Представлена программа курса высшей математики: элементы линейной алгебры и аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функций одной переменной, исследование функций с помощью производных, векторные и комплексные функции действительного переменного, неопределенный и определенный интегралы, дифференциальные уравнения, функции многих переменных, теория рядов, кратные интегралы, теория поля, теория вероятностей, математическая статистика.

Приведены правила выполнения контрольных работ. Прилагается список учебной литературы. Разработаны контрольные задания на четыре семестра для самостоятельной работы студентам дневного и заочного факультетов.

Работа рекомендована к печати на заседании кафедры (протокол №8 от 26 апреля 2000 г.).

Работы пересмотрены с учетом изменения учебных планов и могут быть рекомендованы студентам в 2014 году по индивидуальному выбору преподавателя.

Контрольные задания по высшей математике для студентов дневного и заочного факультета.

.

Составители: А.Н. Балашов, Л.А. Валяева, Ю.А. Егоров, А.А. Шум
Под редакцией В.Д. Горячева
Редактор Т.С. Синицына
Издание второе

Подписано к печати 26-XI-2000 г.
Формат 60 × 84 1/16 Бумага оберточная
Физ. печ. л. 2.0 Усл. печ. л. 1.86 Уч.-изд. л. 1.74
Тираж 250 экз. Заказ № 192 С - 720

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной 4–5 см для замечаний рецензента.
2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), название дисциплины, номер контрольной работы; здесь же следует указать название учебного заведения, дату отсылки работы в институт и адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и подпись студента.
3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.
4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.
5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.
6. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
7. После получения прорецензированной работы, как незачтенной, так и зачтенной, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента. Без предъявления прорецензированных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена.

В случае незачета работы и отсутствия прямого указания рецензента о том, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново.

Рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

Крайний срок сдачи контрольных работ – две недели до начала сессии.

Правило определения варианта: если последние две цифры номера зачетной книжки образуют число $x \in (0; 25)$, то ваш вариант соответствует этому числу; если число $x \in (25; 50)$, то ваш вариант $x - 25$; если число $x \in (50; 75)$, то ваш вариант $x - 50$; если число $x \in (75; 99]$, то ваш вариант $x - 75$; если $x = 00$, или $x = 25$, или $x = 50$, или $x = 75$, то ваш вариант 25.

ПРОГРАММА КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И ВОПРОСЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЭКЗАМЕН

I. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

1. Трехмерное пространство $\mathbf{R}^3$. Векторы. Линейные операции над векторами. Линейно независимые системы векторов. Базис.
2. Скалярное произведение векторов и его свойства. Длина вектора. Угол между двумя векторами. Ортогональный базис. Разложение вектора по базису.
3. Определители второго и третьего порядков, их свойства. Алгебраические дополнения и миноры. Определители n–го порядка.
4. Векторное произведение и его свойства. Смешанное произведение.
5. Уравнение плоскости в $\mathbf{R}^3$ (векторная и координатная формы). Уравнения прямой в $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$ (векторная и координатная формы).
6. Система двух и трех линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными. Правило Крамера. Системы m линейных уравнений с n неизвестными. Метод Гаусса–Жордана.
7. Матрицы. Действие с матрицами, обратная матрица. Матричная запись системы линейных уравнений и ее решения. Линейная зависимость и независимость векторов в $\mathbf{R}^n$. Ранг матрицы, его вычисление. Исследование системы линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли.
8. Понятие о линейном операторе как о линейном преобразовании пространства. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.
9. Квадратичные формы. Приведение к каноническому виду.
10. Общее уравнение кривых второго порядка. Канонические формы уравнений эллипса, гиперболы и параболы. Геометрические свойства эллипса, гиперболы и параболы.
11. Поверхности второго порядка. Канонические формы уравнений. Исследование поверхностей второго порядка методом сечений.

II. Введение в математический анализ

12. Множество вещественных чисел. Числовые последовательности. Предел. Верхние и нижние грани множеств. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Число e. Натуральные логарифмы. Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности. Свойства функций, имеющих предел.
13. Непрерывность функции. Непрерывность основных элементарных функций. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства.
14. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые. Их использование при вычислении пределов.
15. Свойства непрерывных в точке функций. Непрерывность суммы, произведения и частного. Предел и непрерывность сложной функции.
16. Односторонние пределы. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва функции и их классификация.
17. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений.

III. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

18. Производная функции, ее геометрический и механический смысл.
19. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций. Функции, заданные параметрически, и их дифференцирование.
20. Гиперболические функции, их свойства и графики. Производные гиперболических функций.
21. Дифференцируемость функции. Дифференциал функции. Связь дифференциала с производной. Геометрический смысл дифференциала. Линеаризация функции. Дифференциал суммы, произведения и частного. Инвариантность формы дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
22. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.
23. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, их применение. Правило Лопиталя.

IV. Исследование функций с помощью производных

24. Условие возрастания и убывания функции. Точки экстремума. Необходимые условия экстремума. Достаточные признаки существования экстремума. Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.
25. Исследование функций на экстремум с помощью производных высшего порядка. Исследование функций на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба. Асимптоты кривых. Общая схема построения графиков функций.

V. Векторные и комплексные функции действительного переменного

26. Векторная функция скалярного аргумента. Производная, ее геометрический и механический смысл.
27. Параметрические уравнения кривой на плоскости и в пространстве. Винтовая линия. Кривизна плоской и пространственной кривой. Эволюта и эвольвента.
28. Комплексные числа. Их изображение на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и показательная формы комплексного числа. Операции над комплексными числами. Формула Муавра.
29. Многочлен в комплексной области. Теорема Безу.
30. Корни многочлена. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители.
31. Комплексные функции действительного переменного, их дифференцирование. Формула Эйлера.

VI. Неопределенный интеграл

32. Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблицы основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой.

33. Интегрирование рациональных функций путем разложения на простейшие дроби. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Интегрирование некоторых иррациональных выражений. Использование таблиц интегралов.

VII. Определенный интеграл

34. Задачи, приводящие к понятию определенных интегралов. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Основные свойства интеграла.
35. Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона–Лейбница.
36. Вычисление определенного интеграла: Интегрирование по частям и подстановкой. Приближенное вычисление определенного интеграла: формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона.
37. Приложение интегралов к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объемов тел и площадей поверхностей вращения. Физические приложения определенного интеграла.
38. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Несобственные интегралы от неограниченных функций, основные свойства. Абсолютная и условная сходимости. Признаки сходимости.

VIII. Дифференциальные уравнения

39. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Понятие об особых решениях дифференциальных уравнений. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах.
40. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка.
41. Линейные дифференциальные уравнения, однородные и неоднородные. Понятие общего решения. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.
42. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения с правой частью специального вида.
43. Системы дифференциальных уравнений. Задача Коши для нормальной системы. Метод исключения. Векторно–матричная запись нормальной системы. Структура общего решения.
44. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение в случае простых корней характеристического уравнения.

IX. Функции нескольких переменных

45. Функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции. Непрерывность.
46. Частные производные. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала.

47. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

48. Неявные функции. Теоремы существования. Дифференцирование неявных функций.

49. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие. Достаточное условие.

50. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

X. Числовые ряды

51. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами.

52. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости.

53. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

54. Ряды с комплексными членами, методы исследования на сходимость.

XI. Функциональные ряды

55. Область сходимости. Понятие равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.

56. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Свойства степенных рядов.

57. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям.

XII. Ряды Фурье и преобразование Фурье

58. Тригонометрическая система функций. Ряд Фурье. Разложение функции в ряд Фурье. Формулировка условий разложимости в случае равномерной сходимости.

59. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье, его свойства и применение.

XIII. Кратные интегралы

60. Задачи, приводящие к понятию кратного интеграла. Двойные и тройные интегралы, их основные свойства. Представление об интегралах любой кратности.

61. Вычисление двойных и тройных интегралов в декартовых координатах.

62. Замена переменных в кратных интегралах. Переход от декартовых координат к полярным, цилиндрическим и сферическим координатам.

63. Применение кратных интегралов для вычисления объемов и площадей, для решения задач механики и физики.

XIV. Криволинейные и поверхностные интегралы

64. Задачи, приводящие к криволинейным интегралам. Определения криволинейных интегралов первого и второго рода, их основные свойства и вычисление. Геомет-

рические и механические приложения. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода. Формула Грина.

65. Площадь поверхности. Определение поверхностных интегралов. Их свойства и вычисление.

XV. Векторный анализ

66. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня скалярного поля. Производная по направлению. Градиент скалярного поля, его координатное и инвариантное определение.

67. Векторное поле. Векторные линии и их дифференциальные уравнения.

68. Односторонние и двусторонние поверхности. Поток векторного поля через поверхность. Физический смысл потока в поле скоростей жидкости. Вычисление потока. Теорема Остроградского.

69. Дивергенция векторного поля, ее инвариантное определение и физический смысл. Вычисление дивергенции. Соленоидальные (трубчатые) поля.

70. Линейный интеграл в векторном поле. Работа силового поля. Циркуляция векторного поля. Теорема Стокса. Ротор поля, его координатное и инвариантное определения. Физический смысл ротора в поле скоростей. Условия независимости линейного интеграла от формы пути интегрирования.

71. Потенциальное поле. Условие потенциальности поля. Вычисление линейного интеграла в потенциальном поле.

72. Оператор Гамильтона. Операции второго порядка в векторном анализе. Оператор Лапласа, его выражение в цилиндрических и сферических координатах.

XVI. Основные уравнения математической физики

73. Уравнение колебаний струны. Решение задачи Коши методом Даламбера, метод разделения переменных.

74. Уравнение теплопроводности. Решение задачи Коши методом преобразования Фурье.

75. Уравнение Лапласа. Решение задач Дирихле в круге методом Фурье.

XVII. Теория вероятностей и математическая статистика

76. Аксиома теории вероятностей. Серии опытов со случайными исходами. Частота. Свойства частот.

77. Определение условной вероятности. Независимость событий. Теорема о полной вероятности. Формулы Байеса. Последовательность независимых испытаний, схема Бернулли. Предельные теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона.

78. Определение случайной величины. Функция распределения случайной величины и ее свойства. Непрерывные и дискретные распределения. Примеры распределений: нормальное, пуассоновское, биноминальное, равномерное, показательное. Совместное распределение нескольких случайных величин. Функции от случайных величин. Независимость случайных величин. Распределение суммы независимых случайных величин.

79. Математическое ожидание, дисперсия и другие моменты случайных величин; их свойства. Ковариация, коэффициент корреляции.

80. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел для последовательности независимых случайных величин. Теорема Чебышева.

81. Математическая статистика. Выборки. Точечные оценки неизвестных параметров распределения по выборке, понятия состоятельности и несмещенности оценок. Понятие о доверительных интервалах и статической проверке гипотез.

82. Элементы корреляционного анализа. Основные свойства регрессии. Уравнение линейной регрессии. Теснота связи и ее оценка по коэффициенту корреляции. Понятие о линейной регрессии. Корреляционное отношение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981, 1985.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1980. ч.1, 2.
3. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1964.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1986.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1970–1985, т. 1, 2.
6. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1982.
7. Гурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979.

Контрольная работа №1

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии.
Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ

Задача 1. Используя теорему Кронекера – Капелли, доказать совместность системы линейных уравнений и решить её двумя способами: 1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

1. $\begin{cases} x + 2y - z = 6, \\ 2x - y + z = 5, \\ -x + 3y + 2z = 5. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -3x + y + 2z = 4, \\ 2x - y - z = -3, \\ 4x + 3y - 3z = 7. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} -2x + 3y + 4z = 11, \\ x - y - 2z = -5, \\ 3x + y - z = 4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2x - y + 5z = 16, \\ 3x + y - 2z = -3, \\ -x - y + z = 1. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} -5x + y + z = 1, \\ 2x - 3y + 2z = 9, \\ 3x + 2y - z = 0. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} -4x + 2y - z = -5, \\ 2x - y + 3z = 5, \\ x + y - 2z = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 8y - 3z = 4, \\ -3x - y + 2z = -5, \\ 2x + 2y - 4z = 6. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} -8x - y + 3z = 10, \\ 3x + 2y - 7z = -8, \\ 2x - y + z = -2. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 7x - 4y + z = 9, \\ 3x + y - z = 8, \\ -2x - 2y + 3z = -9. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + 8y - 3z = 29, \\ -3x - y + 2z = -9, \\ 2x + 2y - 4z = 6. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} -x + y + 2z = 3, \\ 4x - 3y - 3z = 1, \\ 2x + y - z = 9. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} -5x + 6y - 3z = -4, \\ 10x - 2y - 5z = -6, \\ 2x + 5y - 4z = 3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} -7x + 4y + 5z = 8, \\ 2x + y - 2z = 1, \\ 3x - 5y + 6z = -23. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} -4x + 6y + 2z = 30, \\ 9x + 5y - z = -12, \\ -5x - 2y + 11z = 9. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 2x - 9y + 8z = 9, \\ 4x + 3y - 17z = 6, \\ -x + 7y + 3z = 5. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x + 2y - 4z = 12, \\ -4x - 3y + 9z = -2, \\ 3x - y - 2z = -7. \end{cases}$ 17. $\begin{cases} -9x - 5y + 3z = 20, \\ 7x + 6y + 8z = 3, \\ x - 21y - 4z = 12. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x - 2y + 13z = -3, \\ 4x + 3y + 9z = 4, \\ -x + 10y - 6z = -8. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 9x + 5y - z = -5, \\ -7x - 3y + 4z = 20, \\ 5x - 7y + 3z = 15. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 8x - 9y - 2z = 6, \\ 4x + 2y + 3z = 23, \\ -7x - 7y + 4z = 6. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} 2x - 7y + 4z = -5, \\ 7x + 2y - 9z = 39, \\ 3x - y + 2z = 17. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4x + 8y + 3z = 4, \\ 5x - 3y + 2z = -15, \\ 3x + 8y - z = -8. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} 3x - 5y + 2z = 0, \\ -2x + 4y - z = 1, \\ -x - 3y - 7z = 5. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} -2x + 8y - 5z = 9, \\ 3x - 5y - 2z = 15, \\ x + 9y + 3z = -6. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 6x - 5y + z = -3, \\ 3x + y - 2z = 6, \\ -5x + 2y + 3z = 7. \end{cases}$

Задача 2. Даны векторы $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\vec{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$, $\vec{c}\,(c_1;\ c_2;\ c_3)$ и $\vec{d}\,(d_1;\ d_2;\ d_3)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

1. $\vec{a}\,(2;\ 3;\ 1)$, $\vec{b}\,(1;\ 2;\ 4)$, $\vec{c}\,(3;\ 1;\ 2)$, $\vec{d}\,(5;\ 4;\ 3)$.
2. $\vec{a}\,(5;\ 4;\ 2)$, $\vec{b}\,(3;\ 2;\ 1)$, $\vec{c}\,(1;\ 5;\ 4)$, $\vec{d}\,(13;\ 10;\ 5)$.
3. $\vec{a}\,(5;\ 4;\ 3)$, $\vec{b}\,(4;\ 5;\ 2)$, $\vec{c}\,(3;\ 2;\ 4)$, $\vec{d}\,(18;\ 14;\ 13)$.
4. $\vec{a}\,(4;\ 2;\ 1)$, $\vec{b}\,(2;\ 1;\ 3)$, $\vec{c}\,(1;\ 3;\ 2)$, $\vec{d}\,(19;\ 12;\ 9)$.
5. $\vec{a}\,(5;\ 3;\ 1)$, $\vec{b}\,(4;\ 5;\ 3)$, $\vec{c}\,(3;\ 4;\ 2)$, $\vec{d}\,(24;\ 14;\ 4)$.
6. $\vec{a}\,(5;\ 4;\ 1)$, $\vec{b}\,(2;\ 1;\ 4)$, $\vec{c}\,(4;\ 3;\ 5)$, $\vec{d}\,(26;\ 21;\ 1)$.
7. $\vec{a}\,(6;\ 5;\ 2)$, $\vec{b}\,(4;\ 3;\ 5)$, $\vec{c}\,(5;\ 4;\ 3)$, $\vec{d}\,(33;\ 28;\ 6)$.
8. $\vec{a}\,(6;\ 5;\ 3)$, $\vec{b}\,(5;\ 4;\ 2)$, $\vec{c}\,(3;\ 2;\ 4)$, $\vec{d}\,(41;\ 34;\ 24)$.
9. $\vec{a}\,(6;\ 2;\ 1)$, $\vec{b}\,(5;\ 3;\ 4)$, $\vec{c}\,(3;\ 5;\ 2)$, $\vec{d}\,(52;\ 20;\ 7)$.
10. $\vec{a}\,(6;\ 3;\ 1)$, $\vec{b}\,(4;\ 1;\ 5)$, $\vec{c}\,(5;\ 2;\ 4)$, $\vec{d}\,(51;\ 27;\ 1)$.
11. $\vec{a}\,(0;\ -1;\ 2)$, $\vec{b}\,(3;\ 1;\ 1)$, $\vec{c}\,(-2;\ 0;\ -1)$, $\vec{d}\,(3;\ -3;\ 6)$.
12. $\vec{a}\,(-1;\ 4;\ -3)$, $\vec{b}\,(1;\ 1;\ 1)$, $\vec{c}\,(6;\ 0;\ -2)$, $\vec{d}\,(7;\ 20;\ -19)$.
13. $\vec{a}\,(2;\ 3;\ -1)$, $\vec{b}\,(1;\ -1;\ 2)$, $\vec{c}\,(-3;\ 4;\ 0)$, $\vec{d}\,(5;\ -12;\ 3)$.
14. $\vec{a}\,(2;\ -1;\ 3)$, $\vec{b}\,(-1;\ -1;\ -1)$, $\vec{c}\,(4;\ -4;\ 5)$, $\vec{d}\,(8;\ -3;\ 10)$.
15. $\vec{a}\,(1;\ 1;\ 1)$, $\vec{b}\,(-2;\ -3;\ 2)$, $\vec{c}\,(-1;\ 2;\ 4)$, $\vec{d}\,(-7;\ -21;\ -2)$.
16. $\vec{a}\,(1;\ -2;\ 5)$, $\vec{b}\,(-2;\ 3;\ 4)$, $\vec{c}\,(-1;\ 2;\ 7)$, $\vec{d}\,(9;\ -16;\ 5)$.
17. $\vec{a}\,(0;\ -1;\ -4)$, $\vec{b}\,(1;\ 1;\ 1)$, $\vec{c}\,(2;\ -3;\ 5)$, $\vec{d}\,(4;\ 4;\ 27)$.
18. $\vec{a}\,(2;\ -2;\ 3)$, $\vec{b}\,(3;\ 1;\ 7)$, $\vec{c}\,(-1;\ 2;\ 3)$, $\vec{d}\,(12;\ -4;\ 23)$.
19. $\vec{a}\,(2;\ -3;\ 3)$, $\vec{b}\,(-1;\ 5;\ 0)$, $\vec{c}\,(2;\ 3;\ -8)$, $\vec{d}\,(8;\ 7;\ -7)$.
20. $\vec{a}\,(-5;\ 3;\ -2)$, $\vec{b}\,(4;\ -1;\ 3)$, $\vec{c}\,(-3;\ 2;\ -2)$, $\vec{d}\,(-11;\ 10;\ -4)$.
21. $\vec{a}\,(4;\ 1;\ -8)$, $\vec{b}\,(3;\ -2;\ -9)$, $\vec{c}\,(2;\ 7;\ 4)$, $\vec{d}\,(-2;\ 8;\ 16)$.
22. $\vec{a}\,(2;\ -3;\ 5)$, $\vec{b}\,(1;\ 2;\ -3)$, $\vec{c}\,(2;\ -3;\ 1)$, $\vec{d}\,(2;\ -10;\ -4)$.
23. $\vec{a}\,(1;\ 3;\ -4)$, $\vec{b}\,(2;\ -5;\ 4)$, $\vec{c}\,(-3;\ 2;\ -1)$, $\vec{d}\,(4;\ 1;\ -9)$.
24. $\vec{a}\,(-4;\ 3;\ 1)$, $\vec{b}\,(2;\ -4;\ -3)$, $\vec{c}\,(1;\ 3;\ 2)$, $\vec{d}\,(-5;\ 10;\ 0)$.
25. $\vec{a}\,(5;\ -1;\ 2)$, $\vec{b}\,(-2;\ 3;\ -1)$, $\vec{c}\,(2;\ 1;\ 1)$, $\vec{d}\,(7;\ 0;\ 3)$.

