Федеральное агентство по образованию

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет „ЛЭТИ“

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО КУРСУ „МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ“

Санкт-Петербург
2008

Федеральное агентство по образованию

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет „ЛЭТИ“

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО КУРСУ „МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ“

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2008

УДК 519.677(075)
ББК В16я7
Т39

Колбина С. А., Коновалов Г. М., Снетков О. А., Сулимов М. Г. Типовые расчеты по курсу „Математический анализ“: Учебное пособие.
Т39 СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2008. ? с.
ISBN 5–7629–0795–3

Описываются типовые расчеты, выдаваемые студентам первого курса для самостоятельного выполнения. Каждый типовой расчет предваряется необходимым для его выполнения подробным изложением теории (без доказательств). Кроме того даются ссылки на учебники и учебные пособия, в которых можно найти доказательство приведенных теорем и утверждений. В конце каждого пункта пособия приводится вариант задания с его полным решением. Пособие соответствует унифицированной рабочей программе дисциплины „Математический анализ“ для студентов первого курса факультетов электротехники и автоматизации, электроники, экономики и менеджмента и открытого факультета.

Предназначено для студентов всех направлений и специальностей факультетов электротехники и автоматизации, электроники, экономики и менеджмента и открытого факультета.

УДК 519.677(075)
ББК В16я7

Рецензенты: кафедра высшей математики СПбГУТ;
д-р физ.-мат. наук проф. Я. И. Белопольская (СПбГАСУ).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN 5–7629–0795–3

ВВЕДЕНИЕ

Созданный на кафедре ВМ–1 компьютерный пакет индивидуальных типовых расчетов (ТР) с возможностью генерации любого числа различных вариантов способствует активизации самостоятельной работы студентов и более глубокому усвоению теоретического материала, излагаемого на лекциях.

Данное учебное пособие посвящено подробному описанию ТР, которые выдаются студентам для самостоятельного выполнения. В издании содержатся теоретические сведения, необходимые для этого и примеры выполнения конкретных ТР.

В учебном пособии рассмотрены пять ТР, которые выдаются студентам первого курса при изучении дисциплины „Математический анализ“ и соответствуют унифицированной рабочей программе. Дадим список включенных в пособие ТР и ссылки на учебные пособия и учебники, в которых можно найти подробное изложение теории с доказательствами.

1. Построение графика функции (ТР 2.2) см. учебное пособие [1] и учебник [2].

2. Интегрирование рациональных дробей (ТР 2.3) см. учебное пособие [1] и учебник [2].

3. Вычисление интеграла по формуле трапеций с оценкой числа узлов и с помощью специальных функций (ТР 2.4) см. учебное пособие [1] и учебник [2].

4. Экстремумы функций двух переменных (ТР 2.5) см. учебное пособие [3] и учебник [2].

5. Числовые ряды и их применение (ТР 2.6) см. учебное пособие [1] и учебник [2].

Студенту выдается распечатка, содержащая номер варианта и условие ТР. Алгоритмы выполнения ТР обсуждаются на лекциях и на соответствующих практических занятиях. Все ТР ориентированы на использование калькуляторов. Студенты могут выполнять ТР с использованием программ, реализующих заданный алгоритм, при условии, что приложена распечатка с текстом программы, результатами вычислений и студент может пояснить работу всех операторов и программы в целом.

Отчет по ТР должен включать: 1) стандартный титульный лист; 2) условие ТР (распечатку, содержащую условие ТР, студенты наклеивают в самом начале своего отчета); 3) содержание ТР (в этом разделе формулируется математическая задача, которая решается в ТР); 4) достаточно подробное описание выполнения ТР; 5) ответы на все пункты задания.

Студентам настоятельно рекомендуется делать провеку полученных результатов. В примерах выполнения конкретных ТР в учебном пособии даны указания относительно выполнения проверок.

1. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Графическое изображение функциональной зависимости привлекает своей наглядностью и легкой обозримостью. В главе рассматривается практический подход к построению математически правильного эскиза графика функции, основанного на выявлении характерных особенностей заданной функции. Ниже приводятся сведения, необходимые для выявления этих характерных особенностей.

Пусть задана функция $f\colon X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$.

1.1. Непрерывность функции

Определение 1.1. *Функция $f\colon X \to Y$ называется непрерывной в точке $a \in X$, если a – изолированная точка X, или a – предельная точка X и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Если f непрерывна в каждой точке множества X, то она непрерывна на X.

Теорема 1.1. *Пусть функции $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to \mathbb{R}$ непрерывны в точках a и $f(a)$ соответственно. Тогда их суперпозиция $f \circ g$ непрерывна в точке a.*

Теорема 1.2. *Пусть функции $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке a. Тогда $f+g$, $f-g$, fg, f/g (при $g(a) \neq 0$) непрерывны в точке a.*

Определение 1.2. *Функция $f\colon X \to Y$ называется непрерывной слева (справа) в точке $a \in X$, если a – изолированная точка X, или a – предельная слева (справа) точка X и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)$ $(\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a))$.*

Теорема 1.3. *Пусть $a \in X$ – предельная слева и справа точка X. Функция $f\colon X \to Y$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда f непрерывна слева и справа (одновременно) в точке a.*

Предложение 1.1. *Функция $f\colon X \to Y$ непрерывна в предельной для множества X точке a, если выполнены три условия:*

1) *f определена в точке a;*
2) *существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;*
3) *$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Предложение 1.2. *Любая из основных элементарных функций (c, x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$) непрерывна в своей области определения.*

1.2. Точки разрыва функции

Определение 1.3. *Если в точке a, предельной для множества X, нарушено хотя бы одно из условий 1, 2, 3 Предложения 1.1, то a называется точкой разрыва функции f.*

Определение 1.4. *Точка разрыва a функции f называется:*

1) *точкой устранимого разрыва, если существует конечный* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

2) *точкой разрыва первого рода, если существуют конечные, но различные* $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$;

3) *точкой разрыва второго рода, если она не является точкой разрыва первых двух типов, т. е. если хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.*

1.3. Асимптоты графика функции

Определение 1.5. *Пусть $f\colon X \to Y$. Если хотя бы один из пределов* $\lim\limits_{x\to x_0-0} |f(x)|$ *или* $\lim\limits_{x\to x_0+0} |f(x)|$ *равен $+\infty$, то прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика f.*

Очевидно, если прямая $x = x_0$ есть вертикальная асимптота графика функции f, то x_0 есть точка разрыва второго рода функции f.

Определение 1.6. *Если множество X не ограничено сверху и существуют $k, b \in \mathbb{R}$, такие, что*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0,$$

то прямая $y = kx + b$ называется правой наклонной асимптотой графика функции f.

Аналогично определеяется левая наклонная асимптота.

Теорема 1.4. *Пусть X – неограниченное сверху множество. Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была правой наклонной асимптотой графика f, необходимо и достаточно, чтобы одновременно существовали конечные пределы*

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx).$$

Аналогичная теорема верна для левой наклонной асимптоты.

1.4. Монотонность и экстремумы функции

Определение 1.7. *Функция $f\colon X \to Y$ называется:*

1) *возрастающей (неубывающей), если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_1 < x_2$ выполнено $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$);*

2) *убывающей (невозрастающей), если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_1 < x_2$ выполнено $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$);*

3) *монотонной, если она входит в один из четырех перечисленных классов;*

4) *строго монотонной, если она возрастает или убывает.*

Пусть функция $f\colon [a, b] \to Y$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b).

Теорема 1.5. 1. *Функция f не убывает (не возрастает, постоянна) на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $f' \geq 0$ (≤ 0, $= 0$) на (a, b);*

2. *Если $f' > 0$ (< 0) на (a, b), то функция f возрастает (убывает) на $[a, b]$.*

Определение 1.8. *Пусть $f\colon X \to Y$, $x_0 \in X$. Говорят, что функция f в точке x_0 достигает:*

1) *максимума (минимума), если x_0 – предельная точка X и существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любого $x \in \overset{\circ}{K}_\varepsilon(x_0) \cap X$ выполнено $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$);*

2) *экстремума, если f в точке x_0 достигает максимума или минимума;*

3) *наибольшего (наименьшего) значения, если для любого $x \in X$ справедливо $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).*

Точки, в которых f достигает максимума (минимума, экстремума) называются точками максимума (минимума, экстремума) функции f.

Теорема 1.6. (Ферма). *Пусть $f\colon\ X \to Y$, $x_0 \in X$. Если:*

1) *x_0 – предельная слева и справа точка x;*

2) *существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $x \in \overset{\circ}{K}_\varepsilon(x_0) \cap X$ выполнено $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$);*

3) *существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.*

Следствие 1.1. *Если в точек x_0 предельной слева и справа для множества X, функция f достигает максимума (минимума, наибольшего или наименьшего значения) и существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.*

Определение 1.9. *Пусть $f\colon\ X \to Y$, $x_0 \in X$ предельная точка множества X. Если точка x_0 предельная справа (но не слева), или x_0 предельная слева (но не справа) или $f'(x_0) = 0$, или $f'(x_0)$ не существует, то x_0 называется критической точкой функции.*

Согласно следствию 1.1 функция может иметь экстремум (а также наибольшее и наименьшее значения) только в критических точках.

Теорема 1.7. *Пусть функция f непрерывна в точке x_0 для некоторого $\varepsilon > 0$, $K_\varepsilon(x_0) \subset X$ и существует f' в $\overset{\circ}{K}_\varepsilon(x_0)$. Тогда:*

1) если $f' > 0$ на $(x_0 - \varepsilon), x_0$ и $f' < 0$ на $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, то x_0 – точка максимума;

2) если $f' < 0$ на $(x_0 - \varepsilon), x_0$ и $f' > 0$ на $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, то x_0 – точка минимума;

3) если $f' > 0$ $(f' < 0)$ на $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$, то в x_0 экстремума нет.

Определение 1.10. *Кртитическая точка x_0 функции f называется стационарной, если $f'(x_0) = 0$.*

Теорема 1.8. *Пусть x_0 стационарная точка функции f и существует $f''(x_0)$. Тогда, если $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$, то x_0 – точка минимума (максимума).*

1.5. Выпуклость функции. Точки перегиба

Определение 1.11. *Пусть $f\colon\ X \to Y$ дифференцируема в точке $x_0 \in X$. Будем говорить, что функция f выпукла вниз (вверх) в точке x_0, если существует $\varepsilon > 0$ Такое, что для любого $\overset{\circ}{K}_\varepsilon(x_0) \cap X$ справедливо неравенство*

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0);$$

$$(f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Геометрически выпуклость вниз (вверх) в точке x_0 означает, что в некоторой проколотой окрестности x_0 график функции f лежит выше (ниже) касательной к графику f в точке x_0.

Теорема 1.9. *Пусть $f\colon\ X \to Y$ дважды дифференцируема в точке $x_0 \in X$. Если $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$ то функции f выпукла вниз (вверх) в точке x_0.*

Определение 1.12. *Точка $x_0 \in X$ называется точкой перегиба функции f, если точка x_0 есть предельная слева и справа точка множества X и существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $x \in (x_o - \varepsilon, x_0)$*

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

и любого $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

или наоборот.

Теорема 1.10. *Пусть x_0 точка перегиба функции f. Если существует $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.*

Предельные слева и справа точки из множества X, в которых вторая производная функции f равна нулю или не существует, называются точками подозрительными на перегиб.

Теорема 1.11. *Пусть x_0 точка подозрительная на перегиб. Если при переходе через такую точку вторая призводная меняет знак, то x_0 – точка перегиба функции f.*

В противном случае в точке x_0 перегиба нет.

1.6. Алгоритм половинного деления (бисекций)

Теорема 1.12 (Больцано–Коши). *Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах разные знаки. Тогда найдется хотя бы одна точка $x_0 \in (a, b)$, такая, что $f(x_0) = 0$.*

Эта теорема позволяет обосновать ряд методов для вычисления приближенного значения корня уравнения $f(x) = 0$.

Пусть требуется найти приближенное значение корня уравнения

$$f(x) = 0$$

с некоторой заданной погрешностью $\varepsilon > 0$. Это значит, что если x^* – корень уравнения, то требуется найти значение $\bar{x}$, такое, что $|\bar{x} - x^*| < \varepsilon$. Предположим далее, что функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Пусть $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Разделим промежуток $[a, b]$ пополам точкой $c = \dfrac{a+b}{2}$ и вычислим значение функции в этой точке $f(c)$.

Если $f(c) = 0$, то корень уравнения найден точно и процесс вычислений заканчивается.

Если же $f(c) \neq 0$, тогда на концах одного из промежутков $[a, c]$ или $[c, b]$ функция будет принимать значения разных знаков. Причем отрицательное значение – на левом конце, а положительное – на правом. Обозначим этот промежуток через $[a_1, b_1]$, тогда $f(a_1) < 0$; $f(b_1) > 0$. Заметим, что если длина этого промежутка $l_1 = b_1 - a_1 < 2\varepsilon$, то точка $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ есть приближенное значение корня уравнения с точностью ε и процесс вычислений завершается.

В противном случае снова разделим промежуток $[a_1, b_1]$ пополам точкой $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ и вычислим значение $f(c_1)$. Обозначим через $[a_2, b_2]$ ту из половин промежутка, для которой $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$ и таким образом продолжим процесс построения промежутков. Для n-го промежутка $[a_n, b_n]$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ будем иметь $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$, а длина его равна

$$l_n = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}.$$

Определим N – необходимое число делений отрезка для достижения заданной точности

$$l_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} < 2\varepsilon,$$

или

$$b - a < \varepsilon \cdot 2^n.$$

Прологарифмировав по основанию 2 это неравенство, получим

$$\log_2(b-a) < \log_2 \varepsilon + n$$

и

$$n > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

Следовательно, необходимое число шагов

$$N = \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil, \qquad (1.1)$$

где $\lceil \alpha \rceil$ – наименьшее целое, большее или равное α.

1.7. Типовой расчет по теме „Построение графика функции“ (ТР 2.2)

Задача заключается в построении эскиза графика функции, отражающего такие основные характеристики как интервалы монотонности, экстремумы, выпуклости и т.п. Исследование заданной функции и построение эскиза ее графика целесообразно проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) найти интервалы непрерывности функции, а также точки разрыва с указанием вида разрыва;

3) исследовать поведение функции на $\pm\infty$ и найти асимптоты;

4) найти интервалы возрастания, убывания и локальные экстремумы функции;

5) найти точки пересечения графика с осями координат;

6) найти интервалы знакопостоянства функции;

7) найти интервалы выпуклости и точки перегиба;

8) построить эскиз графика, применяя результаты пп. 1)–7).

