ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

федеральное образовательное учреждение высшего

профессионального образования

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

(МИИТ)

ОДОБРЕНО:
Кафедра «Высшая и
прикладная математика»

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ф-та ТС

«__» ______2011г.

Составители: Блистанова Л.Д., д.ф.-м.н., проф., Голечков Ю.И., д.ф.-м.н., доц., Захарова М.В., к.ф.-м.н., доц., Сперанский Д.В., д.т.н., проф.

МАТЕМАТИКА

Задания на контрольные работы № 1 – 3

для студентов 1 курса заочной формы обучения специальности

190901.65 – Системы обеспечения движения поездов,
специализации – СА, СТ, СЭ.

Москва 2011г.

Методические указания по выполнению контрольных работ

Задачи, включенные в контрольную работу, взяты из сборника задач, подготовленного коллективом преподавателей кафедры «Высшая и прикладная математика» РОАТ МГУПС. Все задачи имеют тройную нумерацию, которая включает номер раздела из сборника задач, уровень сложности задачи и порядковый номер задачи. Студент выполняет те задачи, последняя цифра номера которых совпадает с последней цифрой его учебного шифра. Например, студент, учебный шифр которого имеет последнюю цифру 3, в контрольной работе №1 решает задачи 1.1.53, 2.1.13, 2.2.43, 3.3.33, 3.2.3; в контрольной работе №2 – 6.2.13, 6.3.3, 7.1.23, 7.1.43, 7.3.23; в контрольной работе №3 – 8.1.23, 8.3.23, 9.1.33, 9.2.3, 10.1.3.

Перед выполнением контрольной работы студент должен ознакомиться с содержанием разделов рабочей программы, на освоение которых ориентирована выполняемая контрольная работа. Необходимую учебную литературу студент может найти в рабочей программе (в программе указана как основная, так и дополнительная литература).

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради, на обложке которой должны быть указаны: дисциплина, номер контрольной работы, шифр студента, курс, фамилия, имя и отчество студента. На обложке вверху справа указывается фамилия и инициалы преподавателя-рецензента. В конце работы студент ставит свою подпись и дату выполнения работы.

В каждой задаче надо полностью выписать ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

Решение каждой задачи должно содержать подробные вычисления, пояснения, ответ, а также, в случае необходимости, и рисунки. После каждой задачи следует оставлять место для замечаний преподавателя-рецензента. В случае невыполнения этих требований преподаватель возвращает работу для доработки без ее проверки.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Элементы векторной алгебры, аналитической геометрии и линейной алгебры

1.1.51. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах: $\vec{a}(-3;2;1)$; $\vec{b}(5;4;2)$; $\vec{c}(0;6;1)$. Сделать чертеж.

1.1.52. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах: $\vec{a}(-4;2;5)$ и $\vec{b}(1;0;-2)$. Сделать чертеж.

1.1.53. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах: $\vec{a}(4;-3;7)$; $\vec{b}(2;0;1)$; $\vec{c}(-5;1;2)$. Сделать чертеж.

1.1.54. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах: $\vec{a}(3;0;6)$ и $\vec{b}(2;-1;3)$. Сделать чертеж.

1.1.55. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах: $\vec{a}(-5;0;2)$; $\vec{b}(8;1;3)$; $\vec{c}(1;-1;-2)$. Сделать чертеж.

1.1.56. Найти площадь треугольника, построенного на векторах: $\vec{a}(2;2;-3)$ и $\vec{b}(0;-2;5)$. Сделать чертеж.

1.1.57. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах: $\vec{a}(1;2;8)$; $\vec{b}(2;3;-4)$; $\vec{c}(5;0;-1)$. Сделать чертеж.

1.1.58. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах: $\vec{a}(7;0;3)$ и $\vec{b}(-4;1;-2)$. Сделать чертеж.

1.1.59. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах: $\vec{a}(2;-4;7)$; $\vec{b}(3;-2;0)$; $\vec{c}(6;2;1)$. Сделать чертеж.

