix} + c_2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix} =$$

$$= c_1 \cdot \operatorname{rot} \vec{a}_1 + c_2 \cdot \operatorname{rot} \vec{a}_2.$$

Пользуясь известной формулой из механики для поля скоростей $\vec{v}(M)$ движущегося твердого тела в каждый фиксированный момент времени t, можно установить физический смысл ротора. Имеем:

$$\vec{v}(M) = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}],$$

где $\vec{v}_0 = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$- мгновенная скорость какой-либо точки тела (например центра тяжести), $\vec{\omega}$ – мгновенная угловая скорость движения тела, $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$. Для нахождения ротора векторного поля $\vec{v}(M)$ выберем систему координат, связанную с телом так, чтобы ось Oz была направлена по вектору $\vec{\omega}$. Тогда $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$,

$$\vec{v}(M) = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= (a - \omega y) \cdot \vec{i} + (b + \omega x) \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k},$$

и следовательно

$$\operatorname{rot} \vec{v}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a - \omega y & b + \omega x & c \end{vmatrix} = 2\omega \cdot \vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Таким образом, ротор поля скоростей точек движущегося твердого тела равен удвоенной угловой скорости вращения тела.

6.4 Поток векторного поля и его вычисление

Рассмотрим гидродинамическую задачу о потоке жидкости через поверхность. Пусть объем V пронизывается стационарным потоком жидкости с полем скоростей $v(M)$ и внутрь этого потока поставлена некоторая проницаемая гладкая двусторонняя поверхность σ. Требуется определить количество жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени.

Зафиксируем одну из сторон поверхности σ, задав направление нормали $\vec{n}(M)$. Разобьем σ сеткой линий (см. рисунок) на ячейки площади $\Delta\sigma_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$,выберем в каждой ячейке точку M_i и проведем вектор нормали $\vec{n}(M_i)$.

$\vec{n}(M_i)$

σ_i M_i $\vec{v}(M_i)$

Рис. 32

Если ячейки достаточно мелкие, то можно считать, что σ_i – плоская поверхность, и вектор скорости протекания жидкости v_i постоянен в пределах σ_i . Тогда за единицу времени t через ячейку σ_i пройдет количество жидкости, равное объему наклонного параллелепипеда

$$\Delta\Pi_i \approx (\vec{v}(M_i), \vec{n}(M_i)) \cdot \Delta\sigma_i.$$

Весь поток жидкости через поверхность σ будет приближенно равен

$$\Pi_i \approx \sum_{i=1}^{k} (\vec{v}(M_i), \vec{n}(M_i)) \cdot \Delta\sigma_i.$$

Переходя к пределу, когда наибольший диаметр ячейки разбиения $\max\limits_i d(\sigma_i)$ стремится к нулю, имеем

$$\Pi = \lim_{\max\limits_i d(\sigma_i)\to 0} \sum_{i=1}^{k} (\vec{v}(M_i),\, \vec{n}(M_i)) \cdot \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} (\vec{v}(M),\, \vec{n}(M)) \cdot d\sigma.$$

Таким образом, величина Π представляет собой поверхностный интеграл по поверхности σ от функции $F(M) = (\vec{v}(M),\, \vec{n}(M))$.

По аналогии с этой задачей вводится определение потока произвольного векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность σ. Пусть σ – двусторонняя гладкая поверхность. Фиксируем выбором нормали одну из двух её сторон. Напомним, что в случае замкнутой поверхности выбирается, как правило, внешняя нормаль.

Определение 6.10 ***Потоком векторного поля*** $\vec{a}(M)$ *через поверхность* σ *называется поверхностный интеграл от скалярного произведения векторов* $\vec{a}(M)$ *и* $\vec{n}(M)$, *где* M *– произвольная точка поверхности* σ

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\vec{a}(M),\, \vec{n}(M))d\sigma.$$

Если поверхность σ кусочно-гладкая, то поток векторного поля $\vec{a}(M)$ определяется как сумма потоков через каждую её гладкую часть.

Понятие потока векторного поля $\vec{a}(M)$ применяется для решения различных задач физики, электротехники, гидродинамики, например, при вычислении количества жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени.