Студент получает индивидуальное задание, имеющее вид:

ТР 2.2. Вар. 99. Исследовать заданную функцию. Найти значение параметра a, при котором функция непрерывна в точке $x = -2$. Уточнить корень функции на промежутке $[-2; -1]$ с точностью 0.01. Построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} -2\sqrt[3]{(x+3)^2} - 2x - 6, & x < -2, \\ a(14x^3 + 76x^2 + 150x + 100, & -2 \le x \le -1, \\ \dfrac{-2(x-2)^2}{(x+1)^2}, & x > -1. \end{cases}$$

Пример выполнения ТР 2.2.

Найдем значение параметра a из условия непрерывности $f(x)$ в точке $x = -2$. Согласно теореме 1.3 , необходимо

$$\lim_{x \to -2-0} f(x) = \lim_{x \to -2+0} f(x) = f(-2).$$

Вычисления дают:

$$\lim_{x \to -2-0} f(x) = \lim_{x \to -2-0} (-2\sqrt[3]{(x+3)^2} - 2x - 6) = -4,$$

$$\lim_{x \to -2+0} f(x) = \lim_{x \to -2+0} a(14x^3 + 76x^2 + 150x + 100) =$$
$$= a(-14 \cdot 8 + 76 \cdot 4 - 150 \cdot 2 + 100) = -8a.$$

Из равенства этих предельных значений, получим $-8a = -4$, и следовательно, $a = 0.5$.

Введем обозначения:

$$f_1(x) = -2\sqrt[3]{(x+3)^2} - 2(x+3), \quad x < -2,$$
$$f_2(x) = 7x^3 + 38x^2 + 75x + 50, \quad -2 \le x \le -1,$$
$$f_3(x) = \frac{-2(x-2)^2}{(x+1)^2}, \quad x > -1.$$

Далее будем исследовать каждую из функций $f_i(x)$, $(i = 1, 2, 3)$, по схеме, приведенной выше.

1. Исследование функции $f_1(x)$.

Область определения $D(f_1)$ есть интервал $(-\infty, -2)$.

Функция $f_1(x) = -2\left((x+3)^{2/3} + (x+3)\right)$ является линейной комбинацией функций $(x+3)^{2/3}$ и $(x+3)$ и, согласно теореме 1.2 и предложению 1.2 является непрерывной в $D(f_1)$.

Чтобы выяснить поведение f_1 на минус бесконечности, достаточно вычислить $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty}[-2\sqrt[3]{(x+3)^2} + (x+3)] =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-2(x+3)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+3}} + 1\right)\right] = +\infty. \qquad (1.2)$$

Так как $f_1(x)$ в области $D(f_1)$ не имеет разрывов 2-го рода, то вертикальных асимптот нет. Это следует из определения 1.5 . С другой стороны, $D(f_1) = (-\infty, -2)$ не ограничена снизу, поэтому, согласно определению 1.6 , имеет смысл проверить наличие у графика $y = f_1(x)$ только левой наклонной асимптоты. Следуя теореме 1.5

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2\left((x+3)^{2/3} + (x+3)\right)}{x} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2(x+3)}{x}\left[(x+3)^{-1/3} + 1\right] =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-2\left(1+\frac{3}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+3}} + 1\right)\right] = -2,$$
$$b = \lim_{x\to-\infty}(f_1(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty}\left[-2\left((x+3)^{2/3} + (x+3)\right) + 2x\right] =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-2(x+3)^{2/3} - 2x - 6 + 2x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[-2(x+3)^{2/3} - 6\right] = -\infty.$$

Второй предел ,бесконечен, следовательно, левой наклонной асимптоты нет.

Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции f_1.

Чтобы найти интервал монотонности функции, следует, согласно теореме 1.5 , найти интервал знакопостоянства ее производной. Для этого вычислим $f_1'(x)$:

$$f_1'(x) = -2\left(\frac{2}{3}(x+3)^{-1/3} + 1\right) = -2\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x+3}} + 1\right).$$

Найдем точку x_1 такую, что производная $f_1'(x)$ при переходе через x_1 меняет знак. Для этого следует решить уравнение

$$f_1'(x_1) = 0,$$

то есть

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x_1+3}} + 1 = 0,$$
$$2 + 3\sqrt[3]{x_1+3} = 0,$$

$$\sqrt[3]{x_1+3} = -\frac{2}{3},$$
$$x_1 + 3 = -\frac{8}{27}.$$

Таким образом,

$$x_1 = -3 - \frac{8}{27} \cong -3.296.$$

Заметим, что точка $x_2 = -3$ принадлежит области $D(f_1)$, но в этой точке производной $f_1'(x)$ не существует. Согласно определению 1.9 точки $x_1 \approx -3.296$ и $x_2 = -3$ являются критическими точками. В результате область $D(f_1)$ разбивается на три интервала $(-\infty, x_1)$, $(x_1, -3)$, $(-3, -2)$. Определим знак $f_1'(x)$ в каждом из этих интервалов. Для этого выберем какую-либо пробную точку внутри каждого интервала и вычислим значения производной $f_1'(x)$ в этих точках. Знак значения $f_1'(x)$ и есть знак производной на соответствующем интервале.

Например, для интервала $(-\infty, x_1)$ выберем $x = -11$ и вычислим

$$f_1'(11) = -2\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{-8}} + 1\right) = -1\frac{1}{3} < 0.$$

Следовательно, на интервале $(-\infty, x_1)$ производная $f_1'(x) < 0$ и в соответствии с утверждением теоремы 1.7 функция $f_1(x)$ на этом интервале убывает.

Для интервала $(x_1, -3)$ выберем точку $x = -3.1$. Вычислим

$$f_1(-3.1) = -2\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{-0.1}} + 1\right) \cong 0.873 > 0.$$

Таким образом, на интервале $(x_1, -3)$ производная $f_1'(x) > 0$ и функция $f_1(x)$ на этом интервале возрастает. Так как $f'(x_1) = 0$, то $f'(x)$ меняет знак с "$-$" на "$+$" при переходе через точку x_1 и, следовательно, в соответствии с теоремой 1.7 , x_1 есть точка минимума.

Определим знак производной $f_1'(x)$ на интервале $(-3, -2)$. Так как при $-3 < x < 2$ выражение $\sqrt[3]{x+3} > 0$, то $f_1'(x) < 0$ и, следовательно, функция $f_1(x)$ строго убывает.

Производная $f_1'(x)$ при переходе через точку $x_2 = -3$ меняет знак с "$+$" на "$-$", значит точка $x_2 = -3$ есть точка максимума.

Вспомним, что $f'(x)$ есть тангенс угла наклона касательной к графику функции в точке x. Производная $f'(-3)$ не существует, следовательно, касательная в этой точке вертикальна. Таким образом, в точке $x_1 = -3$ имеет место „острый максимум“.

Найдем точки пересечения графика функции $f_1(x)$ с осями координат. Область $D(f_1)$ не включает точку $x = 0$ и, следовательно, график функции $f_1(x)$ с осью $0y$ не пересекается.

Чтобы найти точки пересечения графмка $f_1(x)$ с осью $0x$ следует решить уравнение $f_1(x) = 0$ т.е.

$$-2\left(\sqrt[3]{(x+3)^2} + (x+3)\right) = 0,$$

$$\sqrt[3]{(x+3)^3} = -(x+3),$$
$$(x+3)^2 = -(x+3)^3,$$
$$(x+3)^2(1+x+3) = 0,$$
$$x = -3,$$
$$x = -4.$$

Нули функции $f_1(x)$, точками $x = -3$ и $x = -4$ ризбивают $D(f_1)$ на следующие промежутки:

$$(-\infty, -4),\ (-4, -3),\ (-3, -2).$$

Исследуем знаки функции $f_1(x)$. Установили, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$ и что на интервале $(-\infty, x_1 \approx -3.296)$ функция $f_1(x)$ убывает. Поэтому на интервале $(-\infty, -4) \subset (-\infty, x_1)$ функция f_1 положительна, а на интервале $(-4, -3)$ – отрицательна. На интервале $(-3, -2)$ функция $f_1(x)$ убывает, но $f_1(-3) = 0$ и, следовательно, она отрицательна.

Вычислим предельное значение функции в точке $x = -2$ слева, т.е.

$$\lim_{x\to-2-0} f_1(x) = \lim_{x\to-2-0}\left[-2\left(\sqrt[3]{(x+3)^2} + (x+3)\right)\right] = -4.$$

Найдем интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции f_1. Для этого, согласно теореме 1.11 , следует найти интервалы знакопостоянства второй производной функции $f_1(x)$:

$$f_1''(x) = \left(-2\left(\frac{2}{3}(x+3)^{-1/3} + 1\right)\right)' = \frac{4}{9}(x+3)^{-4/3} = \frac{4}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+3)^4}}.$$

В точке $x = -3$ второй производной $f_1''(-3)$ не существует. Следовательно, точка $(x = -3)$ является подозрительной на перегиб. Других точек, подлежащих исследованию на перегиб нет. Таким образом, точка $x = -3$ разбивает область $D(f_1)$ на два промежутка $(-\infty, -3)$ и $(-3, -2)$. В этих промежутках $f_1''(x) > 0$, т. е. функция $f_1(x)$ выпукла вниз. При переходе через точку $x = -3$ вторая производная $f''(x)$ не меняет знак. Согласно теореме 1.11 эта точка не является точкой перегиба.

Результаты проведенного исследования удобно свести в таблицу.

Таблица 1.1

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, x_1)$	$x_1 \approx -3.296$
y	$+$	0	$-$	-0.296
y'	$-$	$-$	$-$	0
y''	$+$	$+$	$+$	$+$
Вып.	$\searrow\bigcup$	нуль	$\searrow\bigcup$	min
x	$(x_1, -3)$	-3	$(-3, -2)$	-2
y	$-$	0	$-$	-4
y'	$+$	не сущ.	$-$	$-$
y''	$+$	не сущ.	$+$	$+$
Вып.	$\nearrow\bigcup$	нуль, остр. max	$\searrow\bigcup$	

С помощью этой траблицы строится график функции $f_1(x)$, эскиз которой приведен на рис. 1.1.

2. Исследование функции $f_2(x)$

Функция $f_2(x) = 7x^3 + 38x^2 + 75x + 50$ задана на области определения $D(f_2) = [-2, -1]$.

Поскольку функция $f_2(x)$ есть многочлен 3-й степени, она непрерывной на всей числовой оси. В силу конечности $D(f_2)$ наклонных асимптот быть не может. Нет и вертикальных асимптот.

Найдем интервалы монотонности функции f_2. Для этого исследуем поведение производной $f_2'(x)$

$$f_2'(x) = 21x^2 + 76x + 75.$$

Дискриминант $D = 76^2 - 4 \cdot 21 \cdot 75 = -524$ отрицательный, следовательно, вещественных корней нет, как нет и точек экстремума. Так как коэффициент при x^2 положительный, то $f_2'(x) > 0$ и, следовательно, $f_2(x)$ строго возрастет. Вычислим значения $f_2(x)$ на концах этого отрезка:

$$f_2(-2) = -7 \cdot 8 + 38 \cdot 4 - 75 \cdot 2 + 50 = -4,$$

$$f_2(-1) = -7 + 38 - 75 + 50 = 6.$$

Выяснили, что $f_2(x)$ в области $D(f_2)$ строго возрастает и принимает значения противоположных знаков на концах отрезка $[-2, -1]$. Согласно теореме 1.12 существует по крайней мере одна точка $x_2 \in (-2; -1)$, такая, что $f_2(x_2) = 0$ и в силу строгой монотонности функции f_2 на этом интервале можно утверждать, что такая точка единственная. Найдем приближенное значение корня уравнения $f_2(x) = 0$ с заданной точностью $\varepsilon = 0.01$, используя алгоритм половинного деления. Первоначально следует определить необходимое число делений отрезка $[-2, -1]$ по формуле (1.1)

$$N = \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil = \left\lceil \log_2 \frac{1}{0.01} \right\rceil = \lceil \log_2 100 \rceil = \lceil 6.644 \rceil = 7.$$

Для проведения вычислений по алгоритму целесообразно промежуточные результаты записывать в таблицу (см. таблицу 1.2).

Таблица 1.2

n	a	b	$\dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$
1	-2	-1	-1.5	-4	6	-0.625
2	-1.5	-1	-1.25	-0.625	6	1.953
3	-1.5	-1.25	-1.375	-0.625	1.953	0.522
4	-1.5	-1.375	-1.438	-0.625	0.522	-0.082
5	-1.438	-1.375	-1.406	-0.082	0.522	0.211
6	-1.438	-1.406	-1.422	-0.082	0.211	0.063
7	-1.438	-1.422	-1.430	-0.082	0.063	-0.010

Следует обратить внимание, что знаки чисел в графах $f(a)$ и $f(b)$ не изменяются и противоположны.

Приближенное значение корня x_2 уравнения $f_2(x) = 0$ находим в последней строке таблицы 1.2 в графе $\dfrac{a+b}{2}$, т. е. $x_2 \approx -1.43$. Модуль разности между точным значением x_2 нуля функции $f_1(x)$ и его приближенным значением (-1.43) не превосходит $\varepsilon = 0.01$, т. е.

$$|-1.43 - x_2| < \varepsilon.$$

Точка x_2 разбивает область $D(f_2)$ на два промежутка $[-2, x_2)$ и $(x_2, -1]$ так, что на правом промежутке функция $f_2(x) < 0$, а на левом $f_2(x) > 0$.

Для определения интервалов выпуклости вычислим вторую производную функции $f_2(x)$

$$f_2''(x) = (21x^2 + 76x + 75)' = 42x + 76.$$

Найдем точки подозрительные на перегиб. Для этого решим уравнение $f_2''(x) = 0$ т. е. $42x + 76 = 0$.

Отсюда имеем, что корень этого уравнения есть $x_3 \approx -1.809$. Точка x_3 делит область $D(f_2)$ на два промежутка $[-2; x_3)$ и $(x_3; -1]$, причем на первом промежутке $f_2''(x) < 0$, а на втором $f_2''(x) > 0$. Отсюда, в соответствии с теоремой 1.11 , следует, что x_3 есть точка перегиба.

Сведем результаты исследования функции $f_2(x)$ в таб. 1.3.

Таблица 1.3

x	-2	$(-2; x_3)$	$x_3 \approx -1.809$	$(x_3; x_2)$	$x_2 \approx -1.43$	$(x_2; -1]$	-1
y	-4	$-$	-2.76	$-$	0	$+$	6
y'	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y''	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
Вывод		$\nearrow \bigcap$	т. перегиба	$\nearrow \bigcup$	нуль	$\nearrow \bigcup$	

С помощью этой таблицы строится график функции $f_2(x)$. Эскиз этого графика приведен на рис. 1.1.