1.1.60. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах: $\vec{a}(4;-1;2)$ и $\vec{b}(0;3;-3)$. Сделать чертеж.

2.1.11. Уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-5=0$. Составить уравнения трех остальных сторон квадрата, если $P(-1;\ 0)$ – точка пересечения его диагоналей. Сделать чертеж.

2.1.12. Даны уравнения одной из сторон ромба $x-3y+10=0$ и одной из ее диагоналей $x+4y-4=0$; диагонали ромба пересекаются в точке $P(0;\ 1)$. Найти уравнения остальных сторон ромба. Сделать чертеж.

2.1.13. Уравнения двух сторон параллелограмма $x+2y+2=0$ и $x+y-4=0$, а уравнение одной из его диагоналей $x-2=0$. Найти координаты вершин параллелограмма. Сделать чертеж.

2.1.14. Даны две вершины $A(-3;\ 3)$ и $B(5;\ -1)$ и точка $D(4;\ 3)$ пересечения высот треугольника. Составить уравнения его сторон. Сделать чертеж.

2.1.15. Даны вершины $A(3;\ -2)$, $B(4;\ -1)$, $C(1;\ 3)$ трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины D этой трапеции. Сделать чертеж.

2.1.16. Даны уравнения двух сторон треугольника $5x-4y+15=0$ и $4x+y-9=0$. Его медианы пересекаются в точке $P(0;\ 2)$. Составить уравнение третьей стороны треугольника. Сделать чертеж.

2.1.17. Даны две вершины $A(2;\ -2)$ и $B(3;\ -1)$ и точка $P(1;\ 0)$ пересечения медиан треугольника ABC. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной через третью вершину C. Сделать чертеж.

2.1.18. Даны уравнения двух высот треугольника $x+y=4$ и $y=2x$ и одна из его вершин $A(0;\ 2)$. Составить уравнения сторон треугольника. Сделать чертеж.

2.1.19. Даны уравнения двух медиан треугольника $x-2y+1 = 0$ и $y-1=0$ и одна из его вершин $A(1;\ 3)$. Составить уравнения его сторон. Сделать чертеж.

2.1.20. Две стороны треугольника заданы уравнениями $5x-2y-8=0$ и $3x-2y-8=0$, а середина третьей стороны совпадает с началом координат. Составить уравнение этой стороны. Сделать чертеж.

2.2.41. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямые: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{3}$ и $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{3}$. Сделать схематический чертеж.

2.2.42. Составить уравнение плоскости, проходящей через т. $A(2;3;-1)$ и прямую $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{3}$. Сделать схематический чертеж.

2.2.43. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямые: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{2}$ и $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{2}$. Сделать схематический чертеж.

2.2.44. Составить уравнение плоскости, проходящей через т. $A(-1;-2;1)$ и прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+1}{3}$. Сделать схематический чертеж.

2.2.45. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямые: $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$. Сделать схематический чертеж.

2.2.46. Составить уравнение плоскости, проходящей через т. $A(3;0;1)$ и прямую $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$. Сделать схематический чертеж.

2.2.47. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямые $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{0}$, и $\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{0}$. Сделать схематический чертеж.

2.2.48. Составить уравнение плоскости, проходящей через т. $A(3;2;-1)$ и прямую $\frac{x}{0}=\frac{y}{-2}=\frac{z+4}{1}$. Сделать схематический чертеж.

2.2.49. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямые: $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$. Сделать схематический чертеж.

2.2.50. Составить уравнение плоскости, проходящей через т. $A(-1;1;0)$ и прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$. Сделать схематический чертеж.

3.3.31–3.3.40. Приведите к каноническому виду уравнения линий второго порядка. Установите тип этих линий и их расположение. Сделайте схематический чертеж.