Задача 3. Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(a_1;\ a_2;\ a_3)$, $B(в_1;\ в_2;\ в_3)$, $C(c_1;\ c_2;\ c_3)$ и $D(d_1;\ d_2;\ d_3)$. Найти: 1) уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно медиане, проведенной из вершины B треугольника ABC; 2) координаты точки пересечения медиан треугольника ABC; 3) координаты точки, симметричной точке A относительно плоскости BCD. Сделать чертёж.

1. $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(6;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 6;\ 1)$, $D(2;\ 2;\ -1)$.
2. $A(1;\ -2;\ 2)$, $B(6;\ 3;\ 2)$, $C(2;\ 5;\ 2)$, $D(1;\ 3;\ 3)$.
3. $A(4;\ -2;\ 0)$, $B(7;\ -6;\ 0)$, $C(7;\ 2;\ 0)$, $D(3;\ 2;\ 1)$.
4. $A(1;\ 4;\ -1)$, $B(-4;\ -2;\ -1)$, $C(0;\ -2;\ -1)$, $D(-1;\ -2;\ -2)$.
5. $A(1;\ 2;\ -2)$, $B(-7;\ -3;\ -2)$, $C(-3;\ 2;\ -2)$, $D(-3;\ 2;\ 0)$.

6. A(-1; -1; 3), B(2; 1; 3), C(6; 3; 3), D(2; -2; 1).
7. A(5; 7; -3), B(0; -3; -3), C(4; -1; -3), D(-4; -3; 1).
8. A(-1; 5; 1), B(3; -6; 1), C(7; -2; 1), D(3; 4; -4).
9. A(-2; 1; 4), B(2; 2; 4), C(0; 6; 4), D(2; 1; 3).
10. A(-2; -1; -4), B(2; 0; -4), C(0; 4; -4), D(-6; -2; 5).
11. A(4; 2; 5), B(-3; -3; 5), C(-1; 1; 5), D(2; -3; -5).
12. A(-2; 4; 0), B(2; 2; 0), C(6; -6; 0), D(-1; 4; 4).
13. A(2; 5; -1), B(-2; 1; -1), C(0; -3; -1), D(-2; -5; 5).
14. A(-2; -3; -5), B(6; 0; -5), C(8; 6; -5), D(-2; -4; 5).
15. A(1; 3; -3), B(-6; -7; -3), C(2; -5; -3), D(-2; -3; -1).
16. A(-4; 4; 5), B(1; 3; 5), C(3; -1; 5), D(-3; 2; -4).
17. A(4; 3; 2), B(-1; 1; 2), C(3; 1; 2), D(5; 1; -3).
18. A(-2; 3; 0), B(0; -2; 0), C(2; 2; 0), D(-2; -4; -1).
19. A(0; 0; 1), B(4; 3; 1), C(8; 3; 1), D(1; 3; 4).
20. A(7; 2; -6), B(-6; -4; -6), C(-4; 2; -6), D(0; 6; 2).
21. A(1; -3; 1), B(-4; 2; 1), C(0; 4; 1), D(-6; -4; -1).
22. A(1; -1; 3), B(-3; 0; 3), C(-1; 4; 3), D(-1; 6; 4).
23. A(-4; -1; -1), B(3; -2; -1), C(7; 6; -1), D(1; -2; 3).
24. A(-3; 1; 2), B(4; -4; 2), C(2; 0; 2), D(-2; 4; 6).
25. A(3; 3; -1), B(2; -1; -1), C(-2; -5; -1), D(-5; -4; 1).

Задача 4. Линия задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ и придавая φ значения через промежуток $\pi/8$; 2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью, привести его к каноническому виду; 3) по уравнению в декартовой прямоугольной системе координат определить, какая это линия.

1. $r = 3/(1 + 2\cos\varphi)$.
2. $r = 2/(1 + \cos\varphi)$.
3. $r = 3/(1 - \cos\varphi)$.
4. $r = 1/(2 - \cos\varphi)$.
5. $r = 4/(1 + 3\cos\varphi)$.
6. $r = 4/(2 + 3\cos\varphi)$.
7. $r = 2/(4 - \cos\varphi)$.
8. $r = 5/(1 - 7\cos\varphi)$.
9. $r = 6/(4 + 2\cos\varphi)$.
10. $r = 14/(6 + \cos\varphi)$.
11. $r = 3/(1 - 2\cos\varphi)$.
12. $r = 1/(3 + 3\cos\varphi)$.
13. $r = 3/(2 - 2\cos\varphi)$.
14. $r = 1/(2 - 5\cos\varphi)$.
15. $r = 6/(4 - \cos\varphi)$.
16. $r = 21/(4 + 3\cos\varphi)$.
17. $r = 3/(4 + 5\cos\varphi)$.
18. $r = 10/(5 - 6\cos\varphi)$.
19. $r = 12/(1 + 4\cos\varphi)$.
20. $r = 8/(6 - 3\cos\varphi)$.
21. $r = 4/(5 - 5\cos\varphi)$.
22. $r = 7/(6 + 6\cos\varphi)$.
23. $r = 12/(4 + 2\cos\varphi)$.
24. $r = 9/(6 + 4\cos\varphi)$.
25. $r = 10/(6 + 3\cos\varphi)$.

Задача 5. Задана функция $y = f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

1. $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 1; \\ 1, & x = 1; \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & x < 1; \\ 4 - 2x, & 1 < x < 2{,}5; \\ 2x - 7, & x \ge 2{,}5. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}2\cos x, & -\pi\le x<\pi;\\ 1, & x=\pi;\\ (x-\pi)^2+2, & x>\pi.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}\mathrm{arctg}\,x, & x<0;\\ \arccos x, & 0\le x<1;\\ x-1, & x\ge 1.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}3^{x-1}, & x<2;\\ -2x+6, & 2\le x<3;\\ 3^{-x+3}-1, & x>3.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x<5;\\ (x-4)^2+1, & 5<x<6;\\ 2, & x\ge 6.\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}x+4, & x<-3;\\ x^2+2x, & -3\le x<0;\\ -\ln(x+1), & x\ge 0.\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}(x+1)^3-1, & x\le 1;\\ (2-x)^2+1, & 1<x<4;\\ 5, & x\ge 4.\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}-0{,}5x^2+1, & x\le 0;\\ x\ln x, & 0<x\le 1;\\ 1/x, & x>1.\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}\mathrm{arctg}\,x, & x\le 0;\\ x-1, & 0<x<3;\\ (3-x)^3+2, & 3\le x\le 5.\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0;\\ x\,\mathrm{ctg}\,x, & 0<x\le \pi/2;\\ -x+5, & \pi/2<x\le 6.\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<-1;\\ |x|, & -1<x<1;\\ (1-x)^3, & 1\le x\le 3.\end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\le 0;\\ \log_2 x, & 0<x<2;\\ 0{,}5x, & x\ge 2.\end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le -2;\\ x^2+2x, & -2<x<1;\\ -2\log_4 x, & 1\le x\le 4.\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x<0;\\ -\sin x, & 0\le x<\pi;\\ x-5, & x\ge\pi.\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le -1;\\ \arccos x, & -1<x<1;\\ (x-1)^2, & x\ge 1.\end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases}-3, & x<-1;\\ 3\arcsin x, & -1\le x<0;\\ -x+4, & x\ge 0.\end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases}(x+\pi)^2, & x\le -\pi;\\ \sin^2 x, & -\pi<x<\pi;\\ (x-\pi)^3+1, & x\ge\pi.\end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x\le 1;\\ \ln(x-1), & 1<x\le 2;\\ x^2-6x+8, & x>2.\end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases}|x+3|-1, & x\le -2;\\ -0{,}5x-1, & -2<x<0;\\ |2x-2|-2, & x\ge 0.\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases}2(x+1)^2, & x<-1;\\ -x+1, & -1\le x<1;\\ 4x-x^2-3, & x>1.\end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases}\ln|x|, & x<0;\\ x-2, & 0\le x<1;\\ \ln x, & x\ge 1.\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le -1;\\ 2-x^2, & -1<x<2;\\ -x, & x\ge 2.\end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases}x+3, & x<0;\\ 2, & x=0;\\ xe^{-x}, & x>0.\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}\mathrm{arctg}\,x, & x<1;\\ \arcsin(x-1), & 1\le x\le 2;\\ \pi x/4, & x>2.\end{cases}$

Задача 6. Найти пределы функций.

1. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-3}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{ctg}\,3x$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-2)[\ln x-\ln(x+1)]$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{ctg}^4\,2x}{\mathrm{ctg}^4\,4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{-\mathrm{tg}\,x}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty} x[\ln x-\ln(x+2)]$.

3. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\,\mathrm{ctg}\,\pi x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x^2)^{\mathrm{ctg}\,x}$; г) $\lim\limits_{x\to 5}(x-4)^{\frac{3x}{x-5}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^7-x^3+1}{x(x^3-2)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1+\sin 3x}{\mathrm{tg}\,2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\cos x)^{\ln x}$; г) $\lim\limits_{x\to \pi}(1+\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{ctg}\,x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x(\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{ctg}\,3x)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1+0}(x^2-1)^{\sin \pi x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{2/x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-2x+4}{2x^2-x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{\sin \pi x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0+0}(e^x-e^{-x})^x$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{2x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^4-3x+1}{1-2x+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\arcsin x)^x$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(15-7x)^{\frac{1}{x-2}}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x^3-2x+1}{(3-x)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{ctg}\,x-1}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{x+1}{x-3}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{3-\sqrt{3x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\,\mathrm{ctg}\,\pi x$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{1/x}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{3x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-6x^2+9x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\mathrm{ctg}\,x)^{\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^4+2x^2}{x^4-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x\,\mathrm{tg}\,x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

12. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-x-x^4}{\sin x+4x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{ctg}\,2x$; в) $\lim\limits_{x\to 1+0}(x^2-1)^{1-x}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^x$.

13. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-5x}{(3x+2)^4}$; б) $\lim\limits_{x\to2\pi}\left(\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}-\dfrac{2\pi}{\sin x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^x$.

14. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^6-5x}{(2x^3+1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\operatorname{tg}^2 x}$; в) $\lim\limits_{x\to0+0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1-x}{x}}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^4-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^3 3x}{\operatorname{tg}^3 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$; г) $\lim\limits_{x\to1}(4x-3)^{\frac{x}{x-1}}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2(x)-1}{x\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg}x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to0+0}x^{\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{2x}{x-2}}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{7-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin 4x}{x^2+1}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$; г) $\lim\limits_{x\to0}(1-2\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+x-1}{4x^4-5x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin 2x}{\sin 3x-\sin 4x}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to4}(5-x)^{\frac{2x}{x-4}}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x^6+1}{(2x^2-2)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(x-\pi)^2}{\operatorname{tg}^2 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to0+0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)^x$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{5x}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{5}{x^5-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{ctg}2x}{\operatorname{ctg}5x}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\sqrt[\sin\pi x]{x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{x+2}{5x}}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^4-x+7}{(x^2-x)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{\operatorname{tg}2x}$; в) $\lim\limits_{x\to0+0}x^{\arcsin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to3}(4-x)^{\frac{x}{x-3}}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{\sin(x-3)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3 x}{\operatorname{tg}^3 5x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}e^{x\operatorname{ctg}4x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{2-x}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)\sin x}{2x-1-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{7x}$; в) $\lim\limits_{x\to0+0}x\ln\sin x$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-x}{3-x}\right)^{5x}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(x-1)^4}{(x+1)^5}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\arcsin x}$; в) $\lim\limits_{x\to0+0}(\operatorname{arctg}x)^x$; г) $\lim\limits_{x\to0}(1+4x)^{\frac{x+1}{7x}}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-x+2}{4-x^2+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{x\sin 5x}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x^5}$; г) $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}$.

Контрольная работа № 2

Производная и ее приложение. Приложения дифференциального исчисления

<u>Задача 7.</u> Найти производные *dy/dx* данных функций.

1. а) $y=\dfrac{5x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $y=\operatorname{tg}^2\dfrac{1}{x^2}\cdot\arcsin\sqrt{2-x}$;

в) $y=(\sin x)^{\ln x}$; г) $\operatorname{tg}(x-y)-xy^2=5$.

2. а) $y=\dfrac{(x+1)\sqrt{3x-1}}{3x+1}$; б) $y=\cos^3\left(\sqrt{x-4}\right)\cdot\ln^2(2x-1)$;

в) $y=(\cos 2x)^{\operatorname{ch} x}$; г) $x\cos y+y\sin x=x+y$.

3. а) $y=\dfrac{5x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^3+1}}$; б) $y=\ln^4(x+1)\cdot\sin^4(2/\sqrt{x})$;

в) $y=(x^2+2)^{x^2}$; г) $\ln(x^2+y)-\arcsin xy=1$.

4. а) $y=\dfrac{5x}{(x+3)\sqrt{x^2+x-1}}$; б) $y=e^{x^2-x}\sin^3 4x$;

в) $y=(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} 2x}$; г) $\operatorname{arctg}(x+y)=x\cos y^3$.

5. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}}$; б) $y=\arcsin^2(3^{4x}/x)$;

в) $y=(x^2+1)^{4x}$; г) $y-\sqrt{x^2+y}=\sin(xy)$.

6. а) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x^3+x^2+1}{x+1}}$; б) $y=\operatorname{tg}^2 x+\ln\cos^2(4x)$;

в) $y=(x\cos x)^{\sin x}$; г) $\arccos(x/y)+\ln(x-y)=x$.

7. а) $y=\dfrac{(x+1)(x^2+2)}{\sqrt{3x+1}}$; б) $y=\sin^4\left(\sqrt{x}\right)\cdot 4^{-2x}$;

в) $y=(x^4+x)^{\operatorname{th} x}$; г) $x\operatorname{tg} y-y\operatorname{ctg} x=yx$.

8. а) $y=\dfrac{(x^2-4)\sqrt{x+1}}{2x^4-1}$; б) $y=3^{\sqrt{x+1}}\operatorname{ctg}^3(x^{-1})$;

в) $y=(\sin x)^{\ln\sin x}$; г) $\ln(x+y)-x\ln y=4$.

9. а) $y=\dfrac{3x^2\sqrt{x+1}}{x^4-1}$; б) $y=\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{1-x^2}\right)\cdot 5^x$;

в) $y=(\operatorname{sh} x)^{2+\operatorname{ch} 2x}$; г) $x^4+y^2-x\operatorname{sh} y=\sin y$.

10. а) $y=\dfrac{x^3}{(x^4-1)\sqrt{x+1}}$; б) $y=6^{\cos 3x}\ln(x/\sin x)$;

в) $y=(\operatorname{arcctg} x^2)^{\sqrt{x}}$; г) $\ln(\sin x+\cos y)=x-y$.

11. а) $y=\dfrac{(x^3+5)\sqrt[3]{1-x}}{(x-1)(x^2+3)}$; б) $y=4^{5x}\arcsin^2 3x$;

в) $y=(x^2+1)^{\operatorname{tg} x}$; г) $x\sin y=y\sin x$.

12. а) $y=\dfrac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt[3]{x+1}}{x^4(2-x)}$; б) $y=\sin^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$;

в) $y=(\log_5 x)^{\ln x}$; г) $2^{xy}=(xy)^2$.

13. а) $y = \dfrac{x^2(x^3+1)}{(x^5-1)^3}$; б) $y = x^4 \operatorname{tg}^2(x+4)$;

в) $y = x^{\operatorname{ctg} x}$; г) $\arcsin(xy) - \arccos(xy) = y$.

14. а) $y = \dfrac{x \sin^5 x}{x^3-1}$; б) $y = (x^2-1)\operatorname{arcctg}^3 x$;

в) $y = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$; г) $\operatorname{arctg}(x/y) = y/x$.