3. Исследование функции $f_3(x)$.

В соответствии с заданием функция $f_3(x) = -\dfrac{2(x-2)^2}{(x+1)^2}$ задана в области $D(f_3) = (-1, +\infty)$. Чтобы выяснить поведение f_3 на плюс бесконечности, вычислим

$$\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-2\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}\right) = 2.$$

Функция $f_3(x)$ в соответствии с теоремой 1.2 и предложением 1.2 является непрерывной.

Рассмотрим поведение функции $f_3(x)$ в окрестности левой границы области. Для этого вычислим

$$\lim_{x\to-1+0} f_3(x) = -2\lim_{x\to-1+0}\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} = -\infty.$$

Следовательно, функция терпит разрыв 2-го рода в точке $x = -1$ и имеет вертикальную асимптоту $x = -1$ (см. определение 1.5). Область $D(f_3)$ неограниченна справа, поэтому имеет смысл проверить наличие правой наклонной асимптоты у графика функции $y = f_3(x)$. Следуя теореме 1.5 , вычисляем пределы

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f_3(x)}{x} = -2\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)^2}{x(x+1)^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f_3(x) - kx) = -2\lim\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} = -2.$$

Так как оба предела конечны, то график функции f_3 имеет правую горизонтальную асимптоту $y = -2$.

Для определения интервалов монотонности функции $f_3(x)$ вычислим производную $f_3'(x)$ и найдем интервалы знакопостоянства (см. теорему 1.7):

$$f'(x) = \left(-2\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}\right)' = -2\frac{2(x-2)(x+1)^2 - 2(x-2)^2(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= -12\frac{x-2}{(x+1)^3}.$$

Очевидно, $f_3'(x)$ имеет единственный нуль $x = 2$ и таким образом, область $D(f_3)$ разбивается на два промежутка монотонности $(-1, 2)$ и $(2, +\infty)$. На первом промежутке $-2 < x < 2$ производная $f_3'(x) > 0$ и, следовательно, функция $f_3(x)$ на этом промежутке возрастает. На втором промежутке $2 < x < +\infty$ производная $f_3'(x) < 0$ и функция убывает. Так как $f_3'(x)$ при переходе через точку $x = 2$ меняет знак с "+" на "−", то, согласно теореме 1.8 , можно утверждать, что $x = 2$ есть точка максимума.

Найдем точки пересечения графика функции $f_3(x)$ с осями координат. Так как точка $x = 0$ лежит в области $D(f_3)$, то график функции $f_3(x)$ пересекает ось $0y$. Найдем эту точку $(0; f(0))$. Так как

$$f_3(0) = -2\frac{(-2)^2}{1^2} = -8,$$

то точка пересечения графика функции с осью ординат имеем координаты $(0, -8)$. Точки пересечения графика $f_3(x)$ с осью $0x$ найдем, решая уравнение $f_3(x) = 0$ или

$$-2\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} = 0.$$

Отсюда имеем $x = 2$.

Заметим, что нуль функции $f_3(x)$, точка $x = 2$, разбивает область $D(f_3)$ на два промежутка $(-2, 2)$ и $(2, +\infty)$. На первом промежутке функция $f_3(x) < 0$, так как на этом интервале она, как было установлено ранее, возрастает и достигает нулевого значения. В силу того, что на интервале $(2, +\infty)$ функция $f_3(x)$ строго убывает и не меняет знак, то $f_3(x) < 0$.

Наконец, найдем интервалы выпуклости и точки перегиба функции $f_3(x)$. Согласно теореме 1.9 найдем интервалы знакопостоянства $f_3''(x)$

$$f_3''(x) = \left(-12\frac{x-2}{(x+1)^3}\right)' = -12\frac{(x+1)^3 - 3(x+1)^2(x-2)}{(x+1)^6} = -12\frac{7-2x}{(x+1)^4}.$$

Решив уравнение $f_3''(x) = 0$

$$-12\frac{7-2x}{(x+1)^4} = 0$$

найдем точки подозрительные на перегиб. Уравнение имеет только один корень $x = 3.5$. Эта точка разбивает область $D(f_3)$ на интервалы $(-2, 3.5)$ и $(3.5, +\infty)$.

Чтобы определить знак $f_3''(x)$ на первом интервале, вычислим значение $f_3''(x)$ в любой пробной точке области $-2 < x < 3.5$. Например, при $x = 0$

$$f''(0) = -12 \cdot 7 = -84,$$

т. е. $f_3''(x) < 0$ и функция $f_3(x)$ выпукла вверх на $-2 < x < 3.5$.

На интервале $(3.5; +\infty)$ знак $f_3''(x)$ положительный и, значит, функция $f_3(x)$ выпукла вниз.

Сведем результаты исследования функции $f_3(x)$ в таблицу 1.4.

Таблица 1.4

x	$-1+0$	$(-1;0)$	0	$0;2)$	2	$(2;3.5)$	3.5	$(3.5,+\infty)$
y	$-\infty$	$-$	-8	$-$	0	$-$	-0.22	$-$
y'		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''		$-$	-84	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Вывод		$\nearrow\bigcap$		$\nearrow\bigcap$	max	$\searrow\bigcap$	т. перег.	$\searrow\bigcup$

На интервале $(-1,+\infty)$ с помощью этой таблицы строится график функции $f_3(x)$. Эскиз этого графика приведен на рис. 1.1.

Нарисуем эскиз графика функции $y = f(x)$ по характерным точкам, которые приведены в таблицах 1.1, 1.3 и 1.4. Отметим, что эскиз графика нарисован с нарушением масштаба, так как в реальном масштабе на рисунке не видны характерные особенности графика.

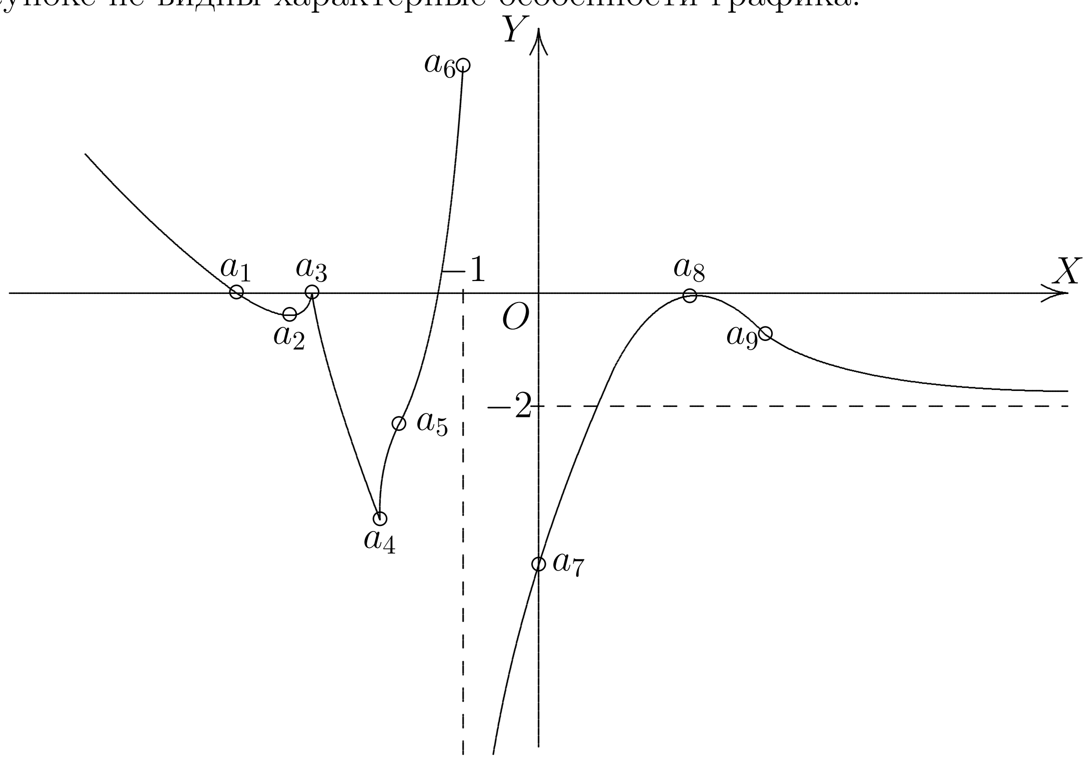

Рис. 1.1

На рис. 1.1 значками „$\circ$“ обозначены характерные точки. Точка a_1 с координатами $(-4,0)$ – корень функции $y = f_1(x)$. Точка a_2 $(-3.296,-0.296)$ – минимум функции $y = f_1(x)$. Точка a_3 $(-3,0)$ – „острый“ максимум функции $y = f_1(x)$. Точка a_4 $(-2,-3)$ – точка непрерывного сшивания функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Точка a_5 $(-1.81,-2.760)$ – точка перегиба функции $y = f_2(x)$. Точка a_6 $(-4,0)$ – левый предел при $x \to -1$ функции $y = f_2(x)$ ($\lim\limits_{x\to-1-0} f_2(x)$). Точка a_7 $(0,8)$ – точка пересечения функции $y = f_3(x)$ с осью ординат OY. Точка a_8 $(2, 0)$ – максимум функции $y = f_3(x)$. Точка a_9 $(3.5, 0.222)$ – точка перегиба функции $y = f_3(x)$.

Пунктирными прямыми на рис. 1.1 изображены: вертикальная асимптота $x = -1$ функции $y = f_3(x)$ и горизонтальная асимптота $y = -2$ функции $y = f_3(x)$.

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

2.1. Многочлены и их свойства

Подробное изложение общей теории с доказательствами можно найти в учебном пособии [4].

Определение 2.1. *Функция $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, определенная правилом*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_n \neq 0, \tag{2.1}$$

называется многочленом (полиномом) степени n. Числа a_n, a_{n-1}, ..., a_0 называются коэффициентами многочлена P (a_n – старшим коэффициентом), а целое неотрицательное число n – его степенью. Степень многочлена P будем обозначать ст.P *и записывать*: ст.$P = n$.

Для многочленов, как и для любых числовых функций с общей областью определения, определены обычным образом сложение, вычитание и умножение, причем сумма, разность и произведение многочленов также, очевидно, являются многочленами.

Теорема 2.1. *Если два многочлена P и Q тождественно совпадают, т. е. $P(z) = Q(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$, то совпадают их степени и коэффициенты (при одинаковых степенях z).*

Многочлены обладают некоторыми свойствами, аналогичными свойствам целых чисел. Известно, что при умножении целых чисел получаем целое число. Это же свойство справедливо и для многочленов – перемножая многочлены, получаем многочлен. Деление же нацело двух целых чисел, т.е. получение в результате целого числа, возможно далеко не всегда. В общем случае при делении целого числа n на целое m получаем некоторое частное k и остаток r. При этом справедливо равенство $n = mk + r$. То же можно сказать и о делении многочленов. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Для любых многочленов P и Q, ст.$Q > 0$, существуют единственные многочлены q и r, такие, что*

$$P(z) = Q(z)q(z) + r(z), \tag{2.2}$$

причем степень многочлена r меньше степени многочлена Q, в частности, возможно $r(z) \equiv 0$. Многочлен q называется частным (от деления P на Q), а r – остатком.

Теорема 2.2 имеет важное следствие.

Теорема 2.3. (Безу). *Пусть P – многочлен, причем* ст.$P \geq 1$. *Тогда остаток от деления P на многочлен $(z-c)$ равен $P(c)$.*

Определение 2.2. *Нулем многочлена P называется корень уравнения $P(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$.*

Ясно, что многочлен нулевой степени нулей не имеет. Пусть ст.$P > 0$. Из теоремы 2.3 следует, что если c – нуль многочлена P, то

$$P(z) = (z-c)q(z), \tag{2.3}$$

где ст.q = (ст.P) $-$ 1. Обратное утверждение очевидно. Таким образом, число c является нулем многочлена P тогда и только тогда, когда P представим в виде (2.3).

Если многочлен q тоже обращается в нуль в точке c, то и он представим в аналогичном виде $q(z) = (z-c)q_1(z)$, а значит, для P получаем представление

$$P(z) = (z-c)^2 q_1(z)$$

(ясно, что ст.q_1 = ст.$P - 2$). Продолжая эти рассуждения, приходим к понятию кратности нуля многочлена.

Определение 2.3. *Число c называется нулем многочлена P кратности k ($k \in \mathbb{N}$), если имеет место представление*

$$P(z) = (z-c)^k q(z), \quad q(c) \neq 0. \tag{2.4}$$

Замечание 2.1. Если $k = 1$, то говорят, что c – простой нуль многочлена P.

Теорема 2.4. *Число c является нулем многочлена P кратности k тогда и только тогда, когда*

$$P(c) = P'(c) = \ldots = P^{(k-1)}(c) = 0, \quad P^{(k)}(c) \neq 0. \tag{2.5}$$

Теорема 2.5. (Основная теорема алгебры). *Всякий многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один нуль.*

Из основной теоремы алгебры доказывается важное следствие.

Следствие 2.1. *Многочлен*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

степени $n \geq 1$ может быть представлен в виде

$$P(z) = a_n(z - c_1)\ldots(z - c_n), \tag{2.6}$$

где, очевидно, числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ являются нулями многочлена P. Это представление единственно (с точностью до порядка сомножителей).

В общем случае в разложении (2.6) среди чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ могут быть равные, т.е. какие-то нули многочлена P могут иметь кратность больше единицы. Пусть различными нулями многочлена P служат числа c_1, $c_2, \ldots, c_m$ $(m \leq n)$. Обозначим их кратности через $k_1, k_2, \ldots, k_m$ соответственно.

Тогда разложение (2.6) принимает вид

$$P(z) = a_n(z - c_1)^{k_1}(z - c_2)^{k_2}\ldots(z - c_m)^{k_m}. \tag{2.7}$$

Здесь $1 \leq k_i \leq n, \quad i = 1, \ldots, m, \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Формула (2.7) означает, что любой многочлен степени n имеет ровно n нулей с учетом их кратностей.

В ТР встречаются только вещественные многочлены (2.7), у которых a_n, a_{n-1}, $\ldots$, $a_0 \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.6. *Многочлен с вещественными коэффициентами принимает в комплексно-сопряженных точках комплексно-сопряженные значения, т. е. $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.*

Следствие 2.2. *Если c – нуль вещественного многочлена, то $\bar{c}$ – также нуль этого многочлена.*

Замечание 2.2. Можно показать, что кратности комплексно-сопряженных нулей вещественого многочлена совпадают.