3.3.31. $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$;
3.3.32. $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y + 50 = 0$;
3.3.33. $xy + 3x - 3y - 9 = 0$;
3.3.34. $3x^2 - 4xy + 4 = 0$;
3.3.35. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 9 = 0$;
3.3.36. $4xy + 9 = 0$;
3.3.37. $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$;
3.3.38. $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$;
3.3.39. $2x^2 + 4x - y - 1 = 0$;
3.3.40. $y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$.

3.2.1–3.2.10. Дана (4х4)-система линейных уравнений. Доказать ее совместность и решить методом Гаусса (методом исключения неизвестных). Сделать проверку.

3.2.1. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=-2 \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4=12 \\ 3x_1+x_2+x_3+3x_4=11 \end{cases}$

3.2.2. $\begin{cases} 4x_1+2x_2+2x_3+x_4=9 \\ x_1-3x_2-x_3+7x_4=24 \\ -2x_1-x_2+x_3+x_4=-2 \\ 3x_1+4x_2+x_3+x_4=8 \end{cases}$

3.2.3. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3-2x_4=23 \\ x_1-3x_2-x_3+2x_4=-12 \\ -2x_1-x_2+x_3+4x_4=-23 \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=10 \end{cases}$

3.2.4. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=1 \\ 5x_1+2x_2-x_3+2x_4=25 \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4=18 \\ 3x_1+x_2+x_3+3x_4=18 \end{cases}$

3.2.5. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+3x_4=0 \\ x_2-2x_3+x_4=7 \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=-3 \\ 2x_1-2x_2-x_3+2x_4=6 \end{cases}$

3.2.6. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-2x_4=2 \\ 2x_1+3x_2-2x_3-x_4=13 \\ x_1-3x_2+x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-3x_2-2x_3+3x_4=11 \end{cases}$

3.2.7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$ 3.2.8. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$

3.2.9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 9 \end{cases}$ 3.2.10. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 19 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 19 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 34 \end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Введение в математический анализ. Производная и ее приложения.

6.2.11–6.2.20. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

6.2.11. а) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2-x^3+5x}{2x^3+6x-7}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{x+5}$.

6.2.12. а) $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x+1)^3-(x-1)^2}{2x^3+x-5}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x-7}\right)^{x+2}$.

6.2.13. а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{tg(\pi+2x)}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2-(x-2)^3}{3x^3+6x-7}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{x-1}$.

6.2.14. а) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{4x^2}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{15x^5-6x^4+2}{4-3x^3+5x^5}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{2x+3}$.

6.2.15. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2-x^3}{(x-1)^2+x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+5x}{1-2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

6.2.16. а) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+5}{x^4-5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x^2}{2-3x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

6.2.17. а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-x^2-3x^3}{x^3+5x^2-7}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+4}{2x+4}\right)^{\frac{2}{x}}$.

6.2.18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-2)^3-(x+1)^2}{3x^3+8}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+1}{2x^2+1}\right)^{\frac{3}{x^2}}$.

6.2.19. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(6-x)^2-x^3}{(2-x)^3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+2}$.

6.2.20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{x}}{\sin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3-x)^3}{(x+1)^2+2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+3}\right)^{x-2}$.

6.3.1–6.3.10. Задана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x_1 и x_2. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; 2) в случае разрыва функции найти ее пределы в точке разрыва слева и справа; 3) сделать схематический чертеж.

6.3.1. $f(x)=9^{1/(2-x)}$, $x_1=0$, $x_2=2$.

6.3.2. $f(x)=4^{1/(3-x)}, \quad x_1=1, \quad x_2=3.$

6.3.3. $f(x)=12^{1/x}, \quad x_1=0, \quad x_2=2.$

6.3.4. $f(x)=3^{1/(4-x)}, \quad x_1=2, \quad x_2=4.$

6.3.5. $f(x)=8^{1/(5-x)}, \quad x_1=3, \quad x_2=5.$

6.3.6. $f(x)=10^{1/(7-x)}, \quad x_1=5, \quad x_2=7.$

6.3.7. $f(x)=14^{1/(6-x)}, \quad x_1=4, \quad x_2=6.$

6.3.8. $f(x)=15^{1/(8-x)}, \quad x_1=6, \quad x_2=8.$

6.3.9. $f(x)=11^{1/(4+x)}, \quad x_1=-4, \quad x_2=-2.$

6.3.10. $f(x)=13^{1/(5+x)}, \quad x_1=-5, \quad x_2=-3.$

7.1.21–7.1.30. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ данных функций.