15. а) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x-1)}{x^2+1}}$; б) $y = \sin x \cdot \operatorname{ctg}^2(8x)$;

в) $y = (\ln x)^x$; г) $\cos(x+y) = x \operatorname{tg} y$.

16. а) $y = \dfrac{(1+x^2)x}{\sqrt{1-3x}}$; б) $y = 7^{\cos 7x} \operatorname{ctg}^2(x-x^2)$;

в) $y = (x^2+1)^{4x}$; г) $x^4 + y^4 = \operatorname{ctg}(x^2+y^2)$.

17. а) $y = \dfrac{x^3(2x-1)}{(x^2-1)^5}$; б) $y = \ln^3(x^2-1) \cdot \operatorname{arcctg} x$;

в) $y = (x^2-2)^{\operatorname{ctg} 2x}$; г) $xy - \sin(y-x) = x$.

18. а) $y = \sqrt[4]{\dfrac{(3x+2)x}{(8-x)^5}}$; б) $y = e^{1-x} \cos(x^2-1)$;

в) $y = (\log_4 x)^{\sin 4x}$; г) $\operatorname{arctg}(xy) = \operatorname{arcctg}(x/y)$.

19. а) $y = \dfrac{(x^5-4)\sqrt{x}}{x(4-x^3)}$; б) $y = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\log_2(2x)$;

в) $y = (\arccos 2x)^{\sqrt{x}}$; г) $\operatorname{tg}(x^2-y^2) = 2\cos(x+y)$.

20. а) $y = \dfrac{x^2+4}{\sqrt{x(x-2)}}$; б) $y = e^{\sqrt{x}} \sin^2 \sqrt{x}$;

в) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$; г) $5^{xy} = \sin(y/x)$.

21. а) $y = \sqrt[8]{\dfrac{x^3(3x-1)^5}{(3x-4)^4}}$; б) $y = \ln^3(x) \cdot \cos^4\left(5x^2\right)$;

в) $y = (x \sin x)^{\sin x}$; г) $x \arcsin y = y \arccos x$.

22. а) $y = \dfrac{x^5-8x}{\sqrt{(3-x)^3}}$; б) $y = \operatorname{ctg} 5x \cdot \sqrt{\ln(2x)}$;

в) $y = (\ln x)^{\ln x}$; г) $x^3 y^4 = \operatorname{arctg}(xy+4)$.

23. а) $y = \dfrac{x\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{x^3-1}}$; б) $y = 5^{-2x} \cos^4 x$;

в) $y = x^{3x} 5^x$; г) $y \operatorname{tg} x + x \operatorname{ctg} y = x + y$.

24. а) $y = \dfrac{(x+5)\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^4 - 1}}$; б) $y = \log_4(3x-1)\cdot\arcsin(5x)$;

в) $y = (x^2+1)^{\mathrm{arctg}\,x}$; г) $y^4 x^4 = x^2 + y^2$.

25. а) $y = \dfrac{(x-2)\sqrt{3x+1}}{\sqrt[5]{1-x^3}}$; б) $y = 7^{-x+2}\cos^7(3x)$;

в) $y = (\cos x)^{\cos x}$; г) $\cos^2(x+y) = \sin(xy)$.

<u>Задача 8.</u> Найти dy/dx и d^2y/dx^2 для заданных функций: а) $y = f(x)$; б) $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

1. а) $y = x^4 \ln x$; б) $x = t + \sin t,\ y = \cos 2t$.
2. а) $y = x^2\,\mathrm{arctg}\,x$; б) $x = \mathrm{tg}\,t,\ \ y = 1/\sin t$.
3. а) $y = x\,\mathrm{arcctg}\,x$; б) $x = \mathrm{sh}\,t,\ \ y = \mathrm{ch}\,t + t^2$.
4. а) $y = \ln \mathrm{tg}\,4x$; б) $x = 2t + t^2,\ \ y = 4t^3$.
5. а) $y = 4^x \sin 2x$; б) $x = \cos t,\ \ y = \ln\sin t$.
6. а) $y = x\sqrt{1-x^2}$; б) $x = e^t,\ \ y = \arccos t$.
7. а) $y = x^2 e^{-x}$; б) $x = \cos t + t\sin t,\ y = t\cos t$.
8. а) $y = \sin(x^3+1)$; б) $x = \mathrm{arctg}\,t,\ \ y = t^3$.
9. а) $y = \mathrm{tg}\sin x$; б) $x = \ln\cos t,\ y = t - \ln\sin t$.
10. а) $y = x/\sin^2 x$; б) $x = t^4 + t,\ y = t^4 - t$.
11. а) $y = x\sqrt{1+x^2}$; б) $x = \cos^2 t,\ y = \sin^2 t$.
12. а) $y = e^{\cos 3x}$; б) $x = t^2,\ y = t^3 - t$.
13. а) $y = \mathrm{tg}^2(1-x)$; б) $x = \sin^3 t,\ y = \cos^3 t$.
14. а) $y = e^{\mathrm{tg}\,5x}$; б) $x = \mathrm{arctg}\,t,\ y = t^2$.
15. а) $y = x^2\cdot\mathrm{arctg}\,2x$; б) $x = 2t - \sin t,\ y = 2 + \cos t$.
16. а) $y = x^3/(x+1)$; б) $x = \ln t,\ y = \mathrm{arctg}\,t$.
17. а) $y = \sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x$; б) $x = e^t,\ y = te^{2t}$.
18. а) $y = x^3\cdot\cos 3x$; б) $x = t^3 + t,\ y = t^3 - t$.
19. а) $y = \ln x\cdot\sin x$; б) $x = \sin 2t,\ y = \cos 2t$.
20. а) $y = x\cdot\mathrm{tg}\,x$; б) $x = e^t\sin t,\ y = e^t\cos t$.
21. а) $y = x^2/\sin x$; б) $x = \mathrm{arctg}\,t,\ y = 1/t$.
22. а) $y = \sin x\cdot\mathrm{arctg}\,x$; б) $x = (t^2-4),\ y = \ln t$.
23. а) $y = e^{2x}\cos x$; б) $x = \mathrm{tg}\,t,\ y = 1/\cos t$.
24. а) $y = x^2\arcsin x$; б) $x = e^{\sin 2t},\ y = e^{\cos 2t}$.

25. а) $y=\sqrt{x^2-1}$;   б) $x=\sin^2 t,\ y=\mathrm{ctg}^2 t$.

Задача 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

1. $f(x) = x^4 + 8x^3 - 0{,}5x^2 - 6x + 2$, $[-3; 1]$.
2. $f(x) = (\cos x + 1)e^x$, $[-\pi; \pi]$.
3. $f(x) = 0{,}25x^4 + x^3 - 2x^2 - 12x + 3$, $[-4; 1]$.
4. $f(x) = \sin^2 x + \cos x$, $[0; 2\pi]$.
5. $f(x) = 0{,}25x^4 + 3x^3 + 13x^2 + 24x$, $[-5; -3]$.
6. $f(x) = x/(1 + x^2)$, $[0; 2]$.
7. $f(x) = 0{,}25x^4 + x^3 - 5x^2 - 24x + 4$, $[-5; 2]$.
8. $f(x) = x^2 e^{-x}$, $[-1; 3]$.
9. $f(x) = 1{,}5x^4 - x^3 + 15x^2 - 15x + 2$, $[-2; 1]$.
10. $f(x) = x - 2\sqrt{x}$, $[0; 4]$.
11. $f(x) = \mathrm{tg}^2 x - \cos x$, $[3\pi/4; 5\pi/4]$.
12. $f(x) = 36/(1 - x) + x^2$, $[-3; 0]$.
13. $f(x) = (x^3 - 4)e^x$, $[-1; 2]$.
14. $f(x) = x \cos x$, $[\pi/2; \pi]$.
15. $f(x) = x \sin x$, $[-\pi/2; \pi/2]$.
16. $f(x) = (x^3 - 4)e^x$, $[-3; 0]$.
17. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + x^3$, $[-4\pi; 4\pi]$.
18. $f(x) = 8/(1+ x) + x^2$, $[0; 3]$.
19. $f(x) = (\sin x - 1)e^x$, $[-\pi; \pi]$.
20. $f(x) = x^3 - 3 \sin x$, $[-3\pi; 3\pi]$.
21. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 12x^2 - 36x$, $[-1; 4]$.
22. $f(x) = 2x^5 - 5x^2 + 8$, $[-2; 2]$.
23. $f(x) = x\,\mathrm{arctg}\,x - 0{,}5\ln(x^2 + 1)$, $[-1; 1]$.
24. $f(x) = (x^2 - 1)/(1 + x^2)$, $[-2; 2]$
25. $f(x) = \mathrm{arctg}[(1- x)/(1+ x)]$, $[0; 1]$.

Задача 10. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

1. $y = 2x/(4 - x^2)$.
2. $y = 3x^3/(x^3 - 8)$.
3. $y = (x^4 + x^2)/(x^4 - 1)$.
4. $y = 5x^2/(x^2 - 2x - 3)$.
5. $y = -x/(x^2 - 5x + 4)$.
6. $y = x^3/(x^2 + x - 6)$.
7. $y = (1 - 3x^2)/(x^2 - 9)$.
8. $y = x^3/(16 - x^4)$.
9. $y = x + x/(x - 2)$.
10. $y = x^2 + x^3/(1 - x)$.
11. $y = xe^{-x}$.
12. $y = xe^{-1/(x - 4)}$.
13. $y = \ln(16 - x^2)$.
14. $y = (4x^2 + 2x)\, e^{2x-1}$.
15. $y = \ln(x^2 + x)$.
16. $y = x^2/e^{2x}$.
17. $y = x - 3\ln x$.
18. $y = e^x/(1 + x)^3$.
19. $y = e^x/(x^2 - 3)$.
20. $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$.
21. $y = x^2 \ln x$.
22. $y = (x - 4)e^{-2x}$.
23. $y = 2/(x^2 + x - 6)$.
24. $y = x^2/(x - 1)$.
25. $y = 4x/(x - 2)^2$.

Задача 11.

1. В прямоугольном листе картона длиной 48 *см* и шириной 30 *см* вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивается открытая прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезанных квадратов, чтобы объем коробки был наибольшим?
2. Из данного круга вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить конус с наибольшим объемом.
3. Завод расположен на расстоянии 10 *км* от железной дороги, идущей в город, и на расстоянии 100 *км* от этого города. Под каким углом к железной дороге следует провести шоссе с завода, чтобы доставка грузов из завода в город была наиболее дешевой, если стоимость перевозок по шоссе в 2 раза дороже, чем по железной дороге?
4. Шар свободно скатывается по наклонной плоскости. Если горизонтальное основание наклонной плоскости остается неизменным, то каков должен быть угол наклона, чтобы время скатывания шара было наименьшим?

5. Водный канал должен иметь заданную глубину и заданную площадь поперечного сечения. Если поперечное сечение есть равнобочная трапеция, то каким должен быть угол наклона ее боковых сторон, чтобы при движении воды по каналу потери на сопротивление трения были наименьшими.

6. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен a. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

7. Из круглого бревна, диаметр которого равен 16 *см*, требуется вырезать балку прямоугольного поперечного сечения. Каковы должны быть ширина и высота этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление на изгиб? Сопротивление балки на изгиб пропорционально ширине и квадрату высоты.

8. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема V. Стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление дна бака, равна x *руб*., а стенок – y *руб*. Каковы должны быть радиус дна и высота бака, чтобы затраты на материал для изготовления были наименьшими?

9. Выбрать место для постройки моста через реку, текущую вдоль прямой, чтобы длина дороги между пунктами A и B, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшей. Расстояние от A до реки равно 2,4 *км*, от B – 7,2 *км*, $AB = 26$ *км*. Ширина реки 400 *м*.

10. Груз весом 300 *кг*, лежащий на горизонтальной плоскости, нужно сдвинуть приложенной к нему силой. Под каким углом α к горизонту нужно направить силу, чтобы она была наименьшей. Коэффициент трения $\mu = 0{,}2$.

11. Резервуар, который должен иметь квадратное дно и быть открытым сверху, нужно выложить внутри свинцом. Каковы должны быть размеры резервуара емкостью 108 *л*, чтобы выкладка требовала наименьшего количества свинца?

12. Требуется изготовить цилиндр, открытый сверху, стенки и дно которого имеют толщину 0,5 *см*. Каковы должны быть размеры цилиндра емкостью 512 *л*, чтобы при данной вместимости на него пошло наименьшее количество материала?

13. Чтобы по возможности уменьшить трение жидкости о стенки канала, площадь, смачиваемая водой, должна быть наименьшей. Показать, что лучшей формой открытого прямоугольного канала с заданной площадью поперечного сечения является такая, при которой ширина канала вдвое превышает его высоту.

14. Из полукруга радиусом 10 *см* вырезают равнобочную трапецию. Определить угол трапеции при основании так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

15. Одна сторона прямоугольного участка земли примыкает к берегу канала, а три другие огораживаются забором. Каковы должны быть размеры этого участка, чтобы его площадь составляла 800 $м^2$, а длина забора была наименьшей?

16. От канала шириной 4 *м* отходит под прямым углом другой канал шириной 2 *м*. Какой наибольшей длины бревна можно сплавлять по этим каналам из одного в другой (не учитывая толщины бревен)?

17. По двум улицам движутся к перекрестку две машины с постоянными скоростями 40 и 50 *км/ч*. Улицы пересекаются под углом 60°. В начальный момент времени машины находятся на расстоянии 5 и 4 *км* от перекрестка (соответственно). Через какое время расстояние между ними станет наименьшим?

18. Решеткой длиной 120 *м* нужно огородить с трех сторон прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры прямоугольной площадки?

19. На прямой между двумя источниками света силы F_1 и F_2 найдите наименее освещенную точку, если расстояние между источниками света 24 *м*. (Освещенность точки обратно пропорциональна квадрату расстояний ее от источника света.)

20. Расходы на топливо для парохода делятся на две части. Первая из них не зависит от скорости и равна 480 рублям в час. А вторая часть расходов пропорциональна кубу скорости, причем при скорости 10 *км/ч* эта часть расходов равна 30 рублям в час. Требуется определить, при какой скорости общая сумма расходов на 1 *км* пути будет наименьшей.

21. Два коридора шириной 2,4 *м* и 1,6 *м* пересекаются под прямым углом. Определить наибольшую длину лестницы, которую можно перенести (горизонтально) из одного коридора в другой.

22. Прямоугольник вписан в эллипс с осями $2a$ и $2b$. Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

23. Найти радиус основания и высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

24. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

25. Равнобедренный треугольник, вписанный в окружность радиуса R, вращается вокруг прямой, которая проходит через его вершину параллельно основанию. Какова должна быть высота этого треугольника, чтобы тело, полученное в результате его вращения, имело наибольший объем?

Задача 12. Найти уравнение касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии $r = r(t)$ в точке t_o.

1. $r(t) = t^2\,\vec{i} + (1 - t^3)\,\vec{j} + (3t - 4)\,\vec{k}$; $t_o = 1$.
2. $r(t) = \sin\pi t\,\vec{i} + (\cos\pi t - 1)\,\vec{j} + t^2\vec{k}$; $t_o = 1$.
3. $r(t) = e^t\,\vec{i} + (t^2 + 2t)\,\vec{j} + (e^t - e^{-t})\vec{k}$; $t_o = 0$.
4. $r(t) = te^t\,\vec{i} + (e^t + t)\,\vec{j} + (t^2 - e^t)\vec{k}$; $t_o = 0$.
5. $r(t) = (e^t - t)\vec{i} + (t + e^t)\,\vec{j} + e^{-2t}\vec{k}$; $t_o = 1$.
6. $r(t) = e^t\sin t\,\vec{i} + e^t\cos t\,\vec{j} - e^t\,\vec{k}$; $t_o = 0$.
7. $r(t) = \sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + 2t\vec{k}$; $t_o = \pi/4$.
8. $r(t) = \sin^2 t\,\vec{i} + \cos^2 t\,\vec{j} + t\vec{k}$; $t_o = \pi/2$.
9. $r(t) = \sin t\,\vec{i} + \mathrm{tg}\,t\,\vec{j} + 2t\vec{k}$; $t_o = \pi/4$.
10. $r(t) = \mathrm{tg}\,t\,\vec{i} + (t + \cos 2t)\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$; $t_o = \pi/4$.
11. $r(t) = \mathrm{arctg}\,t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + (2t - 4)\vec{k}$; $t_o = 1$.
12. $r(t) = t^2\ln t\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + (t^2 - 3t)\vec{k}$; $t_o = 1$.
13. $r(t) = \ln(t + 1)\vec{i} + e^{2t}\,\vec{j} + (\sin t + t)\vec{k}$; $t_o = 0$.

14. $r(t) = (t^2 + 2t)\vec{i} + (t - t^3)\vec{j} + (t^2 + 2)\vec{k}$; $t_o = 1$.
15. $r(t) = (t^3 - 1)\vec{i} + (2t + 1)\vec{j} + t^2\vec{k}$; $t_o = 1$.
16. $r(t) = t\ln t\,\vec{i} + (t^2 + \ln t)\vec{j} + (t + 2)\vec{k}$; $t_o = 1$.
17. $r(t) = \ln(t^2 + 1)\vec{i} + t^2\vec{j} + (t^3 - 1)\vec{k}$; $t_o = 1$.
18. $r(t) = t^2\ln t\,\vec{i} + 2t\vec{j} + (t^2 + 3)\vec{k}$; $t_o = 1$.
19. $r(t) = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + (e^t + e^{-t})\vec{k}$; $t_o = 0$.
20. $r(t) = \mathrm{tg}\,t\,\vec{i} + \mathrm{ctg}\,t\,\vec{j} + t/\pi\vec{k}$; $t_o = \pi/4$.
21. $r(t) = e^{2t}\vec{i} + te^t\vec{j} + (t^2 + 1)\vec{k}$; $t_o = 0$.
22. $r(t) = \mathrm{arctg}\,t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t^3\vec{k}$; $t_o = 0$.
23. $r(t) = (e^{2t} - t)\vec{i} + e^t\vec{j} + (t - 2)\vec{k}$; $t_o = 0$.
24. $r(t) = (t^4 - 2)\vec{i} + (t^3 + 1)\vec{j} + t\vec{k}$; $t_o = 1$.
25. $r(t) = \mathrm{tg}\,2t\,\vec{i} + \sin 2t\,\vec{j} + t^3\vec{k}$; $t_o = 0$.