Теперь можно уточнить формулу (2.7) разложения вещественного многочлена на множители. Пусть c_1 (где $\mathrm{Im}(c_1) \neq 0$) и $\bar{c}_1$ – комплексно-сопряженные нули вещественного многочлена. В формуле (2.7) этим нулям соответствуют множители $(z - c_1)^{k_1}$ и $(z - \bar{c}_1)^{k_1}$. Их произведение равно

$$\big[(z - c_1)(z - \bar{c}_1)\big]^{k_1} = \big[z^2 - (c_1 + \bar{c}_1)z + c_1\bar{c}_1\big]^{k_1} = (z^2 + \alpha_1 z + \beta_1)^{k_1},$$

где $\alpha_1 = -(c_1 + \bar{c}_1)$ и $\beta_1 = c_1\bar{c}_1$ – вещественные числа, причем $\alpha_1^2 - 4\beta_1 < 0$. Таким образом в разложении (2.7) можно объединить все пары множителей, соответствующих комплексно-сопряженным нулям многочлена P.

Из выше сказанного, справедливо следующее утверждение (в дальнейшем, следуя традиции, аргумент вещественного многочлена обозначаем буквой x.

Утверждение 2.1. *Для любого вещественного многочлена ненулевой степени n справедливо представление:*

$$P(x) = a_n(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{k_1}\dots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{k_l}(x-d_1)^{n_1}\dots(x-d_m)^{n_m}, \quad (2.8)$$

где $d_1, \dots, d_m$ – вещественные нули многочлена P с кратностей $n_1, \dots, n_m$ соответственно, множители $(x^2+\alpha_p x+\beta_p)^{k_p}$ отвечают парам комплексно-сопряженных корней кратности k_p, т.е. $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$, $\alpha_p^2-4\beta_p < 0$, $p = 1, 2, \dots, l$, и $2(k_1 + k_2 + \dots + k_l) + n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$.

2.2. Рациональные дроби

Определение 2.4. *Пусть P и Q – вещественные многочлены, причем P – ненулевой многочлен. Функция R, значения которой вычисляются по правилу*

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}, \quad (2.9)$$

называется вещественной рациональной дробью или вещественной дробно-рациональной функцией. Функция R определена везде, кроме точек, в которых многочлен P обращается в нуль.

Определение 2.5. *Рациональная дробь (2.9) называется правильной, если степень многочлена-числителя Q строго меньше степени многочлена-знаменателя P. В противном случае дробь называется неправильной.*

Заметим, что справедливо утверждение.

Утверждение 2.2. *Если α, $\beta \in \mathbb{R}$ и R_1, R_2 – правильные рациональные дроби, то $\alpha R_1 + \beta R_2$ и $R_1 \cdot R_2$ так же правильные рациональные дроби.*

Если дробь неправильная, то ее можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Действительно, на основании теоремы 2.2

$$Q(x) = P(x)p(x) + r(x)$$

и, следовательно,

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{P(x)},$$

где стерень r строго меньше степени P.

Определение 2.6. *Вещественные рациональные дроби вида*

$$\frac{A}{(x-c)^k} \text{ и } \frac{Mx+L}{(x^2+\alpha x+\beta)^m},$$

где $k, m \in \mathbb{N}$, $\alpha^2 - 4\beta < 0$, будем называть простейшими вещественными дробями.

Теорема 2.7. *Пусть $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ – правильная вещественная рациональная дробь, где (см. (2.3))*

$$P(x) = a_n(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{k_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{k_l}(x - d_1)^{n_1} \dots (x - d_m)^{n_m}.$$

Тогда эта дробь единственым образом может быть разложена в следующую сумму простейших вещественных дробей:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_{n_1}^{(1)}}{(x - d_1)^{n_1}} + \frac{A_{n_1-1}^{(1)}}{(x - d_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(1)}}{x - d_1} + \dots +$$

$$+\frac{A_{n_m}^{(m)}}{(x - d_m)^{n_m}} + \frac{A_{n_m-1}^{(m)}}{(x - d_m)^{n_m-1}} + \dots + \frac{A_1^{(m)}}{x - d_m}+$$

$$+\frac{M_{k_1}^{(1)}x + L_{k_1}^{(1)}}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{k_1}} + \frac{M_{k_1-1}^{(1)}x + L_{k_1-1}^{(1)}}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{M_1^{(1)}x + L_1^{(1)}}{x^2 + \alpha_1 x + \beta_1}+$$

$$+ \dots + \frac{M_{k_l}^{(l)}x + L_{k_l}^{(l)}}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{k_l}} + \frac{M_{k_l-1}^{(l)}x + L_{k_l-1}^{(l)}}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{k_l-1}} + \dots + \frac{M_1^{(l)}x + L_1^{(l)}}{x^2 + \alpha_l x + \beta_l}.$$

Пример. Разложить в сумму простейших вещественных дробей правильную дробь:

$$R(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)}\,.$$

Разложение с неопределенными коэффициентами имеет вид

$$R(x) = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3} + \frac{E}{x + 1}\,,$$

откуда

$$x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 =$$

$$= (Ax + B)(x + 1) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 3)(x + 1) + E(x^2 + 2x + 3)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, (см. теорему 2.1) находим:

$$\begin{cases} C + E = 1, \\ 3C + D + 4E = 4, \\ A + 5C + 3D + 10E = 11, \\ A + B + 3C + 5D + 12E = 12, \\ B + 3D + 9E = 8, \end{cases}$$

откуда $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 1$ и, следовательно,

$$R(x) = \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{1}{x+1}\,.$$

2.3. Интегрирование рациональных дробей

При выполнении ТР после выделения целой части неправильной рациональной дроби и разложения правильной рациональной дроби в сумму простейших требуется вычислять интегралы от многочленов и простейших рациональных дробей. Приведем необходимые формулы, а полное изложение можно найти в учебнике [2].

Для интегрирования многочлена используется линейность интеграла и формула:

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C, \quad n \geq 0. \tag{2.10}$$

Для интегрирования правильных рациональных дробей знаменатели которых имеют только вещественныекорни, используются формулы:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C \tag{2.11}$$

и

$$\int \frac{dx}{(x-b)^k} = \frac{1}{1-k}\,(x-b)^{1-k} + C, \quad k > 1. \tag{2.12}$$

В случае, когда знаменатель правильной рациональной дроби имеет простые комплексно-сопряженные корни, для ее интегрирования используется формула:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \\ + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + C. \end{aligned} \tag{2.13}$$

В ТР отсутствуют примеры требующие интегрирования правильных рациональных дробей, когда ее знаменатель имеет кратные комплексно-сопряженные корни, т. е. интегралы вида

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx, \quad k > 1. \tag{2.14}$$

Для вычисления интегралов вида (2.14) можно воспользоваться рекурентными формулами, которые приведены в подробных таблицах интегралов (см., например [5], с. 27, №№ 160.09 и 160.19) и позволяют понижать степень знаменателя.

2.4. Типовой расчет по теме “Интегрирование рациональных дробей” (ТР 2.3)

Студентам выдается индивидуальное задание вида:

ТР 2.3. Вар. 31. Найти интегралы.

$$\textbf{1.}\ \int \frac{x^4+3x^3-7x-9}{(x-2)(x+3)(x-1)}\,dx, \quad \textbf{2.}\ \int \frac{-2x^4-13x^3-8x^2+98x+181}{(x+3)^4(x-1)}\,dx,$$

$$\textbf{3.}\ \int\limits_{-1}^{0} \frac{2x^3-7x^2+13x-5}{(x-2)^2(x^2-4x+13)}\,dx.$$

Пример выполнения ТР 2.3. (Вар. 31). Требуется найти неопределенные интегралы (первые две задачи) и вычислить определенный интеграл (третья задача).

1. Найти $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^4+3x^3-7x-9}{(x+2)(x+3)(x-1)}\,dx.$

Обозначим $f_1(x) = \dfrac{x^4+3x^3-7x-9}{(x+2)(x+3)(x-1)}$. Перемножив двучлены знаменателя, получим $f_1(x) = \dfrac{x^4+3x^3-7x-9}{x^3+4x^2+x-6}$ – неправильную рациональную дробь.

a. Выделим целую часть, для чего разделим числитель на знаменатель с остатком:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^4+3x^3-7x-9 \\ \underline{x^4+4x^3+x^2-6x} \end{array} & \dfrac{x^3+4x^2+x-6}{x-1} \\
-\begin{array}{r} -x^3-x^2-x-9 \\ \underline{-x^3-4x^2-x+6} \end{array} & \\
3x^2 \qquad -15 & \text{(остаток)}
\end{array}$$

Следовательно, $f_1(x) = (x-1) + \dfrac{3x^2-15}{x^3+4x^2+x-6}$.

b. Разложим в сумму простейших правильную рациональную дробь, знаменатель которой имеет простые вещественные нули

$$\frac{3x^2-15}{(x+2)(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}.$$

Приведение правой части последнего равенства к общему знаменателю с последующим освобождением от знаменателя в обоих частях равенства дает

$$3x^2-15 = A(x+3)(x-1) + B(x+2)(x-1) + C(x+2)(x+3).$$

Для нахождения A, B и C применим метод отдельных значений аргумента при этом в качестве значений аргумента следует взять корни знаменателя, что позволяет получить простые соотношения для нахождения A, B и C.

$$\begin{array}{l|ll} x=-3 & 4B=12, & B=3, \\ x=-2 & -3A=-3, & A=1, \\ x=1 & 12C=-12, & C=-1. \end{array}$$

Искомое разложение имеет вид

$$\frac{3x^2-15}{(x+2)(x+3)(x-1)}=\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+3}-\frac{1}{x-1}.$$

Значит

$$f_1(x)=(x-1)+\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+3}-\frac{1}{x-1}.$$

c. Вычислим интеграл используя формулы (2.10) и (2.11)

$$I_1=\int f_1(x)\,dx=\int\left((x-1)+\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+3}-\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x+2|+3\ln|x-3|-\ln|x-1|+C.$$

2. Найти $I_2=\displaystyle\int\frac{-2x^4-13x^3-8x^2+98x+181}{(x+3)^4(x-1)}\,dx.$

a. Пусть $f_2(x)=\dfrac{-2x^4-13x^3-8x^2+98x+181}{(x+3)^4(x-1)}$. Функция $f_2(x)$ – правильная рациональная дробь, знаменатель которой имеюет вещественный нуль $x_1=3$ кратности $l_1=4$.

$$f_2(x)=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3}+\frac{D}{(x+3)^4}+\frac{E}{x-1}.$$

Приведение правой части последнего равенства к общему знаменателю с последующим освобождением от знаменателя в обоих частях равенства дает

$$\begin{gathered} -2x^2-13x^3-8x^2+98x+181=A(x+3)^3(x-1)+ \\ +B(x+3)^2(x-1)+C(x+3)(x-1)+D(x-1)+E(x+3)^4. \end{gathered}$$

Для нахождения A, B, C, D и E применим метод отдельных значений аргумента при этом в качестве двух значений аргумента следует взять различные корни знаменателя, что позволит просто найти D и E, и еще три различных значения аргумента (небольшие целые числа).

$$\begin{array}{l|ll}
x=-3 & 4=-4D, & D=-1, \\
x=1 & 256=256E, & E=1. \\
x=0 & 181=-27A-9B-3C-D+81E, & \\
x=-2 & 25=-3A+25B-3C-3D+E, & \\
x=2 & 209=125A+25B+5C-D+625E, &
\end{array}$$

Подставляя в последние три уравнения найденные уже значения $D=-1$ и $E=1$, приводя подобные члены и сокращая, получим систему линейных уравнений для нахождения A, B и C

$$\begin{cases} 9A+3B+C=-33, \\ A+B+C=-7, \\ 25A+5B+C+-83. \end{cases}$$

Решением этой системы являются: $A=-3$, $B=-1$, $C=-3$.

Таким образом, искомое разложение примет вид:

$$f_2(x)=\frac{-3}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}-\frac{3}{(x+3)^3}-\frac{1}{(x+3)^4}+\frac{1}{x-1}.$$

b. Вычислим интеграл используя формулы (2.11) и (2.12)

$$I_2=\int f_2(x)\,dx=-3\ln|x+3|+\frac{1}{x+3}+\frac{3}{2(x+3)^2}+\frac{1}{3(x+3)^3}+\ln|x-1|+C.$$

3. Найти $I_3=\displaystyle\int\limits_{-1}^{0}\frac{2x^3-7x^2+13x-5}{(x-2)^2(x^2-4x+13)}\,dx.$

a. Обозначим $f_3(x)=\dfrac{2x^3-7x^2+13x-5}{(x-2)^2(x^2-4x+13)}$. Функция $f_3(x)$ – правильная рациональная дробь, знаменателя которой имеюет кратный вещественный нуль $x_1=2$ кратности $l_1=2$ имеет пару простых комплексно-сопряженных корней (см. следствие 3.1), значит $f_3(x)$ можно разложить в следующую сумму простейших дробей:

$$\frac{2x^3-7x^2+13x-5}{(x-2)^2(x^2-4x+13)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-4x+13}.$$

Приведение правой части последнего равенства к общему знаменателю с последующим освобождением от знаменателя в обоих частях равенства дает тождество:

$$\begin{gathered} 2x^3-7x^2+13x-5=A(x-2)(x^2-4x+13)+B(x^2-4x+13)+ \\ +(Cx+D)(x-2)^2=A(x^3-6x^2+21x-26)+B(x^2-4x+13)+ \\ +C(x^3-4x^2+4x)+D(x^2-4x+4). \end{gathered}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества (см. теорему 2.1) получим:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A + C = 2, \\ x^2 & -6A + B - 4C + D = -7, \\ x^1 & 21A - 4B + 4C - 4D = 13, \\ x^0 & -26A + 13B + 4D = -5. \end{array}$$

Для нахождения A, B, C и D решим систему линейных уравнений методом Гаусса–Жордана:

$$\begin{cases} A + C = 2, \\ -6A + B - 4C + D = -7, \\ 21A - 4B + 4C - 4D = 13, \\ -26A + 13B + 4D = -5, \end{cases}$$

и получим $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 2$. В итоге имеем

$$f_3(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{x+2}{x^2 - 4x + 13}.$$

b. Вычислим неопределенный интеграл

$$\int f_3(x)dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx + \int \frac{x+2}{x^2-4x+13}\,dx.$$

Сначала, используя формулы (2.11) и (2.12), вычислим первые два слагаемые

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C.$$

Третье слагаемое можно вычислить использовав формулу (2.13).

$$\int \frac{x+2}{x^2-4x+13}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 4x + 13) + \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right) + C.$$

c. По формуле Ньютона–Лейбница получаем

$$I_3 = \int\limits_{-1}^{0} f_3(x)\,dx = \left[\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+13) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)\right]\Bigg|_{-1}^{0} = -0.138.$$

Ответ. 1. $I_1 = \dfrac{1}{2}\,x^2 - x + \ln|x+2| + 3\ln|x-3| - \ln|x-1| + C.$

2. $I_2 = -3\ln|x+3| + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{3}{2(x+3)^2} + \dfrac{1}{3(x+3)^3} + \ln|x-1| + C.$

3. $$I_3 = \int\limits_{-1}^{0} f_3(x)\,dx = \left[\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+13) + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)\right]\Bigg|_{-1}^{0} = -0.138$$.