7.1.21. а) $y=x^2\sin 4x$; б) $\begin{cases} y=t+arctg3t, \\ x=t^3-2arcctgt \end{cases}$ при $t=1$;

в) $y=(\cos 4x)^{\sin 3x}$.

7.1.22. а) $y=x^7\ln 9x$; б) $\begin{cases} y=10t-arctgt^2, \\ x=t^6+arcctgt \end{cases}$ при $t=2$;

в) $y=(\cos 7x)^{\sin 9x}$.

7.1.23. а) $y=x^4 tg10x$; б) $\begin{cases} y=t^3+arctg2t, \\ x=\dfrac{1}{3}t-arcctg2t \end{cases}$ при $t=\dfrac{1}{3}$;

в) $y=\left(\cos x^3\right)^{\sin 11x}$.

7.1.24. а) $y=x^7e^{8x}$; б) $\begin{cases} y=17t-257arctgt^4, \\ x=\dfrac{1}{32}t^6+5arcctgt \end{cases}$ при $t=2$;

в) $y=(\cos 14x)^{tg2x}$.

7.1.25. а) $y=x^8 ctg11x$; б) $\begin{cases} y=t^3-arctg6t, \\ x=\dfrac{6}{49}t+2arcctg6t \end{cases}$ при $t=\dfrac{1}{7}$;

в) $y=\left(\sin x^3\right)^{\sin 15x}$.

7.1.26. а) $y = x^3 \sin 4x$; б) $\begin{cases} y = t + arctg 4t, \\ x = t^2 - 3arcctgt \end{cases}$ при $t = 1$;

в) $y = (\cos 3x)^{\sin 4x}$.

7.1.27. а) $y = x^3 \ln 17x$; б) $\begin{cases} y = 12t - 10arctgt, \\ x = \dfrac{1}{256} t^8 + 65arcctgt^3 \end{cases}$ при $t = -2$;

в) $y = (\cos 17x)^{\sin 3x}$.

7.1.28. а) $y = x^5 tg18x$; б) $\begin{cases} y = t^2 + arctg7t, \\ x = \dfrac{3}{4} t - 3arcctg7t \end{cases}$ при $t = \dfrac{1}{8}$;

в) $y = \left(\cos x^2\right)^{\sin 17x}$.

7.1.29. а) $y = x^4 e^{18x}$; б) $\begin{cases} y = 24{,}9t - arctgt, \\ x = 20{,}25t^4 + 730arcctgt^3 \end{cases}$ при $t = \dfrac{1}{3}$;

в) $y = (\cos 17x)^{tg3x}$.

7.1.30. а) $y = x^9 ctg20x$; б) $\begin{cases} y = 20t - 4\arcsin 3t, \\ x = 5t^3 + \ln 19t \end{cases}$ при $t = \dfrac{1}{5}$;

в) $y = \left(\sin x^4\right)^{\sin 12x}$.

7.1.41–7.1.50. Найти пределы функции, применяя правило Лопиталя.

7.1.41. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{1 - 2\sin x}{1 - \sqrt{3} tgx}$.

7.1.42. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{1 - tgx}$.

7.1.43. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{2x}}{\ln(1 - 2x)}$.

7.1.44. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^2}{\ln x}$.

7.1.45. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

7.1.46. $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \ln x$.

7.1.47. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x} \right)$.

7.1.48. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{e^{2x}}$.

7.1.49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(1+x)}{e^x-1}$.   7.1.50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1-x)}$.