Контрольная работа № 3

Неопределенный и определенный интегралы

Задача 13. Найти неопределенные интегралы, в пунктах а) и б) результаты проверить дифференцированием.

1. а) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$; б) $\int x^2 e^{3x}dx$; в) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$;
   г) $\int \frac{dx}{4x^3 - x}$; д) $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$; е) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$.
2. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(2\,\mathrm{tg}\,x + 1)}$; б) $\int x^2 \sin 2x\,dx$; в) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$;
   г) $\int \frac{x-1}{x^3+1}dx$; д) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}dx$; е) $\int \frac{\cos x\,dx}{(\sin x + \cos x)\sin x}$.
3. а) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$; в) $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+1}}dx$;
   г) $\int \frac{(2x+1)dx}{x^3 - 3x^2 + 2x}$; д) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+5}}$; е) $\int \frac{dx}{5 + 3\cos x}$.
4. а) $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; б) $\int \mathrm{arctg}\frac{1}{x}dx$; в) $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+x-2}}dx$;
   г) $\int \frac{x^2-3}{x^2+5x+3}dx$; д) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; е) $\int \frac{dx}{3\sin x - 5\cos x + 4}$.

5. а) $\int \frac{e^x}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx$; б) $\int \sin(\ln x)dx$; в) $\int \frac{x-7}{x^2+4x+13}dx$;

г) $\int \frac{x^4-1}{x^2-2x+1}dx$; д) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$; е) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

6. а) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{1+\cos^2 x}}dx$; б) $\int x\ln^2 x\,dx$; в) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$;

г) $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^3-x^2+x-1}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; е) $\int \sin 3x\cos 8x\,dx$.

7. а) $\int \frac{x+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$; б) $\int x^2e^{-x}dx$; в) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^4-1}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}\left(1+\sqrt[3]{x-2}\right)}$; е) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

8. а) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int x\arcsin\frac{1}{x}dx$; в) $\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3}dx$;

г) $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$; д) $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx$; е) $\int \frac{\cos x}{(2+\cos x)\sin x}dx$.

9. а) $\int \frac{dx}{\arcsin^3 x\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int x\cos 2x\,dx$; в) $\int \frac{x}{\sqrt{3+4x-x^2}}dx$;

г) $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$; д) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$; е) $\int \operatorname{tg}^4 3x\,dx$.

10. а) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{3(1+x^2)}dx$; б) $\int x^2\sin 3x\,dx$; в) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x}}dx$;

г) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$; д) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$; е) $\int \sin^6 x\,dx$.

11. а) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$; б) $\int x\,3^{x/2}dx$; в) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx$;

г) $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\frac{dx}{x}$; д) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$; е) $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^4 x}$.

12. а) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$; б) $\int x^2\,e^{x/2}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$;

г) $\int \frac{2dx}{x^3+3x^2+2x}$; д) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$; е) $\int \cos 3x\cos^2 x\,dx$.

13. а) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+3)^5}$; б) $\int x^2\ln x\,dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}$;

г) $\int \frac{x^5dx}{x^2-x}$; д) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$; е) $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}dx$.

14. а) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{1+\sin 2x}$; б) $\int x^2\cos 2x\,dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}}$;

г) $\int \frac{x^3-1}{x(x+1)^3}dx$; д) $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$; е) $\int \cos^5 x\,dx$.

15. а) $\int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx$; б) $\int x^3 \ln x\,dx$; в) $\int \frac{dx}{4x^2+10x-24}$;

г) $\int \frac{dx}{x^4+3x^2}$; д) $\int \frac{x\,dx}{(\sqrt{x}+1)\cdot\sqrt[4]{x^3}}$; е) $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$.

16. а) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$; б) $\int \ln(x^2+1)dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+12}}$;

г) $\int \frac{2x^4+3}{x^4-1}dx$; д) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$; е) $\int \frac{dx}{5\cos^2 x+9\sin^2 x}$.

17. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; б) $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$; в) $\int \frac{2x-1}{x^2+x+1}dx$;

г) $\int \frac{x^3-3}{x^3-2x^2+x-2}dx$; д) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{x+1}}$; е) $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$.

18. а) $\int \cos x\sqrt{1+\sin x}\,dx$; б) $\int x^2\cos 2x\,dx$; в) $\int \frac{3x}{x^2-x+3}dx$;

г) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$; д) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+4}}$; е) $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx$.

19. а) $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx$; б) $\int x^2e^{3x}dx$; в) $\int \frac{x\,dx}{2x^2+3x+1}$;

г) $\int \frac{x^4dx}{x^3+x^2+2x+2}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; е) $\int \cos 4x\cos 3x\,dx$.

20. а) $\int \frac{\sin x\,dx}{(1+2\cos x)^2}$; б) $\int (2x+1)\sin 3x\,dx$; в) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$;

г) $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx$; д) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)\cdot\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; е) $\int \frac{dx}{7\cos^2 x+16\sin^2 x}$.

21. а) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{(\sin x+3)^3}}$; б) $\int (3x+1)\ln^2(x)dx$; в) $\int \frac{1+2x}{\sqrt{x^2-6x+1}}dx$;

г) $\int \frac{3x^2+3x-24}{(x^2-x-2)(x-2)}dx$; д) $\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}}dx$; е) $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$.

22. а) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+5}}$; б) $\int \sqrt{x^3}\ln^2(x)dx$; в) $\int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$;

г) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+4)}dx$; д) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$; е) $\int \frac{dx}{(1+\cos x)\sin x}$.

23. а) $\int \frac{\cos(\ln x)dx}{x}$; б) $\int x^2 \arcsin(2x)dx$; в) $\int \frac{3x-1}{x^2-2x+9}dx$;

г) $\int \frac{x^3+5}{(x-1)(x^2+4)}dx$; д) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; е) $\int \frac{2\,\mathrm{tg}\,x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$.

24. а) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x\,dx$; б) $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$; в) $\int \frac{5-x}{x^2+4x+1}dx$;

г) $\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx$; д) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+3}dx$; е) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$.

25. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$; б) $\int e^{3x}(x^2-6x+2)dx$; в) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2-6x-1}}dx$;

г) $\int \frac{2x^4-x^2+1}{x^3-x}dx$; д) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$; е) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

Задача 14. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

1. $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$. 2. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$. 3. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{2x^2+6x+5}$. 4. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$.

5. $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^3+1}$. 6. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{2x+7}}$. 7. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x}$. 8. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+4}$.

9. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$. 10. $\int_0^\infty e^{-x}dx$. 11. $\int_0^\infty x\sin x\,dx$. 12. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+9}$.

13. $\int_{-\infty}^{-3} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$. 14. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+x+1}$. 15. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$. 16. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

17. $\int_0^\infty \cos x\,dx$. 18. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. 19. $\int_0^\infty xe^{-x}dx$. 20. $\int_0^\infty x^3e^{-x^2}dx$.

21. $\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^3}$. 22. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$. 23. $\int_1^\infty \frac{e^{-1/x}}{x^2}dx$. 24. $\int_1^\infty \frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx$.

25. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

Задача 15.

1 – 13. Вычислить площадь фигуры, заключенной между данными линиями.

1. а) $y^2=x^3,\ y=1,\ x=0$; б) $r=2\sqrt{3}\cos\varphi,\ r=2\sin\varphi$.

2. а) $y = x^2,\ y^2 = x$; б) $r = a\cos 3\varphi$.
3. а) $y = \ln x,\ x = e,\ y = 0$; б) $r = \cos\varphi,\ r = \sin\varphi$.
4. а) $x = 4 - y^2,\ x = 0$; б) $r = 2\cos\varphi,\ r = 2\sin\varphi$.
5. а) $xy = 2,\ x + 2y - 5 = 0$; б) $r = \sin 3\varphi$.
6. а) $yx = 5,\ y + x = 6$; б) $r= 2\sin 4\varphi$.
7. а) $y = x^2 - 3x + 4,\ y = x + 1$; б) $r = 4,\ r\cos\varphi = 2\ (x \geq 2)$.
8. а) $y = 0{,}5x^2 - 3x + 2,\ y = x - 4$; б) $r = 3\cos 2\varphi$.
9. а) $y = (x - 2)^3,\ y = 4x - 8$; б) $r = a\sin 2\varphi$.
10. а) $4y = x^2,\ y = x^2,\ y = 4$; б) $r = 2(1 + \cos\varphi)$.
11. а) $y = 0{,}25x^2,\ y = 5x - 19/4$; б) $r = \sin 4\varphi$.
12. а) $y = -x^2 - 2x + 3$ и касательными к ней в т. $x = 2$ и $x = 0$; б) $r = 4\cos 3\varphi$.
13. а) $y = 2x - x^2 + 3,\ y = x^2 - 4x + 3$; б) $r = \cos\varphi,\ r = \sin\varphi$.

14 – 16. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями:

14. а) $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$; б) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1- \cos t)$ (одной аркой).
15. а) $y = x^2,\ y = 2 - x^2$; б) $x = t^3, y = t^2,\ x = \pm 1$.
16. $y = 3\sin x, y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$; б) $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

17 - 20. Вычислить длину кривой:

17.а) $y = (x^2 - 3)/2$, отсеченной осью Оx; б) $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$ от $t = 0$ до $t = \pi/2$.

18. а) $y = \sqrt{x^3}$ между точками О(0; 0) и А(4; 8); б) $r = a(1 + \cos\varphi)$.

19. а) $2y = x^2 - 4$ между точками пересечения с осью Оx; б) $r = 5(1- \cos\varphi)$.

20. а) $y = \ln x$ от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{15}$; б) $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t)$ (одной арки).

21 - 25. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Оy (или полярной оси) фигуры, ограниченной линиями:

21. а) $y = x^3,\ y = x^2$; б) $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.
22. а) $y = x^2,\ 8x = y^2$; б) $r = 2(1 + \cos\varphi)$ (вокруг полярной оси).
23. а) $y = x^3,\ y = 0, x = 2$; б) $r = a\sin\varphi$ (вокруг полярной оси).
24. а) $x^2 - y^2 = 4,\ y = \pm 2$; б) $r = 4(1 - \cos\varphi)$ (вокруг полярной оси).
25. а) $y^2 = 9x,\ y = 3$; б) $r = a\cos^2\varphi$ (вокруг полярной оси).

Задача 16. Задачи решить в системе СИ.

1. Вычислить силу давления на прямоугольную пластинку с основанием 4 *см* и высотой 8 *см*, погруженную вертикально в воду так, что верхнее основание пластинки находится ниже поверхности воды на 2 *см*.
2. Сила в 5 *кг* растягивает пружину на 2 *см*. Первоначальная длина пружины 8 см. Какую работу надо выполнить, если растянуть пружину до 12 *см*?

3. Сжатие винтовой пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу, производимую при сжатии пружины на 8 *см*, если для сжатия пружины на 0,5 *см* надо приложить силу в 1 *кг*.

4. Сила в 1 *кг* сжимает пружину на 1 *см*. Определить работу при сжатии пружины на 12 *см*.

5. При растяжении пружины на 4 *см* произведена работа в 10 *кгм*. Какую работу надо затратить, если растянуть пружину на 10 *см*?

6. Найти силу давления воды на одну из стенок сосуда прямоугольной формы, имеющего длину 0,6 *м*, а высоту 15 *см*.

7. Сила в 60 *Н* растягивает пружину на 0,02 *м*. Определить работу при растяжении ее на 0,1 *м*.

8. Цилиндрический сосуд с радиусом основания, равным 0,5 *м* и высотой 20 *см* наполнен водой. Определить силу давления воды на боковую стенку сосуда.

9. Для сжатия пружины на 5 *см* затрачена работа в 19,6 *Дж*. Какую работу надо затратить, чтобы сжать пружину в 4 *см*?

10. Треугольная пластинка с основанием 0,3 *м* и высотой 0,6 *м* погружена вертикально в воду так, что ее вершина лежит на поверхности воды, а основание параллельно ей. Вычислить силу давления воды на пластинку.

11. При растяжении пружины на 2 *см* надо приложить силу в 6 *кг*. Вычислить работу при сжатии ее на 8 *см*.

12. Сила в 6 *кг* растягивает пружину на 1 *см*. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 20 *см*, если первоначальная длина равна 12 *см*?

13. Вычислить силу давления воды на прямоугольную пластинку, вертикально погруженную в воду, если ее основание 10 *м*, высота h = 4 *м*, верхнее основание лежит на поверхности воды.

14. Для сжатия пружины на 0,04 *м* надо приложить силу 78,4 *Н*. Вычислить работу при сжатии этой пружины на 0,06 *м*.

15. Сосуд, имеющий форму прямой призмы с квадратным дном, наполнен водой. Длина стороны основания призмы равна 3 м, а высота – 2 м. Вычислить силу давления воды на одну вертикальную стенку.

16. При растяжении пружины на 6 *см* произвели работу в 10 *кгм*. Какую работу надо затратить при растяжении пружины на 10 *см*?

17. Прямоугольная пластинка погружена вертикально в воду так, что верхнее основание расположено на 2 *см* ниже уровня жидкости. Определить силу давления воды на пластинку, если ее основание равно 20 *см*, а высота – 12 *см*.

18. При растяжении пружины на 6 *см* надо затратить работу 3 *кгм*. На сколько растянется пружина, если затратить работу в 1 *кгм*?

19. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму полушара, радиус которого 8 *м*?

20. Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды из ямы, имеющей форму конуса (с вершиной на дне), высота которого H = 2 *м*, а радиус основания R = 0,5 *м*.

21- 25. Цилиндр с высотой H и радиусом основания R наполнен газом под атмосферным давлением (103,3 *кПа*). Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа невесомым поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на h.

21. $H = 0{,}4$ *м*, $h = 0{,}35$ *м*, $R = 0{,}1$ *м*.
22. $H = 0{,}4$ *м*, $h = 0{,}2$ *м*, $R = 0{,}1$ *м*.
23. $H = 0{,}8$ *м*, $h = 0{,}6$ *м*, $R = 0{,}2$ *м*.
24. $H = 1{,}6$ *м*, $h = 1{,}4$ *м*, $R = 0{,}3$ *м*.
25. $H = 1{,}6$ *м*, $h = 0{,}8$ *м*, $R = 0{,}3$ *м*.

Контрольная работа № 4

Дифференциальные уравнения

Задача 17. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка:

1. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$.
2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x$.
3. $xy' - y = e^x x^3$.
4. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$.
5. $y' = e^{y/x} + y/x$.
6. $xy' - 2y = 4x^3\cos^2 x$.
7. $y' - y\,\mathrm{tg}x = -y^3\cos x$.
8. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.
9. $(xy' - 1)\ln x = 2y$.
10. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.
11. $y' - 2xy = xe^{-x^2}$.
12. $y' + x^2 + y/(1 + x) = 0$.
13. $xy' = y\ln(y/x)$.
14. $xy' + y = x + 1$.
15. $y'\cos x + y\sin x = 2x\cos^2 x$.
16. $xy' - 2y = x^2\sqrt{y}$.
17. $y' + y\,\mathrm{tg}x = \cos^2 x$.
18. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.
19. $y' + y/x = 2\ln x + 1$.
20. $y' + y/(2x) = x^2$.
21. $y' - y/x + \ln(x)/x = 0$.
22. $y' - y = xy^2$.
23. $y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2$.
24. $y' + y = x\sqrt{y}$.
25. $y' + xy = (x - 1)e^x y^2$.

Задача 18. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

1. $x^2y'' - \ln x = 0$;	$y(1) = 3$,	$y'(1) = 1$.
2. $xy'' + y' + x = 0$;	$y(1) = 3/4$,	$y'(1) = 0{,}5$.
3. $x^3y'' + x^2y' - 1 = 0$;	$y(1) = 2$,	$y'(1) = -1$.
4. $y'' + y'\,\mathrm{tg}x = \sin 2x$;	$y(0) = 0$,	$y'(0) = -2$.
5. $y^2y'' = (y')^3$;	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 1$.
6. $y'' = e^{2y}$;	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 1$.
7. $xy'' - y' = x^2e^x$;	$y(1) = 0$,	$y'(1) = e$.
8. $(y - 1)y'' - 2(y')^2 = 0$;	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 3$.
9. $2yy'' = 1 + (y')^2$;	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 2$.
10. $y^3y'' = 4$;	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 2$.
11. $y''y^3 + 64 = 0$;	$y(0) = 4$,	$y'(0) = 2$.
12. $y'' + 2\sin y\cos^3 y = 0$;	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 1$.
13. $y''y^3 + 25 = 0$;	$y(2) = -5$,	$y'(2) = 1/2$.
14. $y'' = 8\sin^3 y\cos y$;	$y(1) = \pi/2$,	$y'(1) = 4$.
15. $y''\mathrm{tg}x - y' + 1/\sin x = 0$;	$y(\pi/2) = 1$,	$y'(\pi/2) = 0{,}5$.

16. $y''x\ln x = y'$; $y(e) = 3$, $y'(e) = 2$.
17. $xy'' - y' + 1/x = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 3/2$.
18. $y''\mathrm{tg}x = 2y'$; $y(\pi/4) = \pi/4$, $y'(\pi/4) = 1$.
19. $x^3y'' + x^2y' = \sqrt{x}$; $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.
20. $(x + 1)y'' + y' = x + 1$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
21. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$; $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.
22. $y^4 - y^3y'' = 1$; $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}/2$.
23. $2(y')^2 = y''(y - 1)$; $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$.
24. $y'' = y'/x + x^2/y'$; $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$.
25. $2y'' = 3y^2$; $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$.