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

В этом разделе рассматривается применение формулы трапеций для вычисления значений интегралов и способы приведения некоторых интегралов к специальным функциям (см. учебное пособие [1] и учебник [2]).

3.1. Формула трапеций

Формулы, с помощью которых можно вычислить приближенные значения определенных интегралов, называются квадратурными. Квадратурная формула называется формулой трапеций, если

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)). \tag{3.1}$$

Из этой формулы следует, что площадь под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ приближается площадью под хордой, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Если функция $f(x)$ имеет на $[a,b]$ ограниченную вторую производную, то справедлива оценка

$$R = \left|\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{(b-a)^3}{12}\,M_2, \tag{3.2}$$

где $M_2 = \max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$. Как видно, погрешность вычисления интеграла зависит от длины отрезка $[a,b]$.

Чтобы вычислить значение интеграла с погрешностью, не превышающей некоторой заданной величины $\varepsilon > 0$, поступают следующим образом. Отрезок $[a,b]$ разбивают на n равных подотрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$, длины $h = \dfrac{b-a}{n}$, полагая $x_0 = a$, $x_n = b$. На каждом таком отрезке применяют формулу трапеций (3.1)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \right) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

Таким образом, получаем составную формулу трапеций

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right). \tag{3.3}$$

Из (3.2) получается оценка для составной формулы трапеций

$$R = \left| \int\limits_a^b f(x)\,dx - h \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x) \right) \right| \le \frac{(b-a)h^2}{12} M_2.$$

Число разбиений n отрезка $[a, b]$, достаточное для вычисления интеграла с точностью ε, определяется из неравенства $\dfrac{(b-a)h^2}{12} M_2 < \varepsilon$, т. е.

$$n \ge \left\lceil \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}} \right\rceil, \tag{3.4}$$

где $\lceil \alpha \rceil$ – наименьшее целое, большее или равное $|\alpha|$.

3.2. Интеграл вероятности

Функция $\Phi(x)$ (интеграл вероятности) определяется формулой

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Эта функция определена на всем множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Перечислим некоторые простейшие свойства интеграла вероятности:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$;

2) $\Phi(0) = 0$;

3) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, т. е. функция $\Phi(x)$ нечетная;

4) $\Phi(x)$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}$;

5) существует левая и правая горизонтальные асимптоты $y = -1$ и $y = 1$ соответственно;

6) при $x \to +\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\Phi(x) \sim 1 - \frac{1}{x\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}.$$

Для определения численного значения функции $\Phi(x)$ в некоторой точке x следует воспользоваться таблицей значений интеграла вероятности, например [6]. Можно также воспользоваться таблицей, приведенной в приложении.

Пример 3.1. Рассмотрим применение таблиц интеграла вероятности на примере вычисления значения $\int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2}\, dt$.

Запишем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\beta} e^{-t^2}\, dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\alpha} e^{-t^2}\, dt\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)]. \quad (3.5)$$

Определив значения $\Phi(\beta)$ и $\Phi(\alpha)$ из таблиц, найдем значение искомого интеграла.

Пример 3.2. Вычислить значение

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} t^2 e^{-t^2+2at}\, dt.$$

Приведем показатели экспоненты к полному квадрату $+t^2 - 2at = (t-a)^2 - a^2$. Тогда

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} t^2 e^{-(t-a)^2+a^2}\, dt = e^{a^2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} t^2 e^{-(t-a)^2}\, dt.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной $\tau = t - a$ и поменяем пределы интегрирования: при $t = \alpha$ имеем $\tau = \alpha - a$, а при $t = \beta$ – $\tau = \beta - a$. Теперь исходный интеграл преобразуется к виду

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} t^2 e^{-(t-a)^2}\, dt = \int\limits_{\alpha-a}^{\beta-a} (\tau + a)^2 e^{-\tau^2}\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{\alpha-a}^{\beta-a} \tau^2 e^{-\tau^2}\, d\tau + 2a\int\limits_{\alpha-a}^{\beta-a} \tau e^{-\tau^2}\, d\tau + a^2\int\limits_{\alpha-a}^{\beta-a} e^{-\tau^2}\, d\tau.$$

Первый интеграл суммы будем вычислять по частям. Положим $u = \tau$, $du = d\tau$, $dV = \tau e^{-\tau^2}\,d\tau$, $V = -\dfrac{1}{2}\,e^{-\tau^2}$, тогда с учетом (3.5)

$$\int\limits_{\alpha-a}^{\beta-a} \tau^2 e^{-\tau^2}\,d\tau = -\,\frac{\tau}{2}\,e^{-\tau^2}\Big|_{\alpha-a}^{\beta-a} + \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha-a}^{\beta-a} e^{-\tau^2}\,d\tau =$$

$$= -\frac{\beta-a}{2}\,e^{-(\beta-a)^2} + \frac{(\alpha-a)}{2}\,e^{-(\alpha-a)^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,[\Phi(\beta-a) - \Phi(\alpha-a)].$$

Второй интеграл суммы вычисляется подведением τ под знак дифференциала:

$$2a\int\limits_{\alpha-a}^{\beta-a} \tau e^{-\tau^2}\,d\tau = -ae^{-\tau^2}\Big|_{\alpha-a}^{\beta-a} = -ae^{-(\beta-a)^2} + ae^{-(\alpha-a)^2}.$$

Третий интеграл суммы непосредственно приводится (см. (3.5)) к интегралам вероятности:

$$a^2\int\limits_{\alpha-a}^{\beta-a} e^{-\tau^2}\,d\tau = \frac{a^2\sqrt{\pi}}{2}\,[\Phi(\beta-a) - \Phi(\alpha-a)].$$

Приведя подобные, получим следующий вид исходного интеграла:

$$I = e^{a^2}\left[\frac{\alpha+a}{2}\,e^{-(\alpha-a)^2} - \frac{\beta+a}{2}\,e^{-(\beta-a)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(2a^2+1)\sqrt{\pi}}{4}\,(\Phi(\beta-a) - \Phi(\alpha-a))\right].$$

Используя таблицы интеграла вероятности, можно получить численное значение I.

3.3. Интегральный синус и интегральный косинус

Функция $\mathrm{Si}(x)$ (интегральный синус) определяется формулой

$$\mathrm{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Эта функция определена на всем множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Простейшие свойства функции интегрального синуса:

1) $\mathrm{Si}(0) = 0$;

2) $\mathrm{Si}(-x) = -\mathrm{Si}(x)$, т. е. функция нечетная;

3) $\mathrm{Si}(x)$ имеет максимум в точках $(2k+1)\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots)$, причем $\mathrm{Si}(\pi) \approx 1.35$, $\mathrm{Si}(3\pi) \approx 1.67$, ...; функция $\mathrm{Si}(x)$ имеет минимум в точках $2k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$ и $\mathrm{Si}(2\pi) \approx 1.45$, $\mathrm{Si}(4\pi) \approx 1.49$, ...;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Si}(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Пример 3.3. Вычислить значение интеграла $I = \displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Выразим интеграл через интегральные синусы:

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int\limits_{0}^{\beta} \frac{\sin t}{t}\, dt - \int\limits_{0}^{\alpha} \frac{\sin t}{t}\, dt = \mathrm{Si}(\beta) - \mathrm{Si}(\alpha). \tag{3.6}$$

Получив из таблицы значения функций $\mathrm{Si}(\beta)$ и $\mathrm{Si}(\alpha)$, найдем значение интеграла I.

Функция $\mathrm{Ci}(x)$ (интегральный косинус) задается формулой

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int\limits_{x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt$$

и определена на интервале $(0, +\infty)$.

Свойства функци $\mathrm{Ci}(x)$:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Ci}(x) = 0$;

2) $\lim\limits_{x\to0+0} \mathrm{Ci}(x) = -\infty$;

3) в точках $\left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k = 0, 1, \ldots$ функция $\mathrm{Ci}(x)$ достигает максимальных згачений; в точках $\left(2k - \dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k = 1, 2, \ldots$ функция $\mathrm{Ci}(x)$ достигает минимальных значений.

Пример 3.4. Вычислить значение интеграла $I = \displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos t}{t}\, dt$.

Выразим интеграл через интегральные косинусы:

$$I = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt - \int\limits_{\beta}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt = -\mathrm{Ci}(\alpha) + \mathrm{Ci}(\beta).$$

Таким образом, получив из таблицы значения функций $\mathrm{Ci}(\beta)$ и $\mathrm{Ci}(\alpha)$, найдем значение исходного интеграла:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos t}{t}\, dt = \mathrm{Ci}(\beta) - \mathrm{Ci}(\alpha). \tag{3.7}$$

Таблицы значений интегрального синуса и интегрального косинуса приведены в математических справочниках, например [6], а также в Приложении, где приведены фрагменты таблиц.

3.4. Типовой расчет по теме “Формула трапеций и применение специальных функций” (ТР 2.4)

Студентам выдается индивидуальное задание, имеющее следующий вид.

ТР 2.4. Вар. 1

$$I = \int_{0.6}^{1.2} \frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x}\, dt.$$

a) Вычислить приближенное значение интеграла с точностью $\varepsilon = 0.001$ с помощью формулы трапеций.

b) Вычислить значение интеграла, используя таблицы специальных функций.

Пример решения ТР 2.4. Вар. 1.

a) Приближенное значение интеграла вычисляется по квадратурной формуле трапеций (3.3). Чтобы вычисленное значение по этой формуле отличалось от истинного значения интеграла на величину не более $\varepsilon = 0.001$, необходимо отрезок интегрирования $[0.6, 1.2]$ разбить на n отрезков. Это число разбиений может быть определено из неравенства (3.4). Однако необходимо получить оценку максимума модуля M_2 второй производной от подынтегральной функции.

Имеем

$$f(x) = \frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x}.$$

Найдем первую производную:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\,\frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x\sqrt{3x+16}} - \frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x^2}.$$

Для упрощения выкладок обозначим $y_1 = \dfrac{\cos\sqrt{3x+16}}{x\sqrt{3x+16}}$, $y_2 = \dfrac{\sin\sqrt{3x+16}}{x^2}$.

Тогда
$$f''(x) = \frac{3}{2}\, y_1^{'} + y_2^{'}.$$
Для вычисления $y_1^{'}$ воспользуемся логарифмической производной
$$\ln y_1 = \ln(\cos\sqrt{3x+16}\,) - \ln x - \frac{1}{2}\,\ln(3x+16).$$
Тогда
$$y_1^{'} = y_1 \left[-\frac{3}{2}\,\frac{\sin\sqrt{3x+16}}{\cos\sqrt{3x+16}}\,\frac{1}{\sqrt{3x+16}} - \frac{1}{x} - \frac{3}{2(3x+16)}\right],$$
т. е.
$$y_1^{'} = -\frac{3}{2}\,\frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x(3x+16)} - \frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x^2\sqrt{3x+16}} - \frac{3}{2}\,\frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x(3x+16)^{3/2}};$$
$$y_2^{'} = \frac{3}{2}\,\frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x^2\sqrt{3x+16}} - 2\,\frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x^3}$$
и окончательно получаем:
$$f''(x) = -\frac{9}{4}\,\frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x(3x+16)} - 3\,\frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x^2\sqrt{3x+16}} - \frac{9}{4}\,\frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x(3x+16)^{3/2}} - 2\,\frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x^2}.$$
Для получения оценки $f''(x)$ возьмем модуль от обеих частей этого равенства, получим
$$|f''(x)| \le \frac{9}{4}\left|\frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x(3x+16)}\right| + 3\left|\frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x^2\sqrt{3x+16}}\right| +$$
$$+\frac{9}{4}\left|\frac{\cos\sqrt{3x+16}}{x(3x+16)^{3/2}}\right| + 2\left|\frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x^2}\right|.$$
Учитывая, что $|\sin\sqrt{3x+16}\,| \le 1$, $|\cos\sqrt{3x+16}\,| \le 1$, $0.6 \le x \le 1.2$, $17.8 < (3x+16) < 19.8$ и $4.22 \le \sqrt{3x+16} \le 4.43$, получим
$$|f''(x)| \le \frac{9}{4}\,\frac{1}{0.6\cdot 17.8} + 3\,\frac{1}{(0.6)^2 4.22} + \frac{9}{4}\,\frac{1}{0.6(17.8)^{3/2}} + 2\,\frac{1}{0.6}^{\,2} = 7.79.$$
Так как эта оценка выполняется для всех $x \in [0.6,\, 1.2]$, то она справедлива и для x, при котором $|f''(x)|$ достигает максимального значения, т. е.
$$\max|f''(x)| \le 7.79.$$

Применив формулу (3.4), найдем необходимое число разбиения отрезка интегрирования $[0.6,\, 1.2]$
$$n = \left\lceil \sqrt{\frac{5.57(0.6)^3}{12\cdot 0.001}} \right\rceil = \lceil 11.84 \rceil = 12.$$

Находим длину подотрезка

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.6}{12} = 0.05.$$

Вычислив $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{3x+16}}{x}$ в точках $x_i = 0.6 + ih$, $i = 0, 1, ..., 12$, получаем:

$f(x_0) = -1.468$	$f(x_5) = -1.081$	$f(x_{10}) = -0.863$
$f(x_1) = -1.368$	$f(x_6) = -1.028$	$f(x_{11}) = -0.830$
$f(x_2) = -1.281$	$f(x_7) = -0.981$	$f(x_{12}) = -0.800$
$f(x_3) = -1.206$	$f(x_8) = -0.938$	
$f(x_4) = -1.140$	$f(x_9) = -0.899$	

Применив формулу (3.2)

$$\int\limits_{0.6}^{1.2} \frac{\sin\sqrt{3x+16}}{x}\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_{11}) + 2\sum_{i=1}^{10} f(x_i)\right) = 0.638,$$

получим значение, которое отличается от истинного значения интеграла на величину не более $\varepsilon = 0.001$.