7.3.21–7.3.30. Методами дифференциального исчисления: а) исследовать функцию $y = f(x)$ для $\forall x \in R$ и по результатам исследования построить ее график; б) Найти наименьшее и наибольшее значения заданной функции на отрезке $[a; b]$.

7.3.21. а) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$,   б) $[-3; 3]$.

7.3.22. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$,   б) $[-1; 1]$.

7.3.23. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$,   б) $[-2; 2]$.

7.3.24. а) $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$,   б) $[-2; 2]$.

7.3.25. а) $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$,   б) $[1; 4]$.

7.3.26. а) $y=(x-1)\mathrm{e}^{3x+1}$,   б) $[0; 1]$.

7.3.27. а) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$,   б) $[1; 9]$.

7.3.28. а) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{2-x}}$,   б) $[-1; 1]$.

7.3.29. а) $y=x\mathrm{e}^{-x^2}$,   б) $[-2; 2]$.

7.3.30. а) $y=\dfrac{x^2-3}{x^2+9}$,   б) $[-2; 2]$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных. Кратные интегралы. Криволинейные и поверхностные интегралы.

8.1.21–8.1.30. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

8.1.21. а) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}-\sin x+x^4\right)dx$; б) $\int\frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$;

в) $\int(x+1)\cos x\;dx$; г) $\int\frac{dx}{1-5\sin^2 x}\,dx$.

8.1.22. а) $\int\left(x^2-\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$; б) $\int\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}\,dx$;

в) $\int\ln 3x\;dx$; г) $\int\frac{x-8}{x(x-2)^2}\,dx$.

8.1.23. а) $\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-2-3\sin x\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{x\ln x}\,dx$;

в) $\int x\sin 2x\;dx$; г) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

8.1.24. а) $\int\left(\frac{1}{4-x^2}-\frac{1}{x^2}-\sin x\right)dx$; б) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$;

в) $\int x\cdot e^{2x}dx$; г) $\int ctg^4 xdx$.

8.1.25. а) $\int\left(e^x+x^7-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{5dx}{\cos^2(5x-1)}$;

в) $\int x\cdot\cos xdx$; г) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

8.1.26. а) $\int\left(\cos x-\frac{1}{\sin^2 x}+5x^4\right)dx$; б) $\int\left(\cos x-\frac{1}{\sin^2 x}+5x^4\right)dx$;

в) $\int x\ln xdx$; г) $\int\frac{3dx}{(x-1)(x+9)}$.

8.1.27. а) $\int\frac{3dx}{(x-1)(x+9)}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}$;

в) $\int(x-1)e^x dx$; г) $\int\sin^3 x\cdot\cos^8 xdx$.

8.1.28. а) $\int(x^6+6^x+\cos x)dx$; б) $\int(x^6+6^x+\cos x)dx$;

в) $\int(x+3)\sin xdx$; г) $\int\frac{x+4}{(x+1)(x^2+5x+6)}dx$.

8.1.29. а) $\int (x^5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2^x)dx$;   б) $\int \sin^2 x \cos x dx$;

в) $\int arctgxdx$;   г) $\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}}$.

8.1.30. а) $\int \left(\frac{1}{4+x^2} - x^2 + 3e^x \right) dx$;   б) $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$;

в) $\int \ln 2x dx$;   г) $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$.

8.3.21–8.3.30. Исследовать интеграл на сходимость.

8.3.21. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$.   8.3.22. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

8.3.23. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$.   8.3.24. $\int\limits_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

8.3.25. $\int\limits_1^{\infty} e^{-x} \cdot xdx$.   8.3.26. $\int\limits_1^{\infty} e^{-x} \cdot xdx$.

8.3.27. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{(x-1)^2}$.   8.3.28. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

8.3.29. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.   8.3.30. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{x^2-4x+4}$.

9.1.31–9.1.40. Дана функция двух переменных $z = f(x;y)$. Найти все частные производные первого и второго порядков. Обосновать равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$.

9.1.31. $z = \frac{y}{x^2 - y^2}$.   9.1.32. $z = \ln(x^2 - 4y^3)$.