Задача 19. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

1. $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 4x - 17$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -7$.
2. $y'' + 4y = 8x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
3. $y'' + 5y' = e^{-5x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -0{,}2$.
4. $y'' + 4y = \sin x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
5. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
6. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
7. $y'' - 3y' = 2 - 6x$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$.
8. $y'' + y = -3\sin 2x$; $y(\pi/2) = 1$, $y'(\pi/2) = 0$.
9. $y'' + 5y' + 6y = 2e^{-x} + e^{-2x}$; $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$.
10. $y'' - 2y' = 6x^2 - 10x + 12$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.
11. $y'' + 4y = 4\cos 2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
12. $y'' - 4y = e^x(2 - 3x)$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$.
13. $y'' - y' - 2y = 2x^2 + 2x - 1$; $y(0) = 2{,}5$, $y'(0) = 2$.
14. $y'' - 2y' + y = 4e^x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
15. $y'' + 2y' = 2\cos 2x - 2\sin 2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
16. $y'' + y = 2x^2 + 5$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
17. $y'' + 6y' + 13y = 30\sin x$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$.
18. $y'' - 2y' + 5y = e^{2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
19. $y'' + 6y' + 13y = 26x - 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
20. $y'' + 4y = \sin x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
21. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x\cos x$; $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$.
22. $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$; $y(\pi) = 2\pi$, $y'(\pi) = 2\pi$.
23. $y''' - y' = -2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$.
24. $y^{IV} - y = 8e^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 6$.
25. $y''' + y = e^{2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

Задача 20. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $y'' + 4y = \mathrm{ctg}2x$.
2. $y'' + y = 1/\sin x$.

3. $y'' + y = \mathrm{ctg}x$.
4. $y'' + y = 1/\cos x$.
5. $y'' + y = 1/\sqrt{\cos 2x}$.
6. $y'' + 4y = 1/\cos 2x$.
7. $y'' - 2y' + y = e^{-x}/x$.
8. $y'' + y = e^x/(e^x + 1)$.
9. $y'' + y' = \sin^2 x$.
10. $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos^{-1} x$.
11. $y'' - 2y' + y = e^x \ln x$.
12. $y'' + y = \cos^{-3} x$.
13. $y'' + 4y = \sin^{-2} x$.
14. $y'' - y = x\cos^2 x$.
15. $y'' + y = \cos x$.
16. $y'' + 4y = \mathrm{tg}2x$.
17. $y'' + 4y = \mathrm{ctg}^2 2x$.
18. $y'' - 2y' + y = e^x/\sqrt{4 - x^2}$.
19. $y'' + y = \mathrm{tg}x$.
20. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 6x$.
21. $y'' - 2y' + y = e^x/(x^2 + 1)$.
22. $y'' + 3y' + 2y = 1/(1 + e^x)$.
23. $y'' + y + \mathrm{ctg}^2 x = 0$.
24. $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$.
25. $y'' - y' = e^{2x}\cos(e^x)$.

<u>Задача 21.</u> Найти общее решение системы уравнений (рекомендуется решать с помощью характеристического уравнения).

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x + 3y. \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y. \end{cases}$
6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$
8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$
9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$
11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$
12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + 2y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y. \end{cases}$
14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$
15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$
17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$
18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$ 21 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 7y. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y. \end{cases}$

Задача 22. Решить задачи:

1. Скорость распада радия пропорциональна наличному количеству его. Известно, что по истечении 1600 лет остается половина первоначального запаса радия. Какой процент радия окажется распавшимся по истечении 800 лет?

2. Материальная точка массы $m = 3$ *кг* без начальной скорости медленно погружается в жидкость. Найти расстояние, пройденное точкой за время $t = 2$ *с*, считая, что при медленном погружении сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости погружения (коэффициент пропорциональности $k = 3$).

3. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v_o = 12$ *км/ч*. На полном ходу ее мотор был выключен, и через 10 *с*, скорость лодки уменьшилась до $v_1 = 6$ *км/ч*. Определить путь, пройденный лодкой за 1 *мин* (с момента выключения мотора), считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

4. Материальная точка массой $m = 2$ *г* погружается в жидкость, сила сопротивления которой пропорциональна скорости погружения с коэффициентом пропорциональности $k = 0{,}002$ *кг/с*. Найти скорость точки через 1 *с* после начала погружения, если в начальный момент она была равна нулю.

5. Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Если при прохождении слоя воды толщиной 3 *м* поглощается половина первоначального количества света, то какая часть этого количества дойдет до глубины 15 *м*?

6 – 15. Пуля входит в доску толщиной h *м* со скоростью v_o *м/с*, а вылетает из доски со скоростью v_1 *м/с*. Принимая, что сила сопротивления доски движению пули пропорциональна квадрату скорости движения, найти время движения пули через доску.

6. $h = 0{,}1$, $v_o = 500$, $v_1 = 400$.
7. $h = 0{,}1$, $v_o = 400$, $v_1 = 300$.
8. $h = 0{,}1$, $v_o = 100$, $v_1 = 50$.
9. $h = 0{,}05$, $v_o = 400$, $v_1 = 300$.
10. $h = 0{,}05$, $v_o = 200$, $v_1 = 100$.
11. $h = 0{,}02$, $v_o = 500$, $v_1 = 400$.
12. $h = 0{,}02$, $v_o = 300$, $v_1 = 200$.
13. $h = 0{,}02$, $v_o = 200$, $v_1 = 100$.

14. $h = 0{,}02$, $v_o = 400$, $v_1 = 300$.
15. $h = 0{,}02$, $v_o = 100$, $v_1 = 50$.

16 – 25. Сила трения, замедляющая движение диска, вращающегося в жидкости, пропорциональна угловой скорости вращения. Диск, начавший вращаться с угловой скоростью w_o оборотов в секунду, через 1 *мин* вращается с угловой скоростью w_1 оборотов в секунду. Какова его угловая скорость через t минут после начала вращения?

16. $w_o = 2$, $w_1 = 1$, $t = 4$.
17. $w_o = 6$, $w_1 = 2$, $t = 3$.
18. $w_o = 12$, $w_1 = 4$, $t = 3$.
19. $w_o = 20$, $w_1 = 5$, $t = 2$.
20. $w_o = 18$, $w_1 = 6$, $t = 3$.
21. $w_o = 16$, $w_1 = 8$, $t = 3$.
22. $w_o = 27$, $w_1 = 9$, $t = 2$.
23. $w_o = 18$, $w_1 = 7$, $t = 2$.
24. $w_o = 20$, $w_1 = 10$, $t = 3$.
25. $w_o = 27$, $w_1 = 9$, $t = 2$.

Контрольная работа № 5

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

Задача 23. Найти частные производные первого порядка функции u по независимым переменным y и z.

1. $u = \dfrac{\arcsin\sqrt{xyz} + 1}{x^2t^3 + \sqrt{t}} + \sqrt{t} \cdot 2^{yz\cos(3t+1)}$.

2. $u = \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{xyz} + z^3}{3t} + \ln^2(x^5 + y^3t^4)$.

3. $u = \dfrac{\cos^3(xt + \sqrt{y})}{\operatorname{arctg}^2 z + t^3} - xyzt$.

4. $u = xz^2 \cdot \sqrt[3]{\cos^5 y + z^3} + t^2yz$.

5. $u = z^2t^3e^{\arcsin(yt)}$.

6. $u = \dfrac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz}}{\ln^3(z^3 + \sqrt{t})}$.

7. $u = \dfrac{\sqrt{\ln^3 x + yz}}{\cos^3 x + \cos^3 t} + yt^2 \cdot 3^{\arcsin(xz)}$.

8. $u = \dfrac{\sqrt[3]{xyz} + 1}{x\sin^2 t + \sqrt{t}}$.

9. $u = y^5 \cdot \sqrt[3]{z} \cdot e^{yt+xz}$.

10. $u = \dfrac{x\cos^3 y + y\cos^3 z}{\sqrt{x^2 + t^2 + t^3}}$.

11. $u = y^3te^{\arccos(xyz)}$.

12. $u = \dfrac{\sqrt{xy + 3z} + xyz}{\cos^3(yt^3 + x)}$.

13. $u = \dfrac{x^3\ln y + y^3\ln z}{\sin^5(zt^3 + 3)}$.

14. $u = y^2 \cdot \sqrt{z} \cdot e^{\cos(xzt + \sqrt{z})}$.

15. $u = y^3 \cdot \sqrt[4]{\operatorname{tg}^3 y + x^5t^2z^3}$.

16. $u = \sqrt{y} \cdot \ln^2\left(\dfrac{1}{y} + xtz^3\right)$.

17. $u = \dfrac{\sqrt{xyz} + \sqrt[3]{xyz}}{z\sqrt{z} + \cos^2 t}$.

18. $u = \dfrac{xyz + \ln(xy + 1)}{y^3 + \ln(yt^3 + 1)}$.

19. $u=\dfrac{x^3+y^4+z^5}{\cos^3 x+\cos^5 t}+y^4\sin^3(y+2tz)$.
20. $u=\dfrac{xyz+\operatorname{tg}(xy-1)}{\sqrt{x}+z\ln(xt-1)}$.
21. $u=y^4z^2\ln^5(x\sqrt{y}+yt^3)$.
22. $u=y^7\operatorname{tg}^3(\sqrt{yzt}+xy^2t^3)$.
23. $u=\dfrac{x^3y^2+y^3t^2}{\cos^3(\sqrt{zt}+x)}$.
24. $u=\dfrac{\sqrt{x}+y\cos^3 z}{\ln^2 y+y\sqrt{t}}$.
25. $u=\dfrac{\sqrt{xy+yz}+1}{x\ln^3 t+x^3z}$.

Задача 24. Найти все частные производные первого и второго порядков для функции $z(x;\,y)$.

1. $z=e^{xy}+x^3y+x^5+3y+10$.
2. $z=\cos(x^2y)+xy^5+2y+1$.
3. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+3x^4+5y^2+5$.
4. $z=\ln\left(xy+y^2\right)+x^6y-x^3+3$.
5. $z=\sin\dfrac{y}{x}-x^2y^3+2x+y+12$.
6. $z=\arcsin(xy)+xy^2+3x+2$.
7. $z=2^{xy}+\sqrt{xy}+3x^2+y+25$.
8. $z=\cos(x^2+y^2)-x^2y+y^2+4$.
9. $z=\ln\left(x^2+y\right)+xy^2+3\sqrt{x}+1$.
10. $z=\operatorname{arctg}\sqrt{xy}+5x-3y+13$.
11. $z=\ln\left(e^x+e^y\right)+x\cos y+3y+14$.
12. $z=\sqrt{x^2+y^2}+x\sin^2 y+y+29$.
13. $z=xe^{-\frac{y}{x}}+\cos^2 y+3x+1$.
14. $z=x^y+y\operatorname{tg}x+y^5+7x+19$.
15. $z=5^{xy+1}+x^2\ln y+y^3+3$.
16. $z=\sqrt{xy+1}+x^3\operatorname{ctg}y+2x-1$.
17. $z = \operatorname{tg}(xy) + y\ln x + 5y - 3$.
18. $z = x\cdot\ln(x + y) + y\cdot\operatorname{tg}x + 3x + 1$.
19. $z=y\sin(x-y)+x\sqrt{y}+5$.
20. $z=y^x+x2^y+x^3+2y-2$.
21. $z=e^{\sqrt{xy}}+3x^4-y^3+4$.
22. $z=\ln(xy+1)+x\sqrt{y}+y^2+15$.
23. $z=\operatorname{arcctg}(xy)-x^5y+y^3+16$.
24. $z=\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}+x^2+3y+6$.
25. $z=\sin(xy^2)+xy^3+y+1$.

Задача 25. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $F(x;\,y;\,z) = 0$ в точке $A(x_o;\,y_o;\,z_o)$.

1. $F=\ln\left(2x^3y-x^2z\right)+2\sqrt{xyz}-2xy$, $A(1;\,1;\,1)$.
2. $F=\ln\left(x^2y-xz\right)+\dfrac{2y}{\sqrt{xz}}-4xz$, $A(1;\,2;\,1)$.
3. $F=\ln\left(2xy^2z+3xy\right)+\dfrac{y^3z^2}{\sqrt{x}}-4xy$, $A(1;\,-1;\,2)$.
4. $F=\ln\left(xy^2z^3+4yz\right)+\dfrac{2x}{\sqrt{yz}}+6yz$, $A(-3;\,1;\,1)$.

5. $F = \ln\left(x^3yz - 2xz^3\right) + 2y\sqrt{\dfrac{x}{z}} - 6xz,$ $A(1;\ 3;\ 1).$

6. $F = \ln\left(xyz^2 + \dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{2xz}{\sqrt{y}} - 4yz,$ $A(2;\ 1;\ -1).$

7. $F = \ln\left(\dfrac{xy}{z} - 4yz\right) + 2x\sqrt{yz} - 10yz,$ $A(5;\ 1;\ 1).$

8. $F = \ln\left(\dfrac{x}{yz^2} + 5yz\right) + \dfrac{16yz}{\sqrt{x}} - 8yz,$ $A(4;\ -1;\ -1).$

9. $F = \ln\left(\dfrac{x+y}{z} - 4yz\right) + \dfrac{16}{\sqrt{xyz}} - 2xz,$ $A(4;\ 1;\ 1).$

10. $F = \ln\left(\dfrac{x}{y+z} + 2y^3z\right) + x^2\sqrt{yz} + 2xy,$ $A(-2;\ 1;\ 1).$

11. $F = 4\operatorname{arctg}\left(\dfrac{xy}{z}\right) + \dfrac{4x}{\sqrt{yz}} + xy + \pi,$ $A(-1;\ 2;\ 2).$

12. $F = 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-y}{z}\right) + \dfrac{4\sqrt{yz}}{x} - 2yz - \dfrac{\pi}{2},$ $A(2;\ 1;\ 1).$

13. $F = 4\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+y}{z}\right) + \dfrac{2xy}{\sqrt{z}} - xy - \pi,$ $A(2;\ 2;\ 4).$

14. $F = 8\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y+z}\right) + x\sqrt{\dfrac{y}{z}} - yz - 2\pi,$ $A(4;\ 2;\ 2).$

15. $F = 4\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+y}{x+z}\right) + x\sqrt{yz} - xz - \pi,$ $A(3;\ 1;\ 1).$

16. $F = 4\operatorname{arctg}\left(\dfrac{xyz}{2}\right) + \dfrac{2z}{\sqrt{xy}} - 4xy - \pi,$ $A(1;\ 1;\ 2).$

17. $F = 4\operatorname{arctg}\left(x + y^3z\right) + \dfrac{6\sqrt{xy}}{z} + xy - \pi,$ $A(4;\ 1;\ -3).$

18. $F = 8\operatorname{arctg}\left(xy^2 - 3z^3\right) + \dfrac{y^2}{\sqrt{xz}} - 4xz - 2\pi,$ $A(1;\ -2;\ 1).$

19. $F = \operatorname{arctg}\left(2x^2y^2 - z^2\right) + 2x\sqrt{\dfrac{y}{z}} + 2yz - \dfrac{\pi}{4},$ $A(-1;\ 1;\ 1).$

20. $F = 4\operatorname{arctg}\left(xyz^3 + 9xy\right) + \dfrac{z^3}{\sqrt{xy}} + 8xy - \pi,$ $A(1;\ 1;\ -2).$

21. $F = xy^3z - \dfrac{yz}{x^2} + 2\sqrt{xyz} - 2x\sqrt{z},$ $A(1;\ 1;\ 4).$

22. $F = \dfrac{yz}{x} - \dfrac{4y}{xz} - 8x\sqrt{\dfrac{y}{z}} - \sqrt{xyz},$ $A(1;\ 4;\ 4).$

23. $F = x^3y^2z + \dfrac{z}{x^2y} - 6\sqrt{\dfrac{z}{xy}} + \dfrac{z}{y^2}$, $A(1; 1; 9)$.

24. $F = \dfrac{2x^2}{yz} - \dfrac{4z}{xy} + \dfrac{8x}{\sqrt{yz}} - x\sqrt{yz}$, $A(-2; 2; 2)$.

25. $F = \dfrac{xy}{z} + \dfrac{yz}{x} + \dfrac{8}{x\sqrt{yz}} - z^2\sqrt{xy}$, $A(2; 2; 2)$.

Задача 26. Найти экстремумы функции двух переменных $z(x; y)$.

1. $z = x^2y - 2xy - 4x^2 - y^2 + 8x$.
2. $z = e^{-x}(2xy + y^2 + x - 1)$.
3. $z = xy^2 - 4xy + x^2 - y^2 - 2x + 4y$.
4. $z = e^{x}(2xy - y^2 + 2x - 2)$.
5. $z = x^2y - 2xy - 3x^2 - y^2 + 6x - 9y$.
6. $z = e^{-y}(2xy + x^2 + 3y - 3)$.
7. $z = xy^2 - 6xy + x^2 - 2y^2 + x + 12y$.
8. $z = e^{2x}(4xy - 4y^2 + 2x + 1)$.
9. $z = 2x^2y + 4xy - 4x^2 - y^2 - 8x - 2y$.
10. $z = e^{2x}(xy - y^2 + x + 1)$.
11. $z = xy^2 - 4xy + x^2 + 2y^2 + 7x - 8y$.
12. $z = e^{2x}(8xy - 8y^2 + 2x - 7)$.
13. $z = 2xy^2 - 12xy - x^2 + 2y^2 + 8x - 12y$.
14. $z = e^{-2x}(4xy + 4y^2 - 2x + 5)$.
15. $z = x^2y - 6xy - 3x^2 + y^2 + 18x - y$.
16. $z = e^{-2y}(4xy + 4x^2 - 6y - 9)$.
17. $z = xy^2 - 6xy - x^2 + 3y^2 + 2x - 18y$.
18. $z = e^{2y}(4xy - 4x^2 + 6y + 9)$.
19. $z = 2x^2y + 8xy - 2x^2 - y^2 - 8x - 8y$.
20. $z = e^{y}(2xy - x^2 + y + 1)$.
21. $z = xy^2 - 8xy + x^2 - 2y^2 + 8x + 16y$.
22. $z = e^{2x}(4xy - 2y^2 + 2x - 7)$.
23. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.
24. $z = e^{-2y}(4xy + 2x^2 - 6y + 3)$.
25. $z = xy^2 - x^3 + 2y^2 + 3x$.

Задача 27. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств.