Свойства потока:

1) Свойство линейности.

$$\iint_{\sigma} (c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2, \vec{n})d\sigma = c_1 \cdot \iint_{\sigma} (\vec{a}_1,\, \vec{n})d\sigma + c_2 \cdot \iint_{\sigma} (\vec{a}_2,\, \vec{n})d\sigma,$$

если c_1, c_2 – постоянные.
2) Свойство аддитивности. Для кусочно-гладкой поверхности σ , состоящей из частей σ_1, σ_2, имеем

$$\iint_\sigma (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\sigma_1} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma + \iint_{\sigma_2} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma.$$

3) При изменении выбранной стороны поверхности поток Π меняет знак, так как переход от данной стороны поверхности к другой состоит в том, что в каждой точке M вектор $\vec{n}(M)$ заменяется на противоположный вектор $-\vec{n}(M)$.

Вычисление потока векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность σ может быть осуществлено несколькими методами: проектированием на одну из координатных плоскостей, проектированием на три координатные плоскости и посредством введения специальной системы координат на поверхности σ. Рассмотрим более подробно метод проектирования на одну из координатных плоскостей, состоящий в следующем. Если σ – кусочно-гладкая поверхность, и она делится на части, взаимно однозначно проектирующиеся на какую-либо координатную плоскость, то подсчитываются потоки через каждую из частей поверхности и результаты суммируются.

Пусть поверхность σ задана уравнением $F(x, y, z) = 0$. Предположим, что поверхность σ взаимно однозначно проектируется на плоскость Oxy, и выбрана сторона поверхности (т.е. определенное направление нормали). Тогда поток

$$\Pi = \iint_\sigma (\vec{a},\, \vec{n}) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{(\vec{a},\, \vec{n})}{|\cos\gamma|} \right|_{z=z(x,y)} dxdy, \qquad (30)$$

где D_{xy} – проекция поверхности σ на плоскость Oxy, γ – угол, составленный нормалью с осью Oz.

Таким образом, вычисление потока сводится к вычислению двойного интеграла по плоской области D_{xy}. Аналогично подсчитываются потоки через поверхности, взаимно однозначно проектирующиеся на другие координатные плоскости:

$$\Pi = \iint_{D_{yz}} \left. \frac{(\vec{a},\, \vec{n})}{|\cos\alpha|} \right|_{x=x(y,z)} dydz;$$

$$\Pi = \iint_{D_{xz}} \frac{(\vec{a},\, \vec{n})}{|\cos\beta|}\bigg|_{y=y(x,z)} dxdz.$$

Здесь предполагается, что единичный вектор нормали имеет вид

$$\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}.$$

Пример 6.4.1. Найти поток векторного поля $\vec{a} = x^2 \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + xz \cdot \vec{k}$ через часть поверхности параболоида вращения $y = x^2 + z^2$, лежащую в первом октанте и ограниченную плоскостью $y = 1$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$, по направлению внешней нормали.

Решение: Запишем уравнение поверхности в виде $F(x, y, z) = 0$, т.е. $x^2 + z^2 - y = 0$. Вектор единичной нормали к поверхности параболоида определяется с точностью до знака равенством

$$\vec{n} = \pm\frac{\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|} = \pm\frac{2x \cdot \vec{i} - \vec{j} + 2z \cdot \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}}.$$

При этом вектору внешней нормали отвечает знак «плюс» и следовательно

$$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}} < 0.$$

y Рис. 33. z^2

В самом деле, из рис. 33 видно, что внешняя нормаль образует острые углы с положительным направлением осей Ox и Oz и тупой угол с положительным направлением оси Oy (угол β).

Поток в этом случае удобно считать, проектируя на плоскость Oxz, то есть по формуле

$$\Pi = \iint_{Dxz} \left. \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos\beta|} \right|_{y=y(x,z)} dxdz.$$

Вычислим

$$\left. \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos\beta|} \right|_{y=y(x,z)} = \frac{\dfrac{2x^3 - x + 2xz^2}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}}{\left| -\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}} \right|} = x \cdot \left[2(x^2+z^2) - 1 \right].$$

Таким образом

$$\Pi = \iint_{Dxz} x \cdot \left[2(x^2+z^2) - 1 \right] dxdz.$$

Переходя к полярным координатам на плоскости Oxz:
$x = \rho \cdot \cos\varphi,\ z = \rho \cdot \sin\varphi$, получим

$$\Pi = \int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \int_0^1 (2\rho^4 - \rho^2) d\rho = \frac{1}{15}.$$

Рассмотрим вычисление потока с *помощью введения координат на поверхности* (для цилиндрической или сферической поверхностей).

