Системы дифференциальных уравнений

ВАРИАНТ 1

1. Показать, что система функций

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right), \\ y_2 = e^{2x}\left(\left(c_1 + c_2\right)\cos x + \left(c_2 - c_1\right)\sin x\right) \end{cases}$$

– общее решение СДУ: $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 + 3y_2. \end{cases}$

2. Решить СДУ $\begin{cases} t^2 - 6x + 2t\dot{x} = 0, \\ \dot{y} = \dfrac{t}{y} + \dfrac{2yx}{t^3}, \end{cases}$ $\quad x(-1) = \dfrac{1}{2}, \quad y(1) = 0.$

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 5y + 3e^t, \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \dfrac{dy}{2y^3} = \dfrac{dz}{2y^2 z}.$

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{2x + 3y}, \\ \dot{y} = \dfrac{y}{2x + 3y}, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \; y(0) = 2.$

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 6e^{2t} \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = \left(-1/3, -4/3\right)^T, \end{cases}$

используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (1, 0, 0)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + ctg\, t, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Свести ДУ $y^{IV} - y = 4\sin x - 8e^{-x} + 1$ к СДУ в нормальной форме, решить ДУ, записать ответ СДУ в векторной форме.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (1, 0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 2

1. Построить семейство фазовых траекторий системы $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$ методом изоклин; найти аналитически общее решение системы; выделить интегральную кривую, проходящую через точку $(1, 1)$, и построить ее. Сравнить результаты.

2. Решить СДУ $\begin{cases} t\,\dot{x} - x = \sqrt{x^2 + t^2}, \\ \dot{y} + \dfrac{1 - 2t}{t^2} y = \dfrac{4xe^{2/t}}{t^2 - 4}, \end{cases}$ $x(2) = 0$, $y(2) = -4e$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y + e^t, \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{x - y} = \dfrac{dy}{x + y} = \dfrac{dz}{z}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{x+y}, \\ \dot{y} = \dfrac{y}{x+y}, \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 4$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ \sin 2t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (-1, -1)^T, \end{cases}$

используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (0, 0, -1)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Свести ДУ $y^{IV} + 2y'' + y = \cos x$ к СДУ в нормальной форме, решить ДУ, записать ответ СДУ в векторной форме.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (1, 0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 3

1. Показать, что функции $\psi_1 = \sin x - \sin y$ и $\psi_2 = \sin x - z$ определяют линейно независимые первые интегралы СДУ $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \cos x, \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{\cos y}. \end{cases}$

2. Решить СДУ $\begin{cases} t^2\dot{x}^2 - 4t\,x\,\dot{x} + 3x^2 = 0, \\ t\,\dot{y} - y = x\,t^2 e^t, \end{cases}$ $x(1) = 1$, $y(1) = -44e$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = -x - 6y, \\ \dot{y} = x + 4y + \cos t \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{y(z-1)} = \dfrac{dy}{x(z-1)} = \dfrac{dz}{-xy}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + xy, \\ \dot{y} = xy + y^2, \end{cases}$ $x(1) = 1$, $y(1) = 2$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overline{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \\ \overline{x}(0) = (1, 0)^T, \end{cases}$ используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\overline{x}} = A\overline{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $\overline{x}(0) = (-7, 3, 1)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + e^t \sin(e^t), \\ \dot{y} = x - y + e^t \sin(e^t), \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Свести ДУ $y''' + y = e^{2x}(x^2 + x + 1)$ к СДУ в нормальной форме, решить ДУ, записать ответ в векторной форме.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix}, \\ \overline{x}(0) = (0, 0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 4

1. Показать, что вектор-функция

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \frac{2}{5}\sin 2x + \frac{1}{5}\cos 2x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x \end{pmatrix}$$

является общим решением СДУ: $\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

2. Решить СДУ $\begin{cases} t^2\dot{x}^2 - 3\dot{x}\,x\,t + 2x^2 = 0, \\ t\,\dot{y} - y = e^t t\,x, \end{cases}$ $x(1) = 1$, $y(1) = -2e$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = -x - 8y + \cos 2t, \\ \dot{y} = x + 5y \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{(x-z)^2} = \frac{dz}{x}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} e^t\dot{x} = 1/y, \\ e^t\dot{y} = 1/x, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\overline{x} + \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 4 \end{pmatrix}, \\ \overline{x}(0) = (1, 1)^T, \end{cases}$

используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\overline{x}} = A\overline{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $\overline{x}(0) = (1, 0, 0)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + 2{,}5\cdot e^{3t}, \\ \dot{y} = 2x - y + e^{-3t}, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Свести ДУ $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$ к СДУ в нормальной форме, решить ДУ, записать ответ в векторной форме.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (-1,\, 0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 5

1. Показать, что система функций $\begin{cases} y_1 = e^{-x}(c_1 + c_2 x), \\ y_2 = e^{-x}(c_1 + 0{,}5c_2 + c_2 x) \end{cases}$

является общим решением СДУ $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -3y_1 + 2y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 + y_2. \end{cases}$

2. Решить СДУ $\begin{cases} xdt - tdx = tdt, \\ \dfrac{x\,y\,t^{y-1}dt}{t(1-\ln t)} + t^y \ln t\, dy = 0, \end{cases}$ $x(e) = 0$, $y(e) = 1$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - 2e^t, \\ \dot{y} = x + 3y + e^t \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{x}$.