1. $z = x^2y$, D: $0 \le y \le 1 - x^2$.
2. $z = 4 - 2x^2 - y^2$, D: $x^2 + y^2 \le 1$.
3. $z = xy - 2x - y$, D: $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4$.
4. $z = xy$, D: $x \ge 0,\ y \le -\dfrac{3x}{2} + 3,\ y \ge 0$.
5. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, D: $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$.
6. $z = \dfrac{x^2}{2} - xy$. D: $y \ge \dfrac{x^2}{3},\ y \le 3$.
7. $z = 1 + xy^2$. D: $0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 2$.
8. $z = x^2 - 2y^2 + 4$. D: $x^2 + y^2 \le 1$.
9. $z = 2x + y - xy$. D: $0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4$.
10. $z = x^2 + xy$. D: $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3$.

11. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$. D: $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3$.
12. $z = x^2 + 2y^2 + 1$. D: $x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 3$.
13. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$. D: $x \le 1, y \ge 0, y \le x$.
14. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$. D: $x \ge 1,\ y \ge -1, x + y \le 1$.
15. $z = x^2 - 2xy + 2y^2$. D: $-1 \le x \ge 1, 0 \le y \le 2$.
16. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$. D: $x \ge -1, y \ge -1, x + y \le 1$.
17. $z = 10 + 2xy - x^2$. D: $0 \le y \le 4 - x^2$.
18. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$. D: $x \le 0, y \le 0, x + y + 2 \ge 0$.
19. $z = x^2 + xy - 2$. D: $4x^2 - 4 \le y \le 0$.
20. $z = 2x^2 - 2y^2$. D: $x^2 + y^2 \le 9$.
21. $z = 3x + 3y$. D: $x^2 + y^2 \le 4$.
22. $z = x^2 - y^2$. D: $x^2 + y^2 \le 1$.
23. $z = x^3 + y^3 - 3xy$. D: $0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2$.
24. $z = x^2 y$. D: $x^2 + y^2 \le 1$.
25. $z = 1 + x + 2y$ D: $x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1$.

Задача 28. Даны функция $u(x; y; z)$, точка $A(x_o; y_o; z_o)$ и вектор $\vec{s} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Найти вектор $grad\, u$ в точке A и производную по направлению $\frac{\partial u}{\partial s}$ в точке A.

1. $u = x^2 y^3 + 4\sqrt{xyz} + \frac{z}{xy}$; $A(1; 1; 4)$, $\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.
2. $u = \frac{x^2}{y} + \frac{4y^2}{z} + \frac{4z}{\sqrt{xy}}$; $A(2; 2; 4)$, $\vec{s} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.
3. $u = \frac{4x}{y^3} + \frac{xy^2}{z^2} + 2\sqrt{yz}$; $A(4; 2; 2)$, $\vec{s} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
4. $u = \frac{x}{y^2} + \frac{y^3}{z^2} + x\sqrt{yz}$; $A(-4; 1; 1)$, $\vec{s} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.
5. $u = \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} + 2\sqrt{xy}$; $A(2; 2; -1)$, $\vec{s} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$.
6. $u = \frac{xy^2}{z} + \frac{yz^2}{x} + \frac{4y}{\sqrt{z}}$; $A(-1; 4; 4)$, $\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$.
7. $u = x^2 yz^2 + \frac{z}{y} + 4\sqrt{\frac{x}{y}}$; $A(4; 1; -1)$, $\vec{s} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.
8. $u = yz^2 + \frac{z^2}{xy} + \frac{2z}{\sqrt{xy}}$; $A(2; 2; 4)$, $\vec{s} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

9. $u = xy^2z + \dfrac{x^2}{y} + 4\sqrt{\dfrac{z}{y}}$; $A(-1; 1; 4)$, $\vec{s} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

10. $u = xy^2\sqrt{z} + \dfrac{xy}{z} + 2\sqrt{xy}$; $A(2; 2; 1)$, $\vec{s} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$.

11. $u = x\sqrt{xy} - 4\sqrt{xz} + \dfrac{xy}{z^2}$; $A(4; 1; 1)$, $\vec{s} = -4\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}$.

12. $u = x^2\sqrt{yz} + 2y^2\sqrt{z} + \dfrac{xy}{z^2}$; $A(-2; 1; 1)$, $\vec{s} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

13. $u = 2x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + \dfrac{4x^3}{\sqrt{yz}}$; $A(2; 4; 4)$, $\vec{s} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$.

14. $u = 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + \dfrac{2x^2}{yz}$; $A(2; 2; 2)$, $\vec{s} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 14\vec{k}$.

15. $u = x^2y + y^2z + \dfrac{16}{\sqrt{xyz}}$; $A(1; 1; 4)$, $\vec{s} = -5\vec{i} + 14\vec{j} + 2\vec{k}$.

16. $u = \dfrac{4\sqrt{x}}{yz} + \dfrac{4\sqrt{y}}{xz} + \dfrac{8y^2}{z^2}$; $A(1; 1; -2)$, $\vec{s} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$.

17. $u = 4x^2\sqrt{yz} + \dfrac{x^3y}{\sqrt{z}} + \dfrac{y^2}{4z}$; $A(-1; 4; 1)$, $\vec{s} = -6\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$.

18. $u = \dfrac{xy^2z^2}{16} + \dfrac{32y^2}{\sqrt{xz}} + \dfrac{4x}{\sqrt{z}}$; $A(4; -1; 4)$, $\vec{s} = 4\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k}$.

19. $u = 2x\sqrt{x}y^3 + z\sqrt{z}y^2 + \dfrac{16y^2}{\sqrt{xz}}$; $A(1; -1; 4)$, $\vec{s} = -2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

20. $u = xy\sqrt{xy} + \dfrac{4xy}{\sqrt{z}} + \dfrac{4x}{yz}$; $A(4; 1; 4)$, $\vec{s} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$.

21. $u = 3\ln(xy^2 + zy^3) + 4y\sqrt{xz}$; $A(4; -1; 1)$, $\vec{s} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$.

22. $u = 5\ln(x^2yz^3 + y^2z^5) + \dfrac{x}{\sqrt{yz}}$; $A(2; 1; 1)$, $\vec{s} = -8\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.

23. $u = 10\,\mathrm{arctg}\sqrt{xy} + \dfrac{xz^3}{y^3}$; $A(2; 2; -2)$, $\vec{s} = -2\vec{i} + 14\vec{j} + 5\vec{k}$.

24. $u = 10\,\mathrm{arctg}(xyz) + \dfrac{2x^2}{3\sqrt{yz}}$; $A(3; 1; 1)$, $\vec{s} = -4\vec{i} + 12\vec{j} + 3\vec{k}$.

25. $u = 10\,\mathrm{arctg}\sqrt{xyz} + \dfrac{x^3z^2}{y}$; $A(1; 2; 2)$, $\vec{s} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Задача 29. Экспериментально получены пять значений y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 искомой функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$. Методом наименьших квадратов найти аппроксимирующую линейную функцию $y = ax + b$.

Сделать чертеж, отметив в прямоугольной декартовой системе координат экспериментально полученные точки и построив график найденной линейной функции.

1. y_1=4,3; y_2=5,3; y_3=3,8; y_4=1,8; y_5=2,3.
2. y_1=4,5; y_2=5,5; y_3=4,0; y_4=2,0; y_5=2,5.
3. y_1=4,7; y_2=5,7; y_3=4,2; y_4=2,2; y_5=2,7.
4. y_1=4,9; y_2=5,9; y_3=4,4; y_4=2,4; y_5=2,9.
5. y_1=5,1; y_2=6,1; y_3=4,6; y_4=2,6; y_5=3,1.
6. y_1=3,9; y_2=4,9; y_3=3,4; y_4=1,4; y_5=1,9.
7. y_1=5,2; y_2=6,2; y_3=4,7; y_4=2,7; y_5=3,2.
8. y_1=5,5; y_2=6,5; y_3=5,0; y_4=3,0; y_5=3,5.
9. y_1=5,7; y_2=6,7; y_3=5,2; y_4=3,2; y_5=3,7.
10. y_1=5,9; y_2=6,9; y_3=5,4; y_4=3,4; y_5=3,9.
11. y_1=2,3; y_2=1,8; y_3=3,8; y_4=5,3; y_5=4,3.
12. y_1=2,5; y_2=2,0; y_3=4,0; y_4=5,5; y_5=4,5.
13. y_1=2,7; y_2=2,2; y_3=4,2; y_4=5,7; y_5=4,7.
14. y_1=2,9; y_2=2,4; y_3=4,4; y_4=5,9; y_5=4,9.
15. y_1=3,1; y_2=2,6; y_3=4,6; y_4=6,1; y_5=5,1.
16. y_1=1,9; y_2=1,4; y_3=3,4; y_4=4,9; y_5=3,9.
17. y_1=3,2; y_2=2,7; y_3=4,7; y_4=6,2; y_5=5,2.
18. y_1=3,5; y_2=3,0; y_3=5,0; y_4=6,5; y_5=5,5.
19. y_1=3,7; y_2=3,2; y_3=5,2; y_4=6,7; y_5=5,7.
20. y_1=3,9; y_2=3,4; y_3=5,4; y_4=6,9; y_5=5,9.
21. y_1=4,4; y_2=5,2; y_3=3,8; y_4=1,7; y_5=2,1.
22. y_1=4,3; y_2=5,1; y_3=4,4; y_4=2,3; y_5=2,1.
23. y_1=5,2; y_2=5,7; y_3=4,2; y_4=2,2; y_5=2,5.
24. y_1=5,0; y_2=5,9; y_3=4,6; y_4=2,7; y_5=2,6.
25. y_1=5,3; y_2=6,1; y_3=4,6; y_4=2,9; y_5=3,1.

Контрольная работа №6

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.
Векторный анализ.

Задача 30. Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в декартовых координатах ($a > 0$).

1. $\left(x^2+y^2\right)^3 = a^2x^2y^2$.
2. $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2(4x^2+y^2)$.
3. $\left(x^2+y^2\right)^3 = a^2x^2(3x^2+3y^2)$.
4. $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2(3x^2+2y^2)$.
5. $x^4 = a^2(3x^2-y^2)$.
6. $x^6 = a^2(x^4-y^4)$.
7. $x^4 = a^2(x^2-3y^2)$.
8. $y^6 = a^2(y^4-x^4)$.
9. $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2(2x^2+3y^2)$.
10. $y^6 = a^2(x^2+y^2)(3y^2-x^2)$.
11. $x^3+y^3 = 3axy$.
12. $x^4+y^4 = a^2\left(x^2+y^2\right)$
13. $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2xy$.
14. $\left(x^2+y^2\right)^2 = a(x^3-3xy^2)$.

15. $x^6 = a^2(x^4 - 4y^4)$.
16. $y^4 = a^2(y^2 - 2x^2)$.
17. $y^4 = a^2\left(x^2 - 3y^2\right)$.
18. $x^6 = a^2(25x^4 - 9y^4)$.
19. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2(3x^2 + 4y^2)$.
20. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(2x^2 + 3y^2\right)$.
21. $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2y^2(x^2 + 5y^2)$.
22. $y^6 = a^2(x^2 + y^2)(y^2 - 4x^2)$.
23. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2(x^2 - y^2);\quad x^2 + y^2 \ge a^2$.
24. $\left(x^2 + y^2\right)^4 = x^6 + y^6$.
25. $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy;\quad (x-a)^2 + (y-a)^2 \le 2a^2$.

Задача 31. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость *xOy*.

1. $z = 0,\ z = x,\ y = 0,\ y = 4,\ x = \sqrt{25 - y^2}$.
2. $z = 0,\ z = 9 - y^2,\ x^2 + y^2 = 9$.
3. $z = 0,\ z = 4 - x - y\ ,\ x^2 + y^2 = 4$.
4. $z = 0,\ z = y^2,\ x^2 + y^2 = 9$.
5. $z = 0,\ \ x + z = 2,\ \ x^2 + y^2 = 4$.
6. $z = 0,\ 4z = y^2,\ \ 2x - y = 9,\ \ x + y = 9$.
7. $z = 0,\ x^2 + y^2 = z,\ \ x^2 + y^2 = 4$.
8. $z = 0,\ z = 1 - y^2,\ x = 0,\ x = 2y^2 + 1$.
9. $z = 0,\ z = 1 - x^2,\ y = 0,\ y = 3 - x$.
10. $z = 0,\ \ z = 4\sqrt{y},\ \ x = 0,\ \ x + y = 4$.
11. $z = x^2 + y^2,\ z = 2x^2 + 2y^2,\ y = x\ ,\ \ y = x^2$.
12. $z = x + y,\ \ z = xy,\ \ x + y = 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0.$
13. $x^2 + z^2 = a^2,\ \ x + y = \pm a,\ \ x - y = \pm a.$
14. $az = x^2 + y^2,\quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
15. $az = a^2 - x^2 - y^2,\quad z = a - x - y,\quad x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$
16. $z = 6 - x^2 - y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
17. $x^2 + y^2 + z^2 = 2az,\ x^2 + y^2 \le z^2$.
18. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\quad 3z = x^2 + y^2$.
19. $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2},\quad z = x^2 + y^2$.
20. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = b^2,\ x^2 + y^2 = z^2\quad (0 < a < b)$.
21. $2z = x^2 + y^2,\quad z^2 = x^2 + y^2.$
22. $z = a^2 - x^2 - y^2,\quad z^2 - x^2 - y^2 = 0.$
23. $z = 0,\ z^2 - 49y = 0,\ x = 0,\ \ x + y = 3.$

24. $z = x^2 + y^2,\ \ az = x^2 + y^2,\ y = x,\ \ y = x^2,\ a > 0.$

25. $x + z = a,\ \ x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0.$

Задача 32. Вычислить криволинейный интеграл, сделать чертеж:

1. $\int\limits_L \left(x^2 - y\right)dx - (x - y^2)dy$ вдоль дуги L окружности $x = 5\cos t$, $y = 5\sin t$, обходя ее против хода часовой стрелки от точки $A(5;\ 0)$ до точки $B(0;\ 5)$.
2. $\int\limits_L (x + y)dx - (x - y)dy$ вдоль ломаной $L = OAB$, где $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 0)$, $B(4;\ 5)$.
3. $\oint\limits_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ вдоль границы L треугольника ABC, обходя ее против хода часовой стрелки, если $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 1)$, $C(0;\ 1)$.
4. $\int\limits_L \left(x^2 - 2xy\right)dx + (y^2 - 2xy)dy$ вдоль дуги L параболы $y = x^2$ от точки $A(-1;\ 1)$ до точки $B(1;\ 1)$.
5. $\int\limits_L \left(x^2 y - 3x\right)dx + (y^2 x + 2y\ \ )dy$ вдоль дуги L эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ $(0 \le t \le \pi)$.
6. $\int\limits_L \left(x^2 + y\right)dx + (y^2 + x)dy$ вдоль ломанной $L = ABC$, где $A(1;\ 2)$, $B(1;\ 5)$, $C(3;\ 5)$.
7. $\int\limits_L ydx + \frac{x}{y}dy$ вдоль дуги L кривой $y = e^{-x}$ от точки $A(0;\ 1)$ до точки $B(-1;\ e)$.
8. $\int\limits_L \frac{y^2 + 1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$ вдоль отрезка $L = AB$ от точки $A(1;\ 2)$ до точки $B(2;\ 4)$.
9. $\int\limits_L (xy - x^2)dx + xdy$ вдоль дуги L параболы $y = 2x^2$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(1;\ 2)$.
10. $\int\limits_L \frac{y}{x}dx + xdy$ вдоль дуги L кривой $y = \ln x$ от точки $A(1;\ 0)$ до точки $B(e;\ 1)$.
11. $\oint\limits_L \frac{2ydx + 3xdy}{x^2 + y^2}$ вдоль границы L треугольника ABC, обходя ее против хода часовой стрелки, если $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 1)$, $C(0;\ 1)$.
12. $\int\limits_L (y^2 - x^2)dx + xydy$ вдоль дуги L параболы $y = 4x^2$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(1;\ 4)$.
13. $\int\limits_L \frac{y}{x}dx + ydy$ вдоль дуги L кривой $y = \lg x$ от точки $A(1;\ 0)$ до точки $B(10;\ 1)$.
14. $\int\limits_L \left(x^2 - y^2\right)dx - (x - y)dy$ вдоль дуги L окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, обходя ее против хода часовой стрелки от точки $A(2;\ 0)$ до точки $B(0;\ 2)$.
15. $\int\limits_L \left(x^2 - xy\right)dx + (y^2 + 2xy^3)dy$ вдоль дуги L кривой $y = \sqrt{x}$ от точки $A(1;\ 1)$ до точки $B(4;\ 2)$.

16. $\int\limits_L \left(x^2y+5x\right)dx+(y^2x-4y)dy$ вдоль дуги L эллипса $x=4\cos t,\ y=3\sin t\ (0\le t\le\pi)$.

17. $\int\limits_L (x-y)dx+(y^2+x^2)dy$ вдоль ломанной $L=ABC$, где $A(1;\,1)$, $B(1;\,4)$, $C(3;\,4)$.

18. $\int\limits_L ydx-2xydy$ вдоль дуги L кривой $y=e^x$ от точки $A(0;\,1)$ до точки $B(1;\,e)$.

19. $\int\limits_L \frac{y^2+x}{y}dx+\frac{x+1}{x^2}dy$ вдоль отрезка $L=AB$ от точки $A(1;\,1)$ до точки $B(2;\,3)$.

20. $\oint\limits_L \frac{ydx-xdy}{x+y}$ вдоль границы L треугольника ABC, обходя ее против хода часовой стрелки, если $A(-2;\,0)$, $B(2;\,0)$, $C(0;\,-2)$.

21. $\oint\limits_L \frac{3ydx+4xdy}{x^2+y^2}$ вдоль границы L треугольника ABC, обходя ее против хода часовой стрелки, если $A(2;\,0)$, $B(2;\,2)$, $C(0;\,2)$.

22. $\int\limits_L (2y^2+3x^2)dx+4xydy$ вдоль дуги L параболы $y=x^2$ от точки $O(0;\,0)$ до точки $A(2;\,4)$.

23. $\int\limits_L \frac{y}{x}dx+2xydy$ вдоль дуги L кривой $y=\ln x$ от точки $A(1;\,0)$ до точки $B(e;\,1)$.