Пример 6.4.2. Найти поток векторного поля
$\vec{a} = (x-y)\cdot\vec{i} + (x+y)\cdot\vec{j} + \vec{k}$ через часть цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, заключенную между плоскостями $z = 0$ и $z = x$.

Решение: Найдем внешнюю нормаль:

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|} = \frac{x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}}{R},$$

$$\text{где } F = x^2 + y^2 - R^2.$$

Вычислим

$$(\vec{a},\vec{n}) = \frac{(x-y)\cdot x + (x+y)\cdot y}{R} = \frac{x^2+y^2}{R} = \frac{R^2}{R} = R.$$

Введем координаты на цилиндре

$$x = R\cdot\cos\varphi,\ y = R\cdot\sin\varphi,\ z = z,\ d\sigma = R\cdot d\varphi\cdot dz.$$

Угол φ изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а z - от 0 до $z = x$, или $z = R\cdot\cos\varphi$ (см. рис. 34).

Рис. 34.

Таким образом,

$$\Pi = \iint_\sigma (\vec{a},\vec{n})d\sigma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} R^2 dz =$$

$$= R^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = 2R^3.$$

Ответ: $\Pi = 2R^3$.

<u>Пример 6.4.3.</u> Найти поток векторного поля $\vec{a} = z \cdot \vec{i} + \vec{j} - x \cdot \vec{k}$ через часть сферической поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенную в первом октанте.

<u>Решение</u>: Запишем уравнение сферической поверхности в виде $F(x, y, z) = 0: \ x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. Найдем внешнюю нормаль

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)}{|\operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)|} = \frac{x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}}{R}.$$

Вычислим

$$(\vec{a}, \vec{n}) = \ = \frac{x \cdot z + y - z \cdot x}{R} = \frac{y}{R}.$$

В координатах на сфере $(\vec{a}, \vec{n}) = \sin\theta \cdot \sin\varphi$, где $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ (первый октант).
Тогда

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\sigma} \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2\theta d\theta = R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos\theta}{2} d\theta = \frac{\pi R^2}{4}.$$

<u>Ответ</u>. $\Pi = \dfrac{\pi R^2}{4}$.

Теорема Остроградского - Гаусса

Теорема 6.2 ***Теорема Остроградского - Гаусса***. *Пусть σ – замкнутая кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая тело V. $\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$ – единичный вектор внешней нормали в точках поверхности σ , тогда поток векторного поля $\vec{a}(M) = (P, Q, R)$ (P, Q, R имеют непрерывные частные производные) через поверхность σ равен интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью от дивергенции поля $\vec{a}(M)$*

$$\oint\!\!\!\int_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dv.$$

В координатной форме формула Остроградского - Гаусса имеет вид

$$\oint_{\sigma}(P\cdot\cos\alpha+Q\cdot\cos\beta+R\cdot\cos\gamma)d\sigma=$$

$$=\iiint_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Пример 6.4.4. Вычислить поток векторного поля

$$\vec{a}(M)=(x-2z)\cdot\vec{i}+(3z-4x)\cdot\vec{j}+(5x+y)\cdot\vec{k}$$

через полную поверхность пирамиды с вершинами $A(1,0,0),\ B(0,1,0), C(0,0,1), O(0,0,0)$ (через внешнюю сторону поверхности).

Рис. 35.

Решение: Поверхность σ состоит из четырех плоских треугольников ABC, BOC, COA, AOB.

Используя свойство аддитивности, запишем

$$\Pi=\iint_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma=\iint_{\Delta ABC}(\vec{a},\vec{n}_1)d\sigma+\iint_{\Delta AOC}(\vec{a},\vec{n}_2)d\sigma+$$

$$+\iint_{\Delta AOB}(\vec{a},\vec{n}_3)d\sigma+\iint_{\Delta COB}(\vec{a},\vec{n}_4)d\sigma.$$

Вычислим поток через поверхность ΔABC , уравнение которой $x + y + z = 1$. Внешняя нормаль к данной поверхности

$$\vec{n}_1 = \frac{\operatorname{grad} F_1}{|\operatorname{grad} F_1|} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}},$$