b) Приведем исходный интеграл $I = \int\limits_{0.6}^{1.2} \dfrac{\sin\sqrt{3x+16}}{x}\,dx$ к выражению, содержащему функции интегрального синуса $\mathrm{Si}(x)$ и интегрального косинуса $\mathrm{Ci}(x)$. Для этого выполним подстановку $u^2 = 3x + 16$, т. е.

$$x = \frac{1}{3}(u^2 - 16), \qquad dx = \frac{2}{3}\,u\,du,$$

и найдем новые пределы интегрирования: при $x_1 = 0.6$ новый предел интегрирования будет $u_1 = \sqrt{3 \cdot 0.6 + 16} = \sqrt{17.8} \approx 4.219$, а при $x_2 = 1.2$ имеем $u_2 = \sqrt{3 \cdot 1.2 + 16} = \sqrt{19.6} \approx 4.427$, т. е.

$$I = 2\int\limits_{4.219}^{4.427} \frac{u\sin u}{(u^2 - 16)}\,du. \tag{3.8}$$

Выражение $\dfrac{u}{u^2 - 16}$ представим в виде суммы простейших дробей

$$\frac{u}{u^2 - 16} = \frac{A}{u-4} + \frac{B}{u+4}.$$

Определив, что $A = B = \dfrac{1}{2}$ и подставив это разложение в интеграл (3.8), получим

$$I = \int\limits_{4.219}^{4.427} \sin u \left(\frac{1}{u-4} + \frac{1}{u+4} \right) du = \int\limits_{4.219}^{4.427} \frac{\sin u}{u-4}\, du + \int\limits_{4.219}^{4.427} \frac{\sin u}{u+4}\, du. \qquad (3.9)$$

В первом интеграле левой части равенства (3.9) опять выполним подстановку $v = u - 4$:

$$\int\limits_{4.219}^{4.427} \frac{\sin u}{u-4}\, du = \int\limits_{0.219}^{0.427} \frac{\sin(v+4)}{v}\, dv = \int\limits_{0.219}^{0.427} \frac{\sin v \cos 4 + \cos v \sin 4}{v}\, dv =$$

$$= \cos 4 \int\limits_{0.219}^{0.427} \frac{\sin v}{v}\, dv + \sin 4 \int\limits_{0.219}^{0.427} \frac{\cos v}{v}\, dv =$$

$$= \cos 4(\mathrm{Si}(0.427) - \mathrm{Si}(0.219)) + \sin 4(\mathrm{Ci}(0.427) - \mathrm{Ci}(0.219)).$$

Во втором интеграле левой части равенства (3.9) выполним подстановку $v = u + 4$:

$$\int\limits_{4.219}^{4.427} \frac{\sin u}{u+4}\, du = \int\limits_{8.219}^{8.427} \frac{\sin(v-4)}{v}\, dv = \int\limits_{8.219}^{8.427} \frac{\sin v \cos 4 - \cos v \sin 4}{v}\, dv =$$

$$= \cos 4 \int\limits_{8.219}^{8.427} \frac{\sin v}{v}\, dv - \sin 4 \int\limits_{8.219}^{8.427} \frac{\cos v}{v}\, dv =$$

$$= \cos 4(\mathrm{Si}(8.427) - \mathrm{Si}(8.219) - \sin 4(\mathrm{Ci}(8.427) - \mathrm{Ci}(8.219)).$$

Подставляя полученные выражение в (3.9), окончательно получим

$$I = \cos 4[\mathrm{Si}(0.427) - \mathrm{Si}(0.219) + \mathrm{Si}(8.427) - \mathrm{Si}(8.219)] +$$

$$+ \sin 4[\mathrm{Ci}(0.427) - \mathrm{Ci}(0.219) - \mathrm{Ci}(8.427) + \mathrm{Ci}(8.219)].$$

Из таблиц значений функций $\mathrm{Si}(x)$и $\mathrm{Ci}(x)$ имеем:

$\mathrm{Si}(0.219) = 0.2184$	$\mathrm{Ci}(0.219) = -0.9534$
$\mathrm{Si}(0.427) = 0.4227$	$\mathrm{Ci}(0.427) = -0.3190$
$\mathrm{Si}(8.219) = 1.6003$	$\mathrm{Ci}(8.219) = 0.1156$
$\mathrm{Si}(8.427) = 1.6225$	$\mathrm{Ci}(8.427) = 0.1044$

и учитывая, что $\cos(4) = -0.6536$ и $\sin(4) = -0.7568$, получим $I = -0.637$.

Ответ: значение интеграла вычисленного

а) с помощью формулы трапеций $I = -0.638$;

б) с использованием таблиц специальных функций $I = -0.637$.

4. ФУНКЦИИ ДВУХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

При выполнении ТР „Экстремумы функций двух переменных“ (ТР 2.5), используются только числовые функции двух вещественных переменных. Полное изложение теории вещественных функций многих переменных с подробными доказательствами можно найти в учебном пособии [3] и учебнике [2]. В данном пособии мы ограничимся только кратким изложением сведений, необходимых для выполнения ТР.

4.1. Функции двух вещественных переменных, непрерывность

Произвольную точку плоскости $\mathbb{R}^2$ будем обозначать (x, y).

Определение 4.1. *Окрестностью* $K_\delta(x_0, y_0)$ *с радиусом* $\delta > 0$ *точки* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *называется множество точек* (x, y) *на плоскости, для которых справедливо неравенство* $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

Проколотой окрестностью $\overset{\circ}{K}_\delta\ (x_0, y_0)$ *с радиусом* $\delta > 0$ *точки* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *называется множество точек* (x, y) *на плоскости, для которых справедливо неравенство* $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$. Точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ называется *предельной* точкой D, если в любой проколотой окрестности точки (x_0, y_0) найдется точка из D. Отметим, что в этом случае не обязательно $(x_0, y_0) \in D$. Точка $(x_0, y_0) \in D$ называется *изолированной*, если $\overset{\circ}{K}_\delta\ (x_0, y_0) \cap D = \emptyset$ для некоторого $\delta > 0$. Точка $(x_0, y_0) \in D$ называется *внутренней* точкой D, если при некотором $\delta_0 > 0$ $K_{\delta_0}((x_0, y_0)) \subset D$. Любая внутренняя точка множества D является его предельной точкой.

Множество D называется *открытым*, если все его точки – внутренние. Произвольное открытое множество мы будем называть *областью*.

Определение 4.2. *Пусть область* $D \subseteq \mathbb{R}^2$. *Если каждой точке* $(x, y) \in D$ *по некоторому правилу поставлено в соответствие единственное вещественное число* $z \in \mathbb{R}$, *то говорят, что определена функция двух вещественных переменных с областью определения* D *и множеством значений в* $\mathbb{R}$. *При этом используется обозначение* $f\ : D \to \mathbb{R}$, *а* $z = f(x, y)$ *называется значением функции* f *в точке* (x, y).

Определение 4.3. *Функция* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ *называется непрерывной в точке* $(x_0, y_0) \in D \iff f$ *определена в точке* (x_0, y_0) *и для любой окрестности* $K_\varepsilon(z_0)$ *точки* $z_0 = f(x_0, y_0)$ *существует окрестность* $K_\delta(x_0, y_0)$ *точки* (x_0, y_0) *такая, что* $f(K_\delta(x_0, y_0) \cap D) \subset K_\varepsilon(z_0)$.

Функция $f(x, y)$ называется непрерывной на множестве D, если она непрерывна в каждой его точке.

4.2. Частные производные функции двух вещественных переменных

Пусть дана дана функция $f : D \to \mathbb{R}$ и точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Введем в рассмотрение функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, заданные правилом, $\varphi_1(x) = f(x, y_0)$ и $\varphi_2(y) = f(x_0, y)$.

Определение 4.4. *Частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ функции f по переменной x в точке (x_0, y_0) называется производная в точке x_0 функции φ_1 (если эта производная существует), т. е.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \varphi_1'(x_0) = \frac{d\varphi_1}{dx}(x_0),$$

а частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ функции $f(x, y)$ по переменной y в точке (x_0, y_0) называется производная в точке y_0 функции $\varphi_2(y)$ (если эта производная существует), т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \varphi_2'(y_0) = \frac{d\varphi_2}{dy}(y_0).$$

Если частные производные существуют в любой точке $(x, y) \in D$, то в области D тем самым определены новые функции двух вещественных переменных

$$\frac{\partial f}{\partial x} \,:\, (x, y) \in D \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \,:\, (x, y) \in D \to \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Пример. 4.1. Пусть $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + y^3$ и $(x_0, y_0) = (2, 1)$, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d\left(x^3y + x^2y^2 + y^3\right)}{dx} = 3x^2y + 2xy^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = \left(x^3 1 + x^2 1^2 + 1^3\right)'\Big|_{x=2} = 3x^2 + 2x\Big|_{x=2} = 12,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{d\left(x^3y + x^2y^2 + y^3\right)}{dy} = x^3 + 2x^2y + 3y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = \left(8y + 4y^2 + y^3\right)\Big|_{y=1} = 8 + 4 \cdot 2y + 3y^2\Big|_{y=1} = 15.$$

Пусть в области D существуют функции

$$g_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ и } g_2(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Если в точке $(x_0,y_0) \in D$ существуют частные производные:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0),$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0),$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0),$$

то они называются частными производными второго порядка от функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Если функция $f(x,y)$ имеет в некоторой окрестности $K_\delta((x_0,y_0))$ вторые частные производные, непрерывные в точке (x_0,y_0), то*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0).$$

Пример. 4.2. (См. пример 4.1). Пусть $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + y^3$. Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 2y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3x^2 + 4xy = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2 + 4xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2 + 6y.$$

Определение 4.5. *Если функция $f(x,y)$ имеет в точке (x_0,y_0) все частные производные второго порядка, то квадратная матрица*

$$H(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

называется матрицей Гессе функции f в точке (x_0,y_0).

Следствие 4.1. *В условиях теоремы* 4.1 *матрица Гессе – симметрична.*

4.3. Локальные экстремумы функций двух вещественных переменных

Определение 4.6. *Если* (x_0, y_0) *– внутренняя точка области определения функции* $f \ : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *и существует такая проколотая окрестность* $\overset{\circ}{K}_\delta\ (x_0, y_0) \subset D$ *точки* (x_0, y_0), *что для всех* $(x, y) \in \in \overset{\circ}{K}_\delta\ (x_0, y_0)$ *справедливо неравенство* $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) > > f(x_0, y_0))$, *то точка* (x_0, y_0) *называется точкой локального максимума (локального минимума) функции* f. *Принято говорить, что* (x_0, y_0) *– точка локального экстремума* f, *если точка* (x_0, y_0) *– точка локального максимума или локального минимума.*

Определение 4.7. *Если* (x_0, y_0) *– внутренняя точка области определения функции* $f \ : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *в которой существуют частные производные* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, *то точка* (x_0, y_0) *называется стационарной точкой функции* f.

Теорема 4.2. (Необходимое условие экстремума). *Если точка* (x_0, y_0) *– точка локального экстремума* f *и функция* $f(x, y)$ *определена и имеет в некоторой окрестности* $K_\delta((x_0, y_0))$ *частные производные* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, *то точка* (x_0, y_0) *является стационарной точкой функции* f.

Заметим, что точка (x_0, y_0) может быть точкой локального экстремума f, даже если частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ несуществут в точке (x_0, y_0).

Пример. 4.3. Пусть $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3}$, тогда при $x \neq 0$ и $y \neq 0$ частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{2}{3x^{1/3}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{2}{3y^{1/3}}$ определены при $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ и не существут в точке $(0, 0)$. Но очевидно, что точка $(0, 0)$ – точка строгого локального минимума функции f.

Отметим, что в ТР подобные ситуации исключены.

Теорема 4.3. (Достаточное условие экстремума). *Если 1) функция* $f(x, y)$ *определена в точке* (x_0, y_0), *имеет в некоторой ее окрестности* $K_\delta((x_0, y_0))$ *все частные производные второго порядка, непрерывные в точке* (x_0, y_0); *2) точка* (x_0, y_0) *– стационарная точка функции* f; *3)* *оба собственных числа матрицы Гессе (см. определение 4.5) $H(x_0, y_0)$ положительны (отрицательны), то (x_0, y_0) – точка локального минимума (локального максимума) функции f.*

Если собственные числа матрицы Гессе имеют противоположные знаки, то функция f не имеет в точке (x_0, y_0) локального экстремума.

Можно сформулировать простые достаточные условия экстремума не требующие вычисления собственных чисел. Введем следуюшие обозначения:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = A, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = B, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = C. \tag{4.1}$$

Теорема 4.4. (Достаточное условие экстремума). *Пусть функция $f(x, y)$ определена в точке (x_0, y_0), имеет в некоторой ее окрестности $K_\delta((x_0, y_0))$ все частные производные второго порядка, непрерывные в точке (x_0, y_0); точка (x_0, y_0) – стационарная точка функции f. Если (см. (4.1)) $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$, $(A > 0)$, то (x_0, y_0) – точка локального минимума (локального максимума) функции f.*

Если $AC - B^2 < 0$, то функция f не имеет в точке (x_0, y_0) локального экстремума.

Доказательство. В обозначениях (4.1) характеристическое уравнение для собственных чисел λ_1, λ_2 матрицы Гессе имеет вид:

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - B^2 = 0 \tag{4.2}$$

В силу теоремы Виета для собственных чисел матрицы Гессе имеем $\lambda_1 \lambda_2 = AC - B^2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = A + C$ утверждение теоремы 4.4 следует из теоремы 4.3 .■

4.4. Типовой расчет по теме "Экстремумы функций двух переменных" (ТР 2.5)

Студентам выдается индивидуальное задание вида:

ТР 2.5. Вар. 1. Найти стационарные точки функции $f(x, y)$ и исследовать их на экстремум:

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + 5y^3 - 108x - 120y + 7.$$

Пример выполнения ТР 2.5. Вар. 1. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ является многочленом третьей степени от двух переменных x и y, следовательно определена на всей плоскости ($D = R^2$) и имеет на ней непрерывные частные производные первого и второго порядков.

a. Найдем стационарные точки (x_0, y_0). Для этого найдем частные производные функции $f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 108$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial y\,(x, y)} = 3x^2 + 6xy + 15y^2 - 120.$$

Согласно определению 4.7 точка $(x_0, y_0$ – стационарная, если

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

В нашем примере эта система имеет вид:

$$\begin{cases} 3x_0^2 + 6x_0y_0 + 3y_0^2 - 108 = 0, \\ 3x_0^2 + 6x_0y_0 + 15y_0^2 - 120 = 0. \end{cases}$$

Разделим оба равенства на 3 и вычтем первое уравнение из второго. Получим равносильную систему:

$$\begin{cases} y_0^2 = 1, \\ x_0^2 + 2x_0y_0 + y_0^2 - 36 = 0, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна двум системам уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ x_0^2 + 2x_0y_0 + y_0^2 = 36 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_0 = -1, \\ x_0^2 + 2x_0y_0 + y_0^2 = 36. \end{cases}$$

Подставляя значение y_0 во второе уравнение, получим

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ x_0^2 + 2x_0 - 35 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_0 = 1, \\ x_0^2 + 2x_0 - 35 = 0. \end{cases}$$

Решая эти системы, получим 4 стационарные точки: $P_1 = (-7, 1)$, $P_2 = (5, 1)$, $P_3 = (7, -1)$ и $P_4 = (-5, -1)$.

b. Найдем частные производные второго порядка

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x + 6y = 6(x + y),$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x + 6x = 6(x+y),$$

и

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x + 30y = 6(x+5y).$$

Вычислим числа A, B и C в стационарных точках $P_i \quad i = 1,2,3,4$.