24. $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dx-(x+y)dy$ вдоль дуги L окружности $x=\cos t$, $y=\sin t$, обходя ее против хода часовой стрелки от точки $A(1;\,0)$ до точки $B(0;\,1)$.

25. $\int\limits_L \left(x^2+xy\right)dx+(y^2-2xy^4)dy$ вдоль дуги L кривой $y=\sqrt[3]{x}$ от точки $A(1;\,1)$ до точки $B(8;\,2)$.

Задача 33. Проверить, является ли заданное выражение полным дифференциалом некоторой функции $u(x;\,y)$, и в случае положительного ответа найти $u(x;\,y)$ с помощью криволинейного интеграла.

1. $du=xe^{y^2}dx+\left(x^2ye^{y^2}+\mathrm{tg}^2\,y\right)dy$.
2. $du=\frac{dx}{y}-\frac{x+y^2}{y^2}dy$.
3. $du=\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\frac{1}{x}\right)dy$.
4. $du=\frac{y}{x^2}dx-\frac{xy+1}{x}dy$.
5. $du=2x\cos^2 ydx+\left(2y-x^2\sin 2y\right)dy$.
6. $du=e^ydx+\left(\cos y+xe^y\right)dy$.
7. $du=\left(5xy^2-x^3\right)dx+\left(5x^2y-y\right)dy$.
8. $du=e^{-y}dx+\left(1-xe^{-y}\right)dy$.
9. $du=\left(xy^2+\frac{x}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\frac{x^2}{y^3}\right)dy$.
10. $du=\left(4-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy$.
11. $du=\left(3x^2+4y^2\right)dx+\left(8xy+e^y\right)dy$.
12. $du=xy^2dx+y\left(x^2+y^2\right)dy$.
13. $du=\left(y^3+\cos x\right)dx+\left(3xy^2+e^y\right)dy$.
14. $du=2xydx+\left(x^2-2\sin y\right)dy$.

15. $du=\left(\frac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx-\frac{x}{y^2+x^2}dy$.

16. $du=\left(xe^x+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy$.

17. $du=\left(e^{2x}-y^2\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$.

18. $du=3x^2e^y dx+\left(x^3e^y-1\right)dy$.

19. $du=\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx-\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+2y\right)dy$.

20. $du=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}dy$.

21. $du=\left(3x^2y+2y+3\right)dx+\left(x^3+2x+3y^2\right)dy$.

22. $du=\left(\sin 2x-2\cos(x+y)\right)dx-2\cos(x+y)\,dy$.

23. $du=\left(y+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy$.

24. $du=\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy$.

25. $du=\left(2x-3xy^2+2y\right)dx+\left(2x-3x^2y+2y\right)dy$.

Задача 34. Проверить, является ли векторное поле $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{F}$ найти его потенциал.

1. $\vec{F}=(6x+7yz)\vec{i}+(6y+7xz)\vec{j}+(6z+7xy)\vec{k}$.
2. $\vec{F}=(8x+5yz)\vec{i}+(8y+5xz)\vec{j}+(8z+5xy)\vec{k}$.
3. $\vec{F}=(10x+3yz)\vec{i}+(10y+3xz)\vec{j}+(10z+3xy)\vec{k}$.
4. $\vec{F}=(12x+yz)\vec{i}+(12y+xz)\vec{j}+(12z+xy)\vec{k}$.
5. $\vec{F}=(4x-7yz)\vec{i}+(4y-7xz)\vec{j}+(4z-7xy)\vec{k}$.
6. $\vec{F}=(x+2yz)\vec{i}+(y+2xz)\vec{j}+(z+2xy)\vec{k}$.
7. $\vec{F}=(5x+4yz)\vec{i}+(5y+4xz)\vec{j}+(5z+4xy)\vec{k}$.
8. $\vec{F}=(7x-2yz)\vec{i}+(7y-2xz)\vec{j}+(7z-2xy)\vec{k}$.
9. $\vec{F}=(3x-yz)\vec{i}+(3y-xz)\vec{j}+(3z-xy)\vec{k}$.
10. $\vec{F}=(8x-4yz)\vec{i}+(8y-4xz)\vec{j}+(8z-4xy)\vec{k}$.
11. $\vec{F}=(9x+5yz)\vec{i}+(9y+5xz)\vec{j}+(9z+5xy)\vec{k}$.
12. $\vec{F}=(x-yz)\vec{i}+(y-xz)\vec{j}+(z-xy)\vec{k}$.
13. $\vec{F}=(x+yz)\vec{i}+(y+xz)\vec{j}+(z+xy)\vec{k}$.
14. $\vec{F}=(2x+3yz)\vec{i}+(2y+3xz)\vec{j}+(2z+3xy)\vec{k}$.
15. $\vec{F}=(3x+yz)\vec{i}+(3y+xz)\vec{j}+(3z+xy)\vec{k}$.
16. $\vec{F}=(5x-2yz)\vec{i}+(5y-2xz)\vec{j}+(5z-2xy)\vec{k}$.
17. $\vec{F}=(x-3yz)\vec{i}+(y-3xz)\vec{j}+(z-3xy)\vec{k}$.
18. $\vec{F}=(8x-12yz)\vec{i}+(8y-12xz)\vec{j}+(8z-12xy)\vec{k}$.
19. $\vec{F}=(2x+5yz)\vec{i}+(2y+5xz)\vec{j}+(2z+5xy)\vec{k}$.

20. $\vec{F} = (4x + 11yz)\vec{i} + (4y + 11xz)\vec{j} + (4z + 11xy)\vec{k}$.

21. $\vec{F} = (6x + 3yz)\vec{i} + (6y + 3xz)\vec{j} + (6z + 3xy)\vec{k}$.

22. $\vec{F} = (x + 13yz)\vec{i} + (y + 13xz)\vec{j} + (z + 13xy)\vec{k}$.

23. $\vec{F} = (5x - 21yz)\vec{i} + (5y - 21xz)\vec{j} + (5z - 21xy)\vec{k}$.

24. $\vec{F} = (7x + 35yz)\vec{i} + (7y + 35xz)\vec{j} + (7z + 35xy)\vec{k}$.

25. $\vec{F} = (16x + 11yz)\vec{i} + (16y + 11xz)\vec{j} + (16z + 11xy)\vec{k}$.

26. $\vec{F} = (12x + 3yz)\vec{i} + (12y + 3xz)\vec{j} + (12z + 3xy)\vec{k}$.

Контрольная работа 7

Ряды

Задача 35. Найти общий член ряда a_n и проверить выполнение необходимого признака сходимости.

1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\ldots$

2. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{8}{9}+\ldots$

3. $10+\frac{30}{6}+\frac{40}{18}+\frac{50}{54}+\ldots$

4. $5+\frac{20}{9}+\frac{25}{27}+\frac{10}{27}+\ldots$

5. $\frac{4}{1\cdot 2}+\frac{8}{3\cdot 4}+\frac{16}{5\cdot 6}+\frac{32}{7\cdot 8}+\ldots$

6. $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{5}{10}+\frac{7}{17}+\ldots$

7. $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{17}+\ldots$

8. $\frac{4}{1}+\frac{7}{8}+\frac{10}{27}+\frac{13}{64}+\ldots$

9. $\frac{\sin 1}{5}+\frac{\sin 2}{25}+\frac{\sin 3}{125}+\frac{\sin 4}{625}+\ldots$

10. $\frac{1}{2\cdot 5}-\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{5}{8\cdot 11}-\frac{7}{11\cdot 14}+\ldots$

11. $\frac{\sqrt{3}}{3\cdot 4}+\frac{\sqrt{8}}{4\cdot 5}+\frac{\sqrt{15}}{5\cdot 6}+\frac{\sqrt{24}}{6\cdot 7}+\ldots$

12. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[4]{8}}+\frac{1}{\sqrt[5]{16}}+\ldots$

13. $\frac{\ln 1}{6}+\frac{\ln 2}{10}+\frac{\ln 3}{14}+\frac{\ln 4}{18}+\ldots$

14. $\frac{\ln 3}{\sqrt{5}}+\frac{\ln 9}{\sqrt{10}}+\frac{\ln 27}{\sqrt{15}}+\frac{\ln 81}{\sqrt{20}}+\ldots$

15. $\frac{2^2}{9}+\frac{2^3}{7}+\frac{2^4}{5}+\frac{2^5}{3}+\ldots$

16. $\frac{\sin x}{12}+\frac{\sin 2x}{17}+\frac{\sin 3x}{22}+\frac{\sin 4x}{27}+\ldots$

17. $\frac{1}{203}+\frac{8}{304}+\frac{15}{405}+\frac{22}{506}+\ldots$

18. $\frac{4}{100}+\frac{16}{200}+\frac{64}{300}+\frac{256}{400}+\ldots$

19. $\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2\pi}{6}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{4\pi}{10}+\ldots$

20. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{4}{5}\right)^4+\ldots$

21. $\mathrm{arctg}\,1+\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\mathrm{arctg}\frac{1}{4}+\ldots$

22. $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}-\frac{3}{8}-\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\frac{6}{64}-\ldots$

23. $\frac{10}{2}+\frac{8}{3}+\frac{6}{4}+\frac{4}{5}+\ldots$

24. $\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}+\frac{2\cdot 3}{4\cdot 6}+\frac{3\cdot 4}{5\cdot 8}+\frac{4\cdot 5}{6\cdot 10}+\ldots$

25. $\frac{1}{5}-\frac{3}{9}+\frac{5}{13}-\frac{7}{17}+\ldots$

Задача 36. Исследовать сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

1. $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$, $b_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

2. $a_n = \dfrac{n!}{3^n}$, $b_n = \dfrac{(-1)^n}{10n+1}$.

3. $a_n = \dfrac{3^{2n}}{8^n}$, $b_n = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4n}$.

4. $a_n = \dfrac{n!\,n}{(2n)!}$, $b_n = \dfrac{1}{n^2+3n+1}$.

5. $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$, $b_n = \dfrac{n}{n^2+2}$.

6. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $b_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

7. $a_n = (0{,}5)^n\, n$, $b_n = \dfrac{\ln(3n)}{n^2}$.

8. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, $b_n = \dfrac{\sin n}{n^3+1}$.

9. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{2^n}}{\sqrt{3^n}}$, $b_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$.

10. $a_n = \dfrac{(2n+5)!}{(3n)!}$, $b_n = \dfrac{n^2+3}{n+1}$.

11. $a_n = \dfrac{n}{n^4+4}$, $b_n = \dfrac{1}{n^2-n+1}$.

12. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$, $b_n = \dfrac{n^2}{n^3+1}$.

13. $a_n = \dfrac{\ln(5n)}{n}$, $b_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{2n^2+1}$.

14. $a_n = \left(\dfrac{\sin n}{n}\right)^n$, $b_n = \arcsin\dfrac{1}{n}$.

15. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[5]{n^3}}$, $b_n = \sin\dfrac{1}{n}$.

16. $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$, $b_n = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}$.

17. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$, $b_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}+1}$.

18. $a_n = \dfrac{120n}{n^2+n-1}$, $b_n = \dfrac{n+1}{n^3+1}$.

19. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $b_n = \dfrac{n^4}{5n^4+1}$.

20. $a_n = \dfrac{1}{1+n^2}$, $b_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

21. $a_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2-1}$, $b_n = \dfrac{n+1}{n^2+3n}$.

22. $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, $b_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$.

23. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \dfrac{e^{-n}}{n}$.

24. $a_n = (-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$, $b_n = \operatorname{tg}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)$.

25. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $b_n = \dfrac{n+1}{n^3+1}$.

Задача 37. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

1. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{n!}$.

2. $a_n = \dfrac{2^n}{n(n+1)}$.

3. $a_n = \dfrac{(2n)!}{n^n}$.

4. $a_n = \dfrac{7^n n!}{(n+1)^n}$.

5. $a_n = \dfrac{(-1)^n\cdot n}{3^n(n+1)}$.

6. $a_n = \dfrac{3^n}{\sqrt[n]{n}}$.

7. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.   8. $a_n = \dfrac{(n+1)^2}{2^n(n+2)}$.   9. $a_n = \dfrac{3^n}{\sqrt{2^n(3n-1)}}$.

10. $a_n = (-1)^n \dfrac{9^n}{n!}$.   11. $a_n = \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}$.   12. $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

13. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$.   14. $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$.   5. $a_n = (n-1)\cdot 3^{n-1}$.

16. $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.   17. $a_n = (-1)^n \cdot 10^n$.   18. $a_n = \dfrac{n}{(2n+1)!}$.

19. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n\cdot n!}$.   20. $a_n = \dfrac{n+2}{n(n+1)}$.   21. $a_n = \dfrac{(n+1)}{\sqrt[4]{(n+2)^5}}$.

22. $a_n = \dfrac{3^n\cdot n!}{\sqrt[4]{2^n(3n+1)^3}}$.   23. $a_n = \dfrac{n}{n^3+\sqrt{n}}$.   24. $a_n = \dfrac{2^n\cdot n!}{\sqrt[3]{(3n+1)^n}}$.

25. $a_n = \dfrac{7^n}{(n+1)^n}$.

Задача 38. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_o^b f(x)dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировав его почленно.

1. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{3}}$, $b=1$.   2. $f(x)=\cos\sqrt{x}$, $b=1$.

3. $f(x)=x\cdot \mathrm{arctg}x$, $b=0{,}5$.   4. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$, $b=0{,}5$.

5. $f(x)=x\cdot\ln(1-x^2)$, $b=0{,}5$.   6. $f(x)=x\cdot e^{-x}$, $b=0{,}5$.

7. $f(x)=\mathrm{arctg}x^2$, $b=0{,}5$.   8. $f(x)=\sin x^2$, $b=1$.

9. $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x^2}$, $b=1$.   10. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, $b=0{,}5$.

11. $f(x)=\cos^2 x$, $b=1$.   12. $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$, $b=1$.

13. $f(x)=\ln(10+x)$, $b=1$.   14. $f(x)=x\cdot\ln(1+x)$, $b=0{,}5$.

15. $f(x)=\sqrt[3]{8-x^3}$, $b=0{,}5$.   16. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, $b=0{,}5$.

17. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, $b=0{,}5$.   18. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, $b=0{,}5$.

19. $f(x)=\dfrac{x^4}{1-x}$, $b=0{,}5$.

20. $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $b=0{,}5$.

21. $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$, $b=0{,}2$.

22. $f(x)=\cos^2\left(\dfrac{x^2}{4}\right)$, $b=0{,}5$.

23. $f(x)=\sqrt{x}\cdot e^x$, $b=0{,}5$.

24. $f(x)=\ln(1+\sqrt{x})$, $b=0{,}25$.

25. $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\cos x$, $b=0{,}5$.

Задача 39. Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x;y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_o) = y_o$.

1. $y'=\cos x+y^2$; $y(0)=1$.
2. $y'=e^x+y^2$; $y(0)=0$.
3. $y'=y+y^2$; $y(0)=3$.
4. $y'=2e^y-xy$; $y(0)=0$.
5. $y'=\sin x+y^2$; $y(0)=1$.
6. $y'=e^x+y$; $y(0)=4$.
7. $y'=x^2+y^2$; $y(0)=2$.
8. $y'=\sin x+0{,}5y^2$; $y(0)=1$.
9. $y'=2e^y+xy$; $y(0)=0$.
10. $y'=x+x^2+y^2$; $y(0)=5$.
11. $y'=x-2y$; $y(0)=1$.
12. $y'=x^2y+y^3$; $y(0)=1$.
13. $y'=x+2y^2$; $y(0)=2$.
14. $y'=xy^2$; $y(0)=3$.
15. $y'=2y-0{,}5y^2$; $y(0)=2$.
16. $y'=2x-y$; $y(0)=2$.
17. $y'=3x^2-2y^2$; $y(0)=1$.
18. $y'=(2x-1)y-1$; $y(0)=0$.
19. $y'=(x-2)y-3$; $y(0)=1$.
20. $y'=e^x+\sin x+y^2$; $y(0)=0$.
21. $y'=x^3-\dfrac{2y^2}{x}$; $y(1)=2$.
22. $y'=\dfrac{y}{x}-\dfrac{\cos x}{x}$; $y(1)=1$.
23. $y'=y\cdot\operatorname{tg}x+\dfrac{2x}{\cos x}$; $y(0)=1$.
24. $y'=4y+e^x$; $y(0)=0$.
25. $y'=x^2-\dfrac{y}{x+1}$; $y(0)=2$.

Задача 40. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье в интервале $(a;\, b)$. Построить графики функции $f(x)$ и частичных сумм $S_0(x)$, $S_1(x)$ ряда Фурье в указанном интервале.

1. $f(x)=x+1$ в интервале $(-\pi;\ \pi)$.
2. $f(x)=x^2+1$ в интерв. $(-2;\ 2)$.
3. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ в интервале $(-\pi;\ \pi)$.
4. $f(x)=|x|+1$ в интер. $(-1;\ 1)$.
5. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases}$ в $(-\pi;\ \pi)$.
6. $f(x)=|x-1|$ в интерв. $(-2;\ 2)$.
7. $f(x)=|x|$ в интервале $(-\pi;\ \pi)$.
8. $f(x)=x-1$ в интерв. $(-1;\ 1)$.
9. $f(x)=x^2$ в интервале $(0;\ 2\pi)$.
10. $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$ в $(-\pi;\ \pi)$.

11. $f(x)=\begin{cases} x-\pi, & -\pi\le x<0, \\ x+\pi, & 0\le x<\pi \end{cases}$ в $(-\pi;\ \pi)$.

12. $f(x)=2x-1$ в интерв. (0; 2).

13. $f(x)=\begin{cases} 1, & -\pi\le x<0, \\ x, & 0\le x<\pi \end{cases}$ в $(-\pi;\ \pi)$.

14. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ в интерв. $(0;\ 2\pi)$.

15. $f(x)=\begin{cases} x+\pi, & -\pi\le x<0, \\ x-\pi, & 0\le x<\pi \end{cases}$ в $(-\pi;\ \pi)$.

16. $f(x)=2x$ в интерв. (–1; 1).

17. $f(x)=10-x$ в интервале (–5; 5).

18. $f(x)=x^2-\dfrac{x}{2}$ в интерв. (0; 2).

19. $f(x)=3x+2$ в интервале (–1; 1).