где $F_1 = x + y + z - 1$. Следовательно $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Вычисляем поток проектированием на плоскость XOY

$$\Pi_1 = \iint_{D_{xy}} \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos\gamma|}\bigg|_{z=z(x,y)} dxdy =$$

$$= \iint_{Dxy} \frac{\dfrac{(x-2z) + (3z-4x) + (5x+y)}{\sqrt{3}}}{\left|1/\sqrt{3}\right|}\Bigg|^{1}_{z=1-x-y} dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} [2x + y + (1 - x - y)]dxdy = \int_0^1 (x+1)dx \int_0^{1-x} dy =$$

$$= \int_0^1 (1 - x^2)dx = \frac{2}{3}$$

Вычислим поток через поверхность ΔBOC, лежащей в плоскости YOZ. В этом случае вектор нормали к внешней стороне $\vec{n}_4 = -\vec{i}$, уравнение плоскости ΔBOC : $x = 0$. Поток векторного поля вычисляем, проектируя на плоскость YOZ.

$$\Pi_4 = \iint_{\Delta COB} \frac{(\vec{a},\, \vec{n})}{|\cos\alpha|}\bigg|_{x=x(y,z)} dydz = \iint_{\Delta COB} \frac{-(x-2z)}{|-1|}\bigg|_{x=0} dydz =$$

$$= \iint_{\Delta COB} 2zdydz = \int_0^1 2zdz \int_0^{1-z} dy = 2\cdot \int_0^1 z(1-z)dz =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Аналогично вычисляются потоки через поверхности ΔCOA и ΔAOB

$$\Pi_2 = \iint_{\Delta COA} (\vec{a},\, \vec{n}_2)d\sigma = \frac{1}{6};$$

$$\Pi_3 = \iint_{\Delta AOB} (\vec{a},\, \vec{n}_3) d\sigma = -1.$$

В результате $\Pi = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} - 1 = \dfrac{1}{6}$. Теперь решим данную задачу с помощью теоремы Остроградского - Гаусса. Найдем

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(x - 2z) + \frac{\partial}{\partial y}(3z - 4x) + \frac{\partial}{\partial z}(5x + y) = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Вычислим $\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dv = \iiint_V dv = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{6}$ (объем пирамиды).

Таким образом, двумя способами мы получили, что поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через полную поверхность пирамиды равен $1/6$. При этом использование теоремы Остроградского-Гаусса существенно облегчает процесс вычисления потока.

Поясним физический смысл понятия дивергенции. Для данной точки M возьмем замкнутую двустороннюю поверхность Σ, ограничивающую объем V , содержащий эту точку.

Рис. 36.

Для данного векторного поля $\vec{a}(M)$ мы можем написать формулу Остроградского - Гаусса

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} (\vec{a}, d\sigma) = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dv.$$

При сформулированных выше условиях на $\vec{a}(M)$ мы можем применить теорему о среднем для интеграла

$$\Pi = V \cdot \operatorname{div} \vec{a}(M_{\text{ср}}),$$

где $M_{\text{ср}}$ - некоторая точка, содержащаяся в V, откуда

$$\operatorname{div} \vec{a}(M_{\text{ср}}) = \frac{\Pi}{V}.$$

Стянем поверхность $\sum$ к точке M. При этом $M_{\text{ср}} \to M$, и из непрерывности $\operatorname{div} \vec{a}$ следует, что $\operatorname{div} \vec{a}(M_{\text{ср}}) \to \operatorname{div} \vec{a}(M)$. Поэтому

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{\sum \to M} \frac{\iint_{\sum} (\vec{a}, d\sigma)}{V}.$$

Выражение в правой части естественно называть плотностью потока векторного поля $\vec{a}$ в точке M.

Поэтому мы получаем, что дивергенция векторного поля равна плотности потока этого поля. Одновременно нами доказана инвариантность дивергенции, поскольку она определена через инвариантные величины.

6.5 Циркуляция векторного поля

Определение 6.11 ***Циркуляцией*** *векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль замкнутого контура C называется криволинейный интеграл 2-го типа от векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру C*

$$Ц = \oint_C (\vec{a}, \vec{\tau}) ds = \oint_C (\vec{a}, d\vec{\tau}).$$

Символ $\oint_C$ обозначает интегрирование по замкнутому контуру C. Если

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z) \cdot \vec{i} + Q(x, y, z) \cdot \vec{j} + R(x, y, z) \cdot \vec{k},$$

то циркуляция записывается в виде

$$Ц = \int_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

Если контур C расположен в силовом поле $\vec{a}(M)$, то циркуляция - это работа силы $\vec{a}(M)$ при перемещении материальной точки вдоль C.