В точке $P_1 = (-7,1)$ $A = -36$, $B = -36$, $C = -12$ и $AC - B^2 = -864 < 0$, следовательно по теореме 4.4 функция f не имеет в точке $P_1 = (-7,1)$ локального экстремума. Вычислим значение функции в точке P_1 $f(-7,1) = 431$.

В точке $P_2 = (5,1)$ $A = 36$, $B = 36$, $C = 60$ и $AC - B^2 = 864 > 0$, причем $A > 0$, следовательно по теореме 4.4 функция f имеет локальный минимум в точке $P_2 = (5,1)$. Вычислим его значение: $f(5,1) = -433$.

В точке $P_3 = (7,-1)$ $A = 36$, $B = 36$, $C = 12$ и $AC - B^2 = -864 < 0$, следовательно по теореме 4.4 функция f не имеет в точке $P_1 = (7,-1)$ локального экстремума. Вычислим значение функции в точке P_1 $f(7,-1) = 417$.

В точке $P_4 = (-5,-1)$ $A = -36$, $B = -36$, $C = -60$ и $AC - B^2 = 864 > 0$, причем $A < 0$, следовательно по теореме 4.4 функция f имеет локальный максимум в точке $P_2 = (5,1)$. Вычислим его значение: $f(-5,-1) = 447$.

Ответ: $P_1 = (-7,1)$, $P_3 = (7,-1)$ – стационарные точки, в которых функция f не имеет экстремума и $f(-7,1) = 431$, $f(7,-1) = -417$;
$P_2 = (5,1)$ – точка локального минимума, $f(5,1) = -433$;
$P_4 = (-5,-1)$– точка локального максимума, $f(-5,-1) = 447$.

5. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

5.1. Понятие числового ряда. Сходимость ряда

Пусть $\{a_n\}$ – последовательность чисел. Построим новую последовательность $\{S_n\}$ по следующему правилу:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \ \ldots, \ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \ \ldots$$

Пара последовательностей $\{a_n\}$ и $\{S_n\}$ называется *числовым рядом.* Число a_n называют *n-м членом* ряда; S_n называют *n-й частичной суммой* ряда. Числовой ряд обозначают символами $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ или $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Определение 5.1. *Если существует конечный* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, *то говорят, что ряд сходится.* S *называют суммой ряда и пишут* $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. *В противном случае ряд называют расходящимся.*

Пример. Из школьного курса известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_0 q^{n-1}$ (членами которого являются элементы геометрической прогрессии) сходится при $0 < |q| < 1|$ и его сумма равна $b_0/(1-q)$ и расходится при $|q| \geq 1$.

5.2. Признаки сходимости числовых рядов

Рассмотрим некоторые признаки сходимости (доказательство можно найти в учебном пособии [1] пп. 9.3–5).

Теорема 5.1. (Признак Коши). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *– ряд с положительными членами. Если существует конечный предел*

$$K = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится при* $K < 1$ *и расходится при* $K > 1$.

При $K = 1$ *признак Коши ответа не дает.*

Теорема 5.2. (Признак Даламбера). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *– ряд с положительными членами. Если существует конечный предел*

$$D = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится при* $D < 1$ *и расходится при* $D > 1$.

При $D = 1$ *признак Даламбера ответа не дает.*

Теорема 5.3. (Интегральный признак Коши). *Пусть интегрируемая на любом конечном промежутке функция* $f(x)$ *положительна и убывает при* $x \in [1, +\infty)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *– ряд с положительными членами,*

$a_n = f(n)$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *и несобственный интеграл* $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx$ $(\alpha \geq 1)$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Если ряд и интеграл сходятся, то для любого $n \in \mathbb{N}$ *верна оценка*

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq S - S_n \leq \int\limits_{n}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

Перейдем к рассмотрению рядов, члены которых являются произвольными вещественными числами любого знака.

Определение 5.2. *Будем называть ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{5.1}$$

абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|. \tag{5.2}$$

Известно, что из сходимости ряда (5.2) вытекает сходимость ряда (5.1).

Определение 5.3. *Ряд* (5.1) *называется условно сходящимся, если он сходится, а соответствующий ряд из модулей* (5.2) *расходится.*

Теорема 5.4. Признак Лейбница). *Пусть дан знакочередующийся ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n \geq 0. \tag{5.3}$$

Если $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *и для любых* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо* $a_{n+1} \leq a_n$, *то ряд* (5.3) *сходится. Его сумма* $S \leq a_1$ *и для любого* $n \in \mathbb{N}$ *справедлива оценка* $|S - S_n| \leq a_{n+1}$.

5.3. Вычисление суммы ряда с заданной точностью

При рассмотрении числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ возникают две задачи:

1) установить, сходится ли ряд;

2) в случае сходимости ряда найти его сумму.

Приведем алгоритмы вычисления суммы ряда с любой наперед заданной точностью, если его сходимость установлена с помощью одного из признаков: Коши, Даламбера, интегрального или Лейбница.

Сходимость ряда установлена с помощью признака Коши. Если $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = K < 1$, то по признаку Коши ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, и для вычисления его суммы S с точностью ε достаточно:

1) вычислить K и выбрать число q, такое, что $K < q < 1$;

2) найти минимальное $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такое, что для любого $n > N$ выполняется $\sqrt[n]{a_n} < q$, т. е. $a_n < q^n$;

3) оценить остаток ряда

$$|S - S_m| = \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + ... < q^{m+1} + q^{m+2} + ... =$$

$$= q^{m+1}(1 + q + q^2 + ...) = q^{m+1}\frac{1}{1-q},$$

и найти такое наименьшее $m \in \mathbb{N}$, что

$$\frac{q^{m+1}}{1-q} < \varepsilon;$$

4) взять $n_0 = \max\{N, m\}$.

Тогда $|S - S_{n_0}| < \varepsilon$, т. е. в качестве приближенного значения суммы ряда с точностью ε можно взять S_{n_0}.

Сходимость ряда установлена с помощью признака Даламбера. Если $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = D < 1$, то по признаку Даламбера ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, и для вычисления его суммы S с точностью ε достаточно:

1) вычислить D и выбрать число q, такое, что $D < q < 1$;

2) найти наименьшее $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такое, что для любого $n > N$ выполняется $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q$, т. е. $a_{n+1} < a_n q$;

3) оценить остаток ряда

$$|S - S_m| = \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + ... < qa_m + q^2a_m + ... = a_m\, q\,\frac{1}{1-q},$$

и найти наименьшее $m \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\frac{a_m q}{1-q} < \varepsilon;$$

4) взять $n_0 = \max\{N, m\}$.

Тогда $|S - S_{n_0}| < \varepsilon$, т. е. в качестве приближенного значения сумы ряда с точностью ε можно взять S_{n_0}.

Сходимость ряда установлена с помощью интегрального признака Коши. Если функция f определена на $[1, +\infty)$, положительна, убывает и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ также сходится и при этом $|S - S_n| \leq \int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx$. Таким образом, если найти минимальное $n_0 \in \mathbb{N}$, при котором $\int\limits_{n_0+1}^{+\infty} f(x)\,dx < \varepsilon$, то за приближенное значение суммы ряда S с точностью ε можно взять S_{n_0}.

Сходимость ряда установлена с помощью признака Лейбница. Если знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится по признаку Лейбница, то остаток ряда $|S - S_n| < a_{n+1}$. Таким образом, если взять наименьшее $n_0 \in \mathbb{N}$, при котором $a_{n_0+1} < \varepsilon$, то за приближенное значение суммы ряда S с точностью ε можно взять S_{n_0}.

5.4. Степенные ряды

Более подробное изложение теории можно найти в учебном пособии [1] п. 10.

Определение 5.4. *Ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \tag{5.4}$$

называется степенным рядом по степеням x.

Если числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ сходится, то говорят, что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ сходится в точке x_0.

Если степенной ряд сходится в каждой точке множества D, то говорят, что он сходится на множестве D.

Теорема 5.5. (Абель). *Если степенной ряд* (5.4) *сходится в точке $x = x_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится для всех x: $|\,x| < |\,x_1|$.*

Если же ряд (5.4) *расходится в точке x_2, то он расходится и для всех x: $|\,x| > |\,x_2|$.*

Теорема 5.6. *У любого степенного ряда* (5.4) *существует радиус сходимости, т. е. такое число $R_{CX} \in [0, +\infty]$, что ряд* (5.4) *сходится абсолютно при $|\,x| < R_{CX}$ и расходится при $|\,x| > R_{CX}$.*

Замечание. Теорема 5.6 показывает, что область сходимости D_{CX} содержит интервал $|x| < R_{\text{CX}}$, называемый интервалом сходимости степенного ряда, и, возможно, еще точки $x = -R_{\text{CX}}$ и $x = R_{\text{CX}}$.

Пусть $S(x)$ – сумма степеного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, R_{CX} – его радиус сходимости. Рассмотрим два ряда: ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, полученный из исходного почленным дифференцированием, и ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n x^{n+1}}{n+1}$, полученный из исходного почленным интегрированием. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.7. *Для рядов $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ и $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ радиусы сходимости совпадают. Сумма степеного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ – $S(x)$ дифференцируема и интегрируема в интервале сходимости $|x| < R_{CX}$ и справедливы равенства: $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$ и $\int\limits_0^x S(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n x^{n+1}}{n+1}$.*

5.5. Разложение функций в ряд Тейлора

Пусть функция $f\ :\ X \to \mathbb{R}$ имеет производные всех порядков (бесконечно дифференцируема) в точке $x_0 \in X$. Тогда можно составить степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, называемый рядом Тейлора по степеням $x - x_0$ для функции f. Укажем условия при которых функция совпадает с суммой своего ряда Тейлора.

Теорема 5.8. (Тейлор). *Пусть функция* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *бесконечно дифференцируема на* (a, b) *и все ее производные ограничены в совокупности на* (a, b), *т. е. существует такое конечное число* $M > 0$, *что для всех* $x \in (a, b)$ *и для всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $|f^{(n)}(x)| \le M$. *Тогда*

$$\forall\ x, x_0 \in (a, b) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

При выполнении типового расчета студенты могут использовать следующие разложения:

1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$;

2) $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$;

3) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$;

4) $\ln(1 + x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $-1 < x \le 1$;

5) $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $-1 < x < 1$;

6) $(x+1)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + ...$, $-1 < x < 1$.

5.6. Типовой расчет по теме “Числовые ряды и их применение” (ТР 2.6)

Студентам выдается индивидуальное задание, имеющее следующий вид.

ТР 2.6, Вар. 1 a) с точностью $\varepsilon = 0.001$ найти суммы S_k рядов.

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4n+4}{4n+10}\right)^{n^2}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1n+5)^n}{(3n-2)!}, \quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+7}{(n^2+3)^3}.$$

b) Вычислить значение интеграла I с точностью $\varepsilon = 0.0001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно

$$I = \int\limits_0^{0.80} \frac{\operatorname{arctg}(x^3)}{x^2}\,dx.$$

Пример выполнения ТР 2.6 (Вар. 1). а) с точностью $\varepsilon = 0.001$ найти суммы S_k рядов.

I. Найти сумму ряда $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4n+4}{4n+10}\right)^{n^2}$.

1. Проверим сходимость ряда, применив признак Коши. Для этого вычислим число K (см. теорему 5.1)

$$K = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n+4}{4n+10}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4n+4}{4n+10}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{-6}{4n+10}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1 + \frac{-6}{4n+10}\right)^{\frac{4n+10}{-6}}\right)^{\frac{-6n}{4n+10}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{-6n}{4n+10}} = e^{-\frac{3}{2}} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится по признаку Коши.

2. Выберем число q, удовлетворяющее неравенству

$$e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.2231 < q < 1,$$

значит можно взять $q = 0.5$.

3. Решим неравенство

$$\left(\frac{4n+4}{4n+10}\right)^{n} < 0.5. \tag{5.5}$$

Если обозначить $y_n = \left(\frac{4n+4}{4n+10}\right)^{n}$, то можно показать (см. [1] лемма 2.1), что $y_{n-1} > y_n$, т. е. монотонное убывание y_n. Неравенство (5.5) будем решать простым подбором. При $n = 1$ имеем

$$\frac{4+4}{4+10} = \frac{4}{7} > 0.5,$$

т. е. $n = 1$ – неравенству не удовлетворяет. При $n = 2$ имеем

$$\left(\frac{8+4}{8+10}\right)^{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{9} < 0.5.$$

Следовательно, в силу монотонного убывания y_n, неравенство справедливо при $n \geq 2$. Положим $\mathbb{N} = 2$;

4. Решим неравенство $\dfrac{q^{m+1}}{1-q} < \varepsilon$. Так как $q = \dfrac{1}{2}$, то левая часть неравенства $\dfrac{q^{m+1}}{1-q} = \dfrac{1}{2^m}$. Логарифмируя, получим

$$m > \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \log_2(1000) \approx 9.966,$$

т. е. $m \geq 10$. Положим $m = 10$;

4) возьмем $n_0 = \max\{N, m\} = \max\{2, 10\} = 10$. Тогда $|S_1 - S_{1,10}| < \varepsilon$. Вычислим непосретственно

$$S_{1,10} = \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{4n+4}{4n+10}\right)^{n^2} = \left(\frac{8}{14}\right)^1 + \left(\frac{12}{18}\right)^4 + \left(\frac{16}{22}\right)^9 + \left(\frac{20}{26}\right)^{16} +$$

$$+\left(\frac{24}{30}\right)^{25} + \left(\frac{28}{34}\right)^{36} + \left(\frac{32}{38}\right)^{49} + \left(\frac{36}{42}\right)^{64} + \left(\frac{40}{46}\right)^{81} + \left(\frac{44}{50}\right)^{100} \approx$$

$$\approx 0.5714 + 0.1975 + 0.0569 + 0.0150 + 0.0038 + 0.0009+$$

$$+0.0002 + 0.00005 + 0.00001 + 0.000003 = 0.84590.$$

Значит с точностью $\varepsilon = 0.001$ сумма ряда $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4n+4}{4n+10}\right)^{n^2} \approx 0.846.$

II. Найти сумму ряда

$$S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+5)^n}{(3n-2)!}.$$

1. Проверим сходимость ряда, применив признак сходимости Даламбера. Для этого вычислим число D (см. теорему 5.2)

$$D = \lim_{n\to+\infty}\frac{((n+1)+5)^{n+1}}{(3(n+1)-2)!}\,\frac{(3n-2)!}{(n+5)^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+6}{n+5}\right)^n\frac{n+6}{(3n-1)3n(3n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^n\cdot 0 = e\cdot 0 = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится по признаку Даламбера.