9.1.33. $z = arctg\frac{y}{x}$.   9.1.34. $z = e^{x^2 y} - x^2 y$.

9.1.35. $z = \cos(x^2 - y^2)$.   9.1.36. $z = \arcsin\frac{y}{x^2}$.

9.1.37. $z = \ln(x^3 - 5y^2)$ 9.1.38. $z = \sqrt{x^3 + x^2 y + 1}$.

9.1.39. $z = \arcsin(x^2 y)$.   9.1.40. $z = arctg(x^2 y)$.

9.2.1–9.2.10. Дана функция $z=f(x,y)$ и точка $M_1(x_1;y_1)$. С помощью полного дифференциала вычислить приближенно значение функции в данной точке. Вычислить точное значение функции в точке M_0 и оценить относительную погрешность вычислений.

9.2.1. $z=x^2+3xy+y^2$; $M_1(0{,}98;1{,}04)$.

9.2.2. $z=2xy-3y^2+5x$; $M_1(3{,}04;2{,}03)$.

9.2.3. $z=x^2+y^2+2x-2y$; $M_1(0{,}94;1{,}04)$.

9.2.4. $z=x^2+y^2+4x-2y$; $M_1(2{,}94;1{,}05)$.

9.2.5. $z=y^2+3xy+x$; $M_1(1{,}05;1{,}95)$.

9.2.6. $z=x^2+2xy+y^2$; $M_1(2{,}06;0{,}98)$.

9.2.7. $z=x^2-y^2+3x+2y$; $M_1(1{,}02;2{,}05)$.

9.2.8. $z=x^2+4xy+y^2$; $M_1(2{,}96;0{,}94)$.

9.2.9. $z=3xy+2x+5y$; $M_1(1{,}04;2{,}96)$.

9.2.10. $z=x^2-3xy+2x$; $M_1(0{,}96;2{,}05)$.

10.1.1–10.1.10. Вычислить криволинейный интеграл. Сделать чертеж дуги кривой L.

10.1.1. $\int\limits_L \frac{x^2+1}{y+1}dx+\frac{x-y}{x+1}dy$, где L – отрезок прямой от точки (1; 0) до точки (2;1).

10.1.2. $\int\limits_L \frac{x^2}{y+2}dx+\frac{x+2y}{3x+1}dy$, где L – отрезок прямой от точки (1;1) до точки (2;2).

10.1.3. $\int\limits_L \frac{y^2+1}{x+1}dx+\frac{x+1-y}{2}dy$, где L – дуга кривой $y = \ln(x+1)$ от точки (0; 0) до точки (e – 1;1).

10.1.4. $\int\limits_L \frac{y^2-1}{x+1}dx+\frac{1}{x}dy$, где L – дуга кривой $y = x^2$ от точки (1;1) до точки (2;4).

10.1.5. $\int\limits_L (y^2-x)dx+(x^2-y)dy$, где L – верхняя половина окружности $x = \sin 2t$, $y = \cos 2t$. Интегрировать против часовой стрелки.

10.1.6. $\int\limits_L (\frac{y}{x}-1)dx+\frac{1}{y}dy$, где L – дуга кривой $y = x^2$ от точки (–1;1) до точки (–2; 4).

10.1.7. $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, где L – верхняя четверть окружности $x = 2\sin t$, $y = 2\cos t$. Интегрировать против часовой стрелки.

10.1.8. $\int\limits_L \frac{x^2+1}{y+1}dx + \frac{x-y}{x+1}dy$, где L – отрезок прямой от точки (1; 0) до точки (2; 1).

10.1.9. $\int\limits_L \frac{y-1}{x}dx + \frac{x-1}{y}dy$, где L – дуга кривой $y = x^2$ от точки (1; 1) до точки (2; 4).

10.1.10. $\int\limits_L (y-x)dx + (x-y)dy$, где L – верхняя половина эллипса $x = 3\sin 2t$, $y = 4\cos 2t$. Интегрировать против часовой стрелки.