Замечание. Криволинейный интеграл 2-го типа от векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру L называется иначе *линейным интегралом* векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль линии L.

Теорема Стокса

Теорема 6.3 ***Теорема Стокса***. *Пусть в области V задано векторное поле*
$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\cdot\vec{i} + Q(x,y,z)\cdot\vec{j} + R(x,y,z)\cdot\vec{k}$, *где P, Q, R - непрерывно дифференцируемые в рассматриваемой области функции; σ -кусочно-гладкая поверхность, лежащая в этой области и ограниченная контуром C. Единичный вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности выбирается так, чтобы направление обхода по контуру C было видно с конца вектора $\vec{n}$, совершающимся против часовой стрелки (правый винт). Тогда поток ротора через поверхность σ равен циркуляции поля $\vec{a}(M)$ по границе C этой поверхности, т.е. справедлива формула Стокса*

$$\iint_\sigma (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})d\sigma = \oint_C (\vec{a}, d\vec{r}).$$

В декартовой системе координат эта формула имеет вид

$$\iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{dy} - \frac{\partial Q}{dz}\right)\cdot\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{dz} - \frac{\partial R}{dx}\right)\cdot\cos\beta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy}\right)\cdot\cos\gamma\right] d\sigma = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

Здесь $\vec{n} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}$ - единичный вектор нормали в точках поверхности σ.

Ещё одна форма записи теоремы Стокса

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \; = \iint_\sigma \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma.$$

Для плоского векторного поля
$\vec{a}(M) = P(x, y) \cdot \vec{i} + Q(x, y) \cdot \vec{j}$, предполагая, что контур C лежит в плоскости Oxy, имеем *формулу Грина*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy} \right) dxdy = \oint_C Pdx + Qdy.$$

Таким образом, формула Грина есть частный случай формулы Стокса. Ориентация на C выбирается таким образом, что при интегрировании по C область D остается слева (положительная ориентация).

Пример 6.5.1. Найти циркуляцию векторного поля
$\vec{a}(M) = -y^2 \cdot \vec{i} + x^2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$ вдоль контура C, образованного пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с координатными плоскостями.

Решение: Данная задача может быть решена двумя способами: непосредственным вычислением циркуляции либо по теореме Стокса.

Рис. 37.

Вычислим циркуляцию непосредственно. Контур C является кусочно-гладким и состоит из трех частей: C_1, C_2, C_3. Поэтому по свойству аддитивности

$$Ц = Ц_1 + Ц_2 + Ц_3 = \oint_{C_1} \vec{a} d\vec{\tau} + \oint_{C_2} \vec{a} d\vec{\tau} + \oint_{C_3} \vec{a} d\vec{\tau}.$$

На линии $C_1 : z = 0, x^2 + y^2 = R^2$

$$Ц_1 = \oint_{C_1} \vec{a}\vec{\tau} = \oint_{C_1} -y^2 dx + x^2 dy + dz =$$

(замена) $x = R \cdot \cos t,\ y = R \cdot \sin t,\ z = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-R^2 \sin^2 t \cdot (-R \sin t) + R^2 \cos^2 t \cdot R \cos t \right] dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[R^3 \sin^3 t + R^3 \cos^3 t \right] dt = \frac{4}{3} R^3.$$

На линии $C_2 : x = 0,\ y^2 + z^2 = R^2$

$$Ц_2 = \oint_{C_2} \vec{a} d\vec{\tau} = \oint_{C_2} -y^2 dx + x^2 dy + dz = \oint_{C_2} dz = \int_0^R dz = R.$$

На линии $C_3 :\ y = 0,\ x^2 + z^2 = R^2$

$$Ц_3 = \oint_{C_3} \vec{a} d\vec{\tau} = \oint_{C_3} -y^2 dx + x^2 dy + dz = \oint_{C_3} dz = \int_0^R dz = -R.$$

Поэтому $Ц = \dfrac{4}{3} R^3$. Теперь воспользуемся формулой Стокса для нахождения циркуляции.

Найдем внешнюю нормаль к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Положим $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. Тогда

$$\operatorname{grad} F = 2x \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} + 2z \cdot \vec{k},$$

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = \frac{2(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k})}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}}{R}.$$

Вычислим ротор поля $\vec{a}(M) = -y^2 \cdot \vec{i} + x^2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$.