2. Так как $D = 0$ возьмем, например, $q = 0.5$ $(D < q < 1)$.

3. Подберем n удовлетворяющее неравенству

$$\left(\frac{n+6}{n+5}\right)^n\ \frac{n+6}{(3n-1)3n(3n+1)} < 0,5.$$

При $n = 1$ сразу получаем $\dfrac{7}{6}\,\dfrac{7}{2\cdot3\cdot4} = 0.34 < 0.5$, положим $N = 1$;

4. Решим неравенство

$$l_m = \frac{(m+5)^m}{(3m-2)!}\,\frac{0.5}{1-0.5} = \frac{(m+5)^m}{(3m-2)!} < 0.001.$$

Решение ищем простым подбором. Получаем $m \geq 5$. Так как

$$\frac{l_{m+1}}{l_m} = \left(1 + \frac{1}{m+5}\right)^m \frac{m+6}{(3m+1)3m(3m-1)} < 1,$$

при $m \geq 5$, то последовательность l_m монотонно убывает и можно положить $m = 5$;

5. Возьмем $n_0 = \max\{N, m\} = \max\{1, 5\} = 5$. Тогда $|S_2 - S_{2,5}| < \varepsilon$. Вычислим

$$S_{2,5} = \sum_{n=1}^{5} \frac{(n+5)^n}{(3n-2)!} = \frac{6}{1!} + \frac{7^2}{4!} + \frac{8^3}{7!} + \frac{9^4}{10!} + \frac{10^5}{13!} \approx$$

$$\approx 6 + 2.0417 + 0.1016 + 0.0018 + 0.000016 = 8.14508.$$

Значит с точностью $\varepsilon = 0.001$ сумма ряда $S_2 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n+5)^n}{(3n-2)!} \approx 8.145.$

III. Найти сумму ряда

$$S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+7}{(n^2+3)^3}.$$

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{5x+7}{(x^2+3)^3}$. Она положительна и убывает при $x \geq 1$.

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{(5x+7)dx}{(x^2+3)^3} \leq \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{6x\,dx}{(x^2+3)^3} =$$

$$= 3 \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x^2+3)^2}\right]_1^b = \frac{3}{32}.$$

Ряд сходится по интегральному признаку Коши см. теорему 5.3.

Здесь и далее используется оценка

$$\int\limits_{N+1}^{+\infty} \frac{ax+b}{(x^2+c)^d}\,dx \leq \int\limits_{N+1}^{+\infty} \frac{(a+1)x}{(x^2+c)^d},$$

где $a \geq 0$ $b \geq 1$, $c \geq 0$ и $d \geq 2$.

2. Произведем интегральную оценку остатка ряда

$$|S_3 - S_{3,n}| \leq \int\limits_n^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_n^{+\infty} \frac{(5x+7)dx}{(x^2+3)^3} \leq \int\limits_n^{+\infty} \frac{6x\,dx}{(x^2+3)^3} =$$

$$= -\frac{3}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{(b^2+3)^2} - \frac{1}{(n^2+3)^2}\right] = \frac{3}{2}\,\frac{1}{(n^2+3)^2}.$$

Найдем наименьшее $n \in \mathbb{N}$, при котором

$$\frac{3}{2}\,\frac{1}{(n^2+3)^2} < \varepsilon = 0.001 \;\Leftrightarrow\; n > \sqrt{\sqrt{\frac{3}{0.002}} - 3} \approx 5.977,$$

т. е. $n = 6$. Вычисляем непосредственно:

$$S_{3,6} = \sum_{n=1}^{6} \frac{5n+7}{(n^2+3)^3} = \frac{12}{4^3} + \frac{17}{7^3} + \frac{22}{12^3} + \frac{27}{19^3} + \frac{32}{28^3} + \frac{37}{39^3} \approx$$

$$\approx 0.1875 + 0.0496 + 0.0127 + 0.0039 + 0.0015 + 0.0006 = 0.25650.$$

Значит с точностью $\varepsilon = 0.001$ сумма ряда $S_3 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{5n+7}{(n^2+3)^3} \approx 0.257.$

b) Вычислить значение интеграла $I = \int\limits_0^{0.8} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^3)}{x^2}\,dx$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно.

1. Разложим функцию $\operatorname{arctg}(x^3)$ в степенной ряд по степеням x

$$\operatorname{arctg}(x^3) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x^3)^{2n+1}}{2n+1}.$$

Тогда

$$\frac{\operatorname{arctg}(x^3)}{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+1}}{2n+1}. \tag{5.6}$$

Это разложение верно для x, таких, что $-1 < x^3 < 1$, т. е. для $-1 < x < 1$, следовательно, степенной ряд (5.6) равномерно сходится в интервале $[-r, r]$ при произвольном r, $0 < r < 1$ (например, $r = 0.8$). В этом интервале равномерной сходимости ряд можно интегрировать почленно. Отсюда

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int\limits_0^{0.8} x^{6n+1}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,\frac{0.8^{6n+2}}{6n+2}. \tag{5.7}$$

2. Покажем, что ряд (5.7) сходится, используя признак Лейбница (см. теорему 5.4). Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{0.8^{6n+2}}{(2n+1)(6n+2)} = 0.$$

Для доказательства неравенства

$$a_{n+1} < a_n, \quad n > 0, \tag{5.8}$$

рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{0.8^{6x+2}}{(2x+1)(6x+2)}$, определенную на $[1,+\infty)$, $f(n) = a_n$, и докажем, что она убывает при всех $x \in [1,+\infty)$. Так как $f(x)$ является произведением положительных функций где $f_1(x) = 0.8^{6x+2}$ и $f_2(x) = \dfrac{1}{(2x+1)(6x+2)}$ – убывающих на $[1,+\infty)$ функций, то $f(x)$ убывает на $[1,+\infty)$, т. е. для произвольных $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$, $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Возьмем $x_1 = n$, $x_2 = n+1$. Тогда $a_n = f(x_1) > f(x_2) = a_{n+1}$ для всех $n > 0$ и требуемое неравенство (5.8) установлено.

Ряд (5.7) сходится в силу признака Лейбница.

3. Найдем наименьшее n, при котором верно неравенство

$$a_n = \frac{0.8^{6n+2}}{(2n+1)(6n+2)} < \varepsilon = 0.0001.$$

Решение ищем простым подбором, так как монотонное убывание коэффициентов a_n доказано (см. неравенство (5.8)). При $n=2$ имеем

$$\frac{0,8^{14}}{5\cdot 14} \approx 0,000628 > 0,0001,$$

т. е. $n=2$ неравенству не удовлетворяет. При $n=3$

$$\frac{0.8^{20}}{7\cdot 20} \approx 0.000082 < 0.0001,$$

т. е. при $n=3$ неравенство выполнено.

4. Вычислим непосредственно

$$S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,\frac{0.8^{6n+2}}{6n+2} = \frac{0.8^2}{2} - \frac{0.8^8}{3\cdot 8} + \frac{0.8^{14}}{5\cdot 14} - \frac{0.8^{20}}{7\cdot 20} \approx$$

$$\approx 0.32 - 0.0069905 + 0.0006283 - 0.00008235 \approx 0.31356.$$

Значит, интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{0.8} \frac{\operatorname{arctg}(x^3)}{x^2}\,dx \approx 0.31356$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

Ответ. a) с точностью $\varepsilon = 0.001$ суммы рядов следующие:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4n+4}{4n+10} \right)^{n^2} \approx 0.846, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+5)^n}{(3n-2)!} \approx 8.145,$$
$$S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+7}{(n^2+3)^3} \approx 0.257.$$

b) с точностью $\varepsilon = 0.0001$ интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{0.8} \frac{\operatorname{arctg}(x^3)}{x^2}\,dx \approx 0.31356.$

Список литературы

1. Бондарев А.С., Доценко М.Л., Фролова Е.В. Математический анализ (функции одной вещественной переменной): Учебное пособие / Под ред. А.Л.Белопольского; СпбГЭТУ. СПб., 1998.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные и интегральные исчисления: Учебник для ВУЗов. - М.: Наука, 2003.

3. Боревич Е.З., Жукова Е.Е., Челкак С.И. Дифференциальное исчисление функций многих вещественных переменных. Учеб. пособие. - СПб : СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2001.

4. Бодунов Н.А., Челкак С.И., Чистяков В.М. Комплексные числа. Многочлены. Векторная алгебра и аналитическая геометрия.
Учеб. пособие.- СПб : ГЭТУ, 1996.

5. Двайт Г. Д. Таблицы интегралов и другие математические формулы. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983.

6. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица значений интегральных синусов $\mathrm{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt..$

	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0.	0	0.0999	0.1996	0.2985	0.3965	0.4931	0.5881	0.6812	0.7721	0.8605
1.	0.9461	1.0287	1.1080	1.1840	1.2562	1.3247	1.3892	1.4496	1.5058	1.5578
2.	1.6054	1.6487	1.6876	1.7222	1.7525	1.7785	1.8004	1.8182	1.8321	1.8422
3.	1.8487	1.8517	1.8514	1.8481	1.8419	1.8331	1.8219	1.8086	1.7934	1.7765
4.	1.7582	1.7387	1.7184	1.6973	1.6758	1.6541	1.6325	1.6110	1.5900	1.5696
5.	1.5499	1.5313	1.5137	1.4973	1.4823	1.4687	1.4567	1.4462	1.4374	1.4302
6.	1.4247	1.4209	1.4187	1.4182	1.4192	1.4218	1.4258	1.4312	1.4379	1.4457
7.	1.4546	1.4644	1.4751	1.4864	1.4983	1.5107	1.5233	1.5361	1.5489	1.5617
8.	1.5742	1.5864	1.5981	1.6093	1.6198	1.6296	1.6386	1.6467	1.6538	1.6599
9.	1.6650	1.6691	1.6720	1.6739	1.6747	1.6745	1.6732	1.6708	1.6676	1.6634
10.	1.6583	1.6525	1.6460	1.6388	1.6311	1.6229	1.6144	1.6056	1.5965	1.5874
11.	1.5783	1.5693	1.5604	1.5518	1.5436	1.5357	1.5284	1.5215	1.5153	1.5098
12.	1.5050	1.5009	1.4975	1.4950	1.4933	1.4923	1.4922	1.4929	1.4943	1.4965
13.	1.4994	1.5029	1.5071	1.5119	1.5172	1.5229	1.5290	1.5355	1.5422	1.5492
14.	1.5562	1.5633	1.5704	1.5773	1.5841	1.5907	1.5970	1.6030	1.6085	1.6136
15.	1.6182	1.6223	1.6257	1.6286	1.6309	1.6326	1.6336	1.6340	1.6337	1.6328

Таблица значений интегральных косинусов $\mathrm{Ci}(x) = -\int\limits_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$

	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0.		-1.7279	-1.0422	-0.6492	-0.3788	-0.1778	-0.0223	0.1005	0.1983	0.2761
1.	0.3374	0.3849	0.4205	0.4457	0.4620	0.4704	0.4717	0.4670	0.4568	0.4419
2.	0.4230	0.4005	0.3751	0.3472	0.3173	0.2859	0.2533	0.2201	0.1865	0.1529
3.	0.1196	0.0870	0.0553	0.0247	-0.0045	-0.0321	-0.0580	-0.0819	-0.1038	-0.1235
4.	-0.1410	-0.1562	-0.1690	-0.1795	-0.1877	-0.1935	-0.1970	-0.1984	-0.1976	-0.1948
5.	-0.1900	-0.1835	-0.1753	-0.1655	-0.1544	-0.1421	-0.1287	-0.1144	-0.0994	-0.0839
6.	-0.0681	-0.0520	-0.0359	-0.0199	-0.0042	0.0111	0.0258	0.0399	0.0531	0.0654
7.	0.0767	0.0869	0.0960	0.1038	0.1104	0.1156	0.1196	0.1222	0.1236	0.1236
8.	0.1224	0.1200	0.1164	0.1118	0.1061	0.0994	0.0919	0.0837	0.0748	0.0653
9.	0.0553	0.0451	0.0346	0.0239	0.0133	0.0027	-0.0077	-0.0178	-0.0275	-0.0368
10.	-0.0455	-0.0535	-0.0609	-0.0675	-0.0733	-0.0783	-0.0824	-0.0855	-0.0878	-0.0891
11.	-0.0896	-0.0891	-0.0877	-0.0855	-0.0824	-0.0786	-0.0740	-0.0688	-0.0630	-0.0566
12.	-0.0498	-0.0426	-0.0350	-0.0273	-0.0194	-0.0114	-0.0034	0.0044	0.0121	0.0196
13.	0.0268	0.0335	0.0399	0.0457	0.0510	0.0558	0.0598	0.0633	0.0660	0.0681
14.	0.0694	0.0700	0.0699	0.0691	0.0677	0.0655	0.0628	0.0594	0.0555	0.0511
15.	0.0463	0.0410	0.0354	0.0295	0.0234	0.0172	0.0108	0.0045	-0.0019	-0.0081

Таблица значений интеграла вероятностей $\Phi(x)$)

	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0.	0	0.1125	0.2227	0.3286	0.4284	0.5205	0.6039	0.6778	0.7421	0.7969
1.	0.8427	0.8802	0.9103	0.9340	0.9523	0.9661	0.9763	0.9838	0.9891	0.9928
2.	0.9953	0.9970	0.9981	0.9989	0.9993	0.9996	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

Содержание

Колбина Светлана Анатольевна, Коновалов Григорий Моисеевич,
Снетков Олег Александрович, Сулимов Михаил Григорьевич

Типовые расчеты по курсу „Математический анализ“

Учебное пособие

Редактор Э. К. Долгатов

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Гарнитура „Times“ Печ. л. ?.
Тираж 550 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5