20. $f(x) = x + 1$ в интервале (–2; 2).

21. $f(x) = 2x + 3$ в интервале (–2; 2).

22. $f(x) = x – 3$ в интервале (–3; 3).

23. $f(x)=\begin{cases} -x, & 0\le x<1, \\ x, & 1\le x<2 \end{cases}$ в (0; 2).

24. $f(x) = x(x + 1)$ в инт. (–2; 2).

25. $f(x)=\begin{cases} x+3, & 0\le x<1, \\ x^2, & 1\le x<2 \end{cases}$ в интервале (0; 2).

Контрольная работа №8

Теория вероятностей и математическая статистика

Задача 41.

1. Из слова «математика» выбирается случайно четыре буквы. Какова вероятность того, что из этих букв можно составить слово: а) мама; б) тема?
2. Электричка состоит из 10 вагонов. Трое знакомых не договорились о вагоне, в котором поедут. Какова вероятность, что они окажутся в одном вагоне?
3. На шахматную доску из 64 клеток ставятся наудачу две ладьи белого и черного цвета. Найти вероятность того, что одна ладья не будет бить другую.
4. Из колоды в 36 карт наудачу выбирают три карты. Какова вероятность того, что это: а) три туза; б) два короля и дама?
5. Из колоды в 36 карт наудачу выбирают четыре карты. Какова вероятность того, что это: а) карты одного цвета; б) карты одной масти?
6. Найти вероятность того, что в наудачу взятом шестизначном телефонном номере все цифры четные.
7. Двое бросают поочередно монету. Выигрывает тот, у кого первого выпадет герб. Какова вероятность, что будет произведено более пяти бросаний.
8. Подбрасывается три игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 9(событие A) или 10 (событие B) очков?
9. Брошены три игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) на двух выпавших гранях появится одно очко, а на третьей грани – другое число очков; б) на двух выпавших гранях появится одинаковое число очков, а на третьей грани – другое число очков.
10. В ящике 10 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 5 зеленых. Наудачу извлечены 3 шара. Найдите вероятность того, что все 3 шара разного цвета.

11. В бригаде 4 женщины и 3 мужчины. Среди членов бригады разыгрывается 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины?
12. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 3 изделия. Найдите вероятность того, что в полученной выборке одно изделие бракованное.
13. Из 10 билетов выигрышными являются два. Чему равна вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один выигрышный?
14. В лотерее разыгрывается 100 билетов. Выигрыш падает на 10 билетов . Некто купил 3 билета. Какова вероятность того, что хотя бы один из них выиграет?
15. В ящике находятся 6 белых и 9 красных шаров. Из ящика извлечены 3 шара. Найдите вероятность того, что два из них окажутся белыми.
16. На восьми одинаковых карточках написаны числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, и 13. Наугад берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.
17. В урне 6 зелёных, 5 красных и 4 белых шара. Из урны поочередно извлекают шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того. что первый шар зеленый , второй красный, а третий белый.
18. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным или 3, или 7, или 21.
19. В круг радиуса R вписан квадрат. Найдите вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадет в данный квадрат. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.
20. Отрезок разделен на четыре равные части. На отрезок на удачу брошено восемь точек. Найти вероятность того, что на каждую из четырех частей отрезка попадет по две точки. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.
21. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что сумма $x + y$ будет не больше трех, а частное x/y не больше двух.
22. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Найдите вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадет в данный треугольник. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.
23. В круг радиуса R вписан равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадет в данный треугольник. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорционально площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.
24. Стержень длиной a произвольным образом сломан на три части. Какова вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник?
25. В прямоугольник с вершинами $K(-2,0)$, $L(-2,5)$, $M(1,5)$, $N(1,0)$ брошена точка. Какова вероятность того, что ее координаты (x, у) будут удовлетворять неравенствам $x^2+1 \le y \le 3 - x$?

Задача 42.

1. Студент знает 30 из 40 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) все три вопроса; б) только два вопроса.
2. В каждой из двух урн находятся 5 белых и 10 черных шаров. Из первой урны переложили во вторую наудачу один шар, а затем из второй урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется черным.
3. По данным Госторгинспекции, 40% поступающего на наш рынок кофе и 30% растительного масла не удовлетворяют ГОСТам. Найти вероятность того, что среди купленных 2 банок кофе и 3 бутылок масла найдется хотя бы одна бракованная покупка.
4. Для одной торпеды вероятность потопить корабль равна 0,4. Какова вероятность того, что пять торпед потопят корабль, если для потопления корабля достаточно одного попадания в цель?
5. Для сигнализации о пожаре установлены три независимо работающие устройства. Вероятность того, что при пожаре сработает первое устройство, равна 0,9, второе – 0,95, третье – 0,85. Найти вероятность того, что при пожаре сработает: а) хотя бы одно устройство; б) все три устройства.
6. Три стрелка в одинаковых и независимых условиях произвели по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8, третьим – 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков попал в цель; б) только два стрелка попали в цель.
7. Всхожесть ржи составляет 80%. Чему равна вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырех?
8. На трех станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляют 10%, на втором – 30%, на третьем – 60% всех деталей. Вероятность каждой детали быть бездефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке, 0,8 – на втором, и 0,9 – на третьем станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бездефектной.
9. Производится 4 выстрела по мишени с вероятностью попадания 0,2 при отдельном выстреле. Какова вероятность попадания в цель ровно 3 раза?
10. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятность попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,2; 0,3 и 0,4
11. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность поломки за смену для них соответственно равна 0,2, 0,05 и 0,1. Найти вероятность того, что за смену сломаются менее двух станков.
12. Хлопок смешан с вискозой в пропорции 1:2. Какова вероятность того, что в случайном соединении трех волокон два окажутся вискозными?
13. Найти вероятность того, что выбранное наудачу изделие является первосортным, если известно, что 4% всей продукции является браком, а 75% небракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта
14. Партия электрических лампочек на 25% изготовлена первым заводом. На 35% – вторым, на 40% – третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны 0,03, 0,02, 0,01. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампочка окажется бракованной?

15. Студент сдает зачет, причем получает один вопрос из трех разделов. Первые два раздела одинаковы по объему, а третий в два раза больше первого. Студент знает ответы на 80 % вопросов первого раздела, на 60 % вопросов второго и на 70 % вопросов третьего. Студент сдал зачет. Найти вероятность того, что ему попался вопрос из второго раздела.
16. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами в количественном отношении 1: 2: 3, причем вероятности брака для этих заводов соответственно равны 3%, 2%, 1% . Приобретенный прибор оказался бракованным. Какова вероятность, что этот прибор произведен на первом заводе (марка завода на приборе отсутствовала)?
17. Две из четырех независимо работающих деталей прибора отказали. Найти вероятность того, что отказали первая и вторая детали, если вероятности отказа первой, второй, третьей и четвертой деталей соответственно равны 0,1; 0,2; 0,3 и 0,4.
18. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 1600 испытаниях событие наступит 1200 раз.
19. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,02. Найти вероятность того, что при 150 испытаниях событие наступит 5 раз.
20. В партии из 1000 изделий имеются 10 дефектных. Найти вероятность того, что из 50 изделий, взятых наудачу из этой партии, ровно три окажутся дефектными.
21. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 125 испытаниях событие наступит не менее 75 и не более 90 раз.
22. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Сколько надо приобрести билетов, чтобы вероятность выигрыша была не менее 0,5?
23. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены четыре независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность
24. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.
25. На фабрике изготавливаются изделия определенного вида на 3 поточных линиях. На первой линии производится 45% изделий, на второй – 35%, на третьей – остальная часть продукции. Каждая линия характеризуется соответственно следующими процентами годности изделий: 98%, 96%, 94%. Определить вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным.

Задача 43. В городе имеются N оптовых баз. Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах одинакова и равна p. Составить ряд распределения вероятностей числа баз, на которых искомый товар в данный момент отсутствует. Найти математическое ожидание и дисперсию числа оптовых баз, на которых товар отсутствует.

1. $N = 2$, $p = 0{,}11$.	2. $N = 3$, $p = 0{,}05$.	3. $N = 4$, $p = 0{,}1$.
4. $N = 2$, $p = 0{,}12$.	5. $N = 3$, $p = 0{,}1$.	6. $N = 4$, $p = 0{,}2$.

7. $N = 2$, $p = 0{,}13$. 8. $N = 3$, $p = 0{,}15$. 9. $N = 4$, $p = 0{,}3$.
10. $N = 2$, $p = 0{,}14$. 11. $N = 3$, $p = 0{,}2$. 12. $N = 4$, $p = 0{,}4$.
13. $N = 2$, $p = 0{,}15$. 14. $N = 3$, $p = 0{,}25$. 15. $N = 4$, $p = 0{,}5$.
16. $N = 2$, $p = 0{,}16$. 17. $N = 3$, $p = 0{,}3$. 18. $N = 4$, $p = 0{,}6$.
19. $N = 2$, $p = 0{,}17$. 20. $N = 3$, $p = 0{,}35$. 21. $N = 4$, $p = 0{,}7$.
22. $N = 2$, $p = 0{,}18$. 23. $N = 3$, $p = 0{,}4$. 24. $N = 4$, $p = 0{,}8$.
25. $N = 2$, $p = 0{,}19$.

Задача 44. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины. Построить график функции $F(x)$.

1. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$
2. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ (x^2-x)/2, & x\in(1;2];\\ 1, & x>2.\end{cases}$

3. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}25x^2, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>1.\end{cases}$
4. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^3, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$

5. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 3x^2+2x, & 0<x\le 1/3;\\ 1, & x>1/3.\end{cases}$
6. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ (x-2)/2, & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$

7. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2/9, & 0<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$
8. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2/4, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$

9. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\pi/2;\\ \cos x, & -\pi/2<x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$
10. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2\sin x, & x\in(0;\pi/6];\\ 1, & x>\pi/6.\end{cases}$

11. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2/25, & 0<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$
12. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2/16, & x\in(0;4];\\ 1, & x>4.\end{cases}$

13. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^3/8, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$
14. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 4x^2+3x, & 0<x\le 0{,}25;\\ 1, & x>0{,}25.\end{cases}$

15. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2/4, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$
16. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 4x^2, & 0<x\le 0{,}5;\\ 1, & x>0{,}5.\end{cases}$

17. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^3/64, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$
18. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ (x^2-x)/12, & x\in(1;4];\\ 1, & x>4.\end{cases}$

19. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2/49, & x\in(0;7];\\ 1, & x>7.\end{cases}$ 20. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^4/16, & x\in(0;2];\\ 1, & x>2.\end{cases}$

21. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ (2x^2-x)/45, & x\in(1;5];\\ 1, & x>5.\end{cases}$ 22. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\pi/4;\\ \cos 2x, & x\in(3\pi/4;\pi];\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$

23. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 8;\\ (x-8)/8, & x\in(8;16];\\ 1, & x>16.\end{cases}$ 24. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^3/27, & x\in(0;3];\\ 1, & x>3.\end{cases}$

25. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ (x^2+3x)/28, & x\in(0;4];\\ 1, & x>4.\end{cases}$

Задача 45. Известны математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной величины x. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$. Начертить четыре графика функции $f(x,a,\sigma)$ плотности распределения случайной величины x при (a,σ), $(2a,\sigma)$, $(a,2\sigma)$ и $(a,\sigma/2)$.

1. a = 1, σ = 1, α = 2, β = 5. 2. a = 2, σ = 2, α = 3, β = 5.
3. a = 3, σ = 3, α = 4, β = 6. 4. a = 4, σ = 4, α = 4, β = 6.
5. a = 5, σ = 1, α = 2, β = 7. 6. a = 6, σ = 2, α = 3, β = 7.
7. a = 7, σ = 3, α = 4, β = 8. 8. a = 8, σ = 4, α = 4, β = 8.
9. a = 5, σ = 1, α = 2, β = 9. 10. a = 6, σ = 2, α = 3, β = 9.
11. a = 3, σ = 3, α = 4, β = 5. 12. a = 4, σ = 4, α = 4, β = 5.
13. a = 1, σ = 1, α = 2, β = 6. 14. a = 2, σ = 2, α = 3, β = 6.
15. a = 3, σ = 3, α = 4, β = 7. 16. a = 4, σ = 4, α = 4, β = 7.
17. a = 5, σ = 1, α = 2, β = 8. 18. a = 6, σ = 2, α = 3, β = 8.
19. a = 7, σ = 3, α = 4, β = 9. 20. a = 8, σ = 4, α = 4, β = 9.
21. a = 5, σ = 1, α = 2, β = 5. 22. a = 6, σ = 2, α = 3, β = 5.
23. a = 3, σ = 3, α = 4, β = 6. 24. a = 4, σ = 4, α = 4, β = 6.
25. a = 1, σ = 1, α = 2, β = 7.

Задача 46. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ, зная выборочную среднюю $\bar{x}$, объем выборки n и среднее квадратичное отклонение σ.

1. $\bar{x}$ = 1,01, n = 81, σ = 1, γ = 0,91. 2. $\bar{x}$ = 1,02, n = 4, σ = 2, γ = 0,92.
3. $\bar{x}$ = 1,03, n = 9, σ = 3, γ = 0,93. 4. $\bar{x}$ = 1,04, n = 16, σ = 4, γ = 0,94.
5. $\bar{x}$ = 1,05, n = 25, σ = 5, γ = 0,95. 6. $\bar{x}$ = 1,06, n = 36, σ = 6, γ = 0,96.
7. $\bar{x}$ = 1,07, n = 49, σ = 7, γ = 0,97. 8. $\bar{x}$ = 1,08, n = 64, σ = 8, γ = 0,98.
9. $\bar{x}$ = 1,09, n = 81, σ = 9, γ = 0,99. 10. $\bar{x}$ = 1,10, n = 100, σ = 10, γ = 0,9.

11. $\bar{x} = 1{,}11$, $n = 121$, $\sigma = 11$, $\gamma = 0{,}91$. 12. $\bar{x} = 1{,}12$, $n = 144$, $\sigma = 12$, $\gamma = 0{,}92$.
13. $\bar{x} = 1{,}13$, $n = 169$, $\sigma = 13$, $\gamma = 0{,}93$. 14. $\bar{x} = 1{,}14$, $n = 196$, $\sigma = 14$, $\gamma = 0{,}94$.
15. $\bar{x} = 1{,}15$, $n = 225$, $\sigma = 15$, $\gamma = 0{,}95$. 16. $\bar{x} = 1{,}16$, $n = 256$, $\sigma = 16$, $\gamma = 0{,}96$.
17. $\bar{x} = 1{,}17$, $n = 289$, $\sigma = 17$, $\gamma = 0{,}97$. 18. $\bar{x} = 1{,}18$, $n = 324$, $\sigma = 18$, $\gamma = 0{,}98$.
19. $\bar{x} = 1{,}19$, $n = 361$, $\sigma = 19$, $\gamma = 0{,}99$. 20. $\bar{x} = 1{,}20$, $n = 400$, $\sigma = 20$, $\gamma = 0{,}9$.
21. $\bar{x} = 1{,}21$, $n = 441$, $\sigma = 21$, $\gamma = 0{,}91$. 22. $\bar{x} = 1{,}22$, $n = 484$, $\sigma = 22$, $\gamma = 0{,}92$.
23. $\bar{x} = 1{,}23$, $n = 529$, $\sigma = 23$, $\gamma = 0{,}93$. 24. $\bar{x} = 1{,}24$, $n = 576$, $\sigma = 24$, $\gamma = 0{,}94$.
25. $\bar{x} = 1{,}25$, $n = 625$, $\sigma = 25$, $\gamma = 0{,}95$.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	074	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849	1,60	0,4452	2,00	0,4772	2,80	0,4974
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869	1,61	0,4463	2,02	0,4783	2,82	0,4976
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883	1,62	0,4474	2,04	0,4793	2,84	0,4977
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907	1,63	0,4484	2,06	0,4803	2,86	0,4979
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925	1,64	0,4495	2,08	0,4812	2,88	0,4980
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944	1,65	0,4505	2,10	0,4821	2,90	0,4981
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962	1,66	0,4515	2,12	0,4830	2,92	0,4982
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980	1,67	0,4525	2,14	0,4838	2,94	0,4984
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997	1,68	0,4535	2,16	0,4846	2,96	0,4985
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015	1,69	0,4545	2,18	0,4854	2,98	0,4986
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032	1,70	0,4554	2,20	0,4861	3,00	0,49865
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049	1,71	0,4564	2,22	0,4868	3,20	0,49931
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066	1,72	0,4573	2,24	0,4875	3,40	0,49966
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082	1,73	0,4582	2,26	0,4881	3,60	0,49984
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099	1,74	0,4591	2,28	0,4887	3,80	0,49993
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115	1,75	0,4599	2,30	0,4893	4,00	0,49997
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131	1,76	0,4608	2,32	0,4898	4,50	0,49999
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147	1,77	0,4616	2,34	0,4904	5,00	0,49999
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162	1,78	0,4625	2,36	0,4909	если $x > 0,5$,	
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177	1,79	0,4633	2,38	0,4913	то $\Phi(x) \cong 0,5$	
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192	1,80	0,4641	2,40	0,4918		
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207	1,81	0,4649	2,42	0,4922		
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222	1,82	0,4656	2,44	0,4927		
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236	1,83	0,4664	2,46	0,4931		
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251	1,84	0,4671	2,48	0,4934		
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265	1,85	0,4678	2,50	0,4938		
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279	1,86	0,4686	2,52	0,4941		
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292	1,87	0,4693	2,54	0,4945		
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306	1,88	0,4699	2,56	0,4948		
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319	1,89	0,4706	2,58	0,4951		
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332	1,90	0,4713	2,60	0,4953		
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345	1,91	0,4719	2,62	0,4956		
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357	1,92	0,4726	2,64	0,4959		
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370	1,93	0,4732	2,66	0,4961		
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382	1,94	0,4738	2,68	0,4963		
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394	1,95	0,4744	2,70	0,4965		
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406	1,96	0,4750	2,72	0,4967		
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418	1,97	0,4756	2,74	0,4969		
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429	1,98	0,4761	2,76	0,4971		
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441	1,99	0,4767	2,78	0,4973		