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x^2 & 1 \end{vmatrix} = 2(x+y) \cdot \vec{k}.$$

Скалярное произведение $\operatorname{rot} \vec{a}$ на нормаль $\vec{n}$ равно выражению

$$(\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}) = \frac{2}{R}(x+y)z.$$

Тогда по формуле Стокса

$$\text{Ц} = \iint_\sigma \frac{2}{R}(x+y)z d\sigma =$$

$$= \left[\text{замена} \begin{cases} x = R \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi, \\ y = R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi, \\ z = R\cos\theta, \\ d\sigma = R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \end{cases} \right] =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{2}{R}(R \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi + R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi) \cdot$$
$$\cdot R\cos\theta \cdot R^2 \cdot \sin\theta d\theta =$$

$$= 2R^3 \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cdot \cos\theta d\theta =$$
$$= 2R^3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}R^3.$$

<u>Ответ:</u> Ц$= \dfrac{4}{3}R^3$.

Содержание

Введение **3**

Теоретические вопросы к экзамену (зачету) **5**

Основные типы задач по темам „Методы интегрирования“ и „Определенный интеграл и его приложения“ **9**

Основные типы задач по темам „Несобственные интегралы“ и „Двойной и тройной интегралы и их приложения“ **29**

Основные типы задач по темам „Криволинейные и поверхностные интегралы“ и „Теория поля“ **39**

Приложение **47**

1 Неопределенный интеграл **48**

1.1 Определение первообразной 48

1.2 Неопределенный интеграл и таблица неопределенных интегралов 49

1.3 Свойства неопределенного интеграла 51

1.4 Непосредственное интегрирование 52

1.5 Методы интегрирования 53

1.5.1 Метод интегрирования подстановкой 53

1.5.2 Метод интегрирования по частям 55

1.6 Интегрирование некоторых типов элементарных функций 60

1.6.1 Интегрирование рациональных функций . . 60

1.6.2 Интегрирование тригонометрических выражений 67

1.6.3 Интегрирование иррациональных функций . 72

2 Определенный интеграл **78**

2.1 Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла 78

2.2 Свойства определенного интеграла 80

2.3 Непосредственное интегрирование по формуле Ньютона-Лейбница 82

2.4 Замена переменной в определенном интеграле . . . 83
2.5 Интегрирование по частям в определенном интеграле 83
2.6 Геометрические приложения определенного интеграла 84
2.6.1 Вычисление площадей, ограниченных кривыми, заданными в декартовых координатах . . 84
2.6.2 Вычисление площадей, ограниченных кривыми, заданных параметрически 85
2.6.3 Вычисление площадей в полярных координатах 86
2.6.4 Вычисление объема тела через площади его сечений 88
2.6.5 Вычисление объема тела вращения 89
2.6.6 Вычисление площади поверхности вращения 92
2.6.7 Вычисление длины дуги с помощью определенного интеграла 93
2.7 Приложения определенного интеграла в механике и физике 95
2.7.1 Работа переменной силы 95
2.7.2 Путь и перемещение при движении с переменной скоростью 96
2.7.3 Вычисление статических моментов и координат центра масс 97
2.7.4 Приложение к задачам электротехники . . . 102
2.7.5 Простейшие дифференциальные уравнения и их решение 104

3 Несобственные интегралы 106
3.1 Несобственные интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы 1-го рода) 106
3.1.1 Определение. Понятие сходящихся и расходящихся интегралов 106
3.1.2 Основные свойства несобственных интегралов с бесконечными пределами 109
3.1.3 Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами 110

3.1.4 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов 1-го рода 113

3.2 Несобственные интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы 2-го рода) . . . 114

3.2.1 Определение. Понятие сходящихся и расходящихся интегралов 114

3.2.2 Признаки сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций 117

4 Криволинейные интегралы 120

4.1 Криволинейный интеграл 1-го рода (по длине дуги) 123

4.2 Криволинейный интеграл 2-го рода (по координатам) 126

5 Поверхностные интегралы 131

5.1 Поверхностные интегралы 1-го типа (по площади поверхности) 133

5.2 Поверхностный интеграл 2-го типа (по координатам) 137

6 Элементы теории поля 139

6.1 Понятие поля. Скалярное и векторное поля 139

6.2 Скалярное поле. Производная поля по направлению. Градиент 140

6.3 Векторное поле. Дивергенция. Ротор 147

6.4 Поток векторного поля и его вычисление 151

6.5 Циркуляция векторного поля 161