5. Найти частный интеграл $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{3}{2x - y}, \\ \dot{y} = \dfrac{6x}{2x - y}, \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -3\cos 3t \\ t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0,\, 0)^T, \end{cases}$

используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (-5, 2, 5)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = y - x + 4t^2 e^{t^2}, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Свести ДУ $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 2 - t$ к СДУ в нормальной форме, решить ДУ, записать ответ в векторной форме.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (-1, 0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 6

1. Показать, что функции $\psi_1 = x + y - t$ и $\psi_2 = (x + y)(x - t)$ определяют линейно независимые первые интегралы СДУ: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y + t}{x + y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x - t}{x + y}. \end{cases}$

2. Решить СДУ $\begin{cases} t\dot{x} = x + \sqrt{x^2 - t^2}, \\ \dot{y} \dfrac{t}{t^2 + y^2} = \dfrac{y^2}{t^2 + y^2} - \dfrac{2x}{t^2 + 1}, \end{cases}$ $x(1) = y(1) = 0$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + t, \\ \dot{y} = 2x - 3y \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{(z - y)^2} = \dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{y}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dot{x} = 2\left(x^2 + y^2\right), \\ \dot{y} = 4xy, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -t \\ \cos 2t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (1,\, 0)^T, \end{cases}$

используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (1,\, 0,\, 1)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y - 3z, \\ \dot{y} = -6x + 2y + 6z, \\ \dot{z} = 6x - 2y - 6z, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = 2$, сведением к одному ДУ.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (1,\, -1)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 7

1. Показать, что вектор-функции $\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$ являются линейно-независимыми на $(-\infty, \infty)$. Построить СДУ, для которой они образуют фундаментальную систему решений.

2. Решить СДУ $\begin{cases} t(\dot{y}-y)=(1+t^2)e^t, \\ x^2+(1-x)\dot{x}=0, \end{cases}$ $x(1)=1, \quad y(1)=e$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x}=3x+y-\sin 2t, \\ \dot{y}=x+3y \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{z-y}=\dfrac{dy}{x-z}=\dfrac{dz}{y-x}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dot{x}=z(x+z), \\ \dot{y}=-y(y+z), \\ \dot{z}=0, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=z(0)=1$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}}=\begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\bar{x}+\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0)=(2,2)^T, \end{cases}$ используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}}=A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0)=(1,2,0)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x}=2x-2y+\dfrac{e^t}{1+e^t}, \\ \dot{y}=x-y, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Записать СДУ $\begin{cases} y''=y'+z, \\ z'=\left(\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}-1\right)y'-\left(\dfrac{1}{x}+1\right)z-\dfrac{2}{x^3}y \end{cases}$ в нормальной форме. Решить СДУ, сведя ее к одному дифференциальному уравнению.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\bar{x}+\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0)=(0,0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 8

1. Найти и построить траекторию и фазовую траекторию системы $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x \end{cases}$ при $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

2. Решить СДУ $\begin{cases} t\,\dot{x} = x\left(1 + \ln\dfrac{x}{t}\right), \\ \dfrac{t + y\dot{y}}{\sqrt{t^2 + y^2}} = \dfrac{xye^{t/2}}{t^3} = \dfrac{y}{t^2}, \end{cases}$ $x(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, $y(1) = \sqrt{3}$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 9y + e^t, \\ \dot{y} = x + 4y + 4e^t \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{z-1} = \dfrac{dy}{(z-x)^2} = \dfrac{dz}{x-1}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x-y}{z-t}, \\ \dot{y} = \dfrac{x-y}{z-t}, \\ \dot{z} = x - y + 1, \end{cases}$ $\begin{array}{l} x(1) = y(1) = 1, \\ z(1) = 2. \end{array}$

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (1,\ 1)^T, \end{cases}$ используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 5 & -7 & 0 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (2, 2, 1)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y + th\,t, \\ \dot{y} = x - 2y, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = x - z, \\ \dot{y} = -6x + 2y + 6z, \\ \dot{z} = 4x - y - 4z, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$

сведением к одному ДУ.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0,\, 0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 9

1. Найти и построить траекторию и фазовую траекторию системы $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x \end{cases}$ при $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

2. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} + 2xt = 2t\,e^{-t^2}, \\ tdy - \dfrac{xye^{t^2}}{t^2} dt = ydy, \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y - e^{-2t}, \\ \dot{y} = x + y - \cos 2t \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{-y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{10}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z^2}{z+y}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y^2}{z+y}, \end{cases}$ $y(0) = 2$, $z(0) = 1$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 4t-1 \\ t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0,\, 0)^T, \end{cases}$

используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (1, -1, 0)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = y + tg\, t, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Свести СДУ к одному дифференциальному уравнению. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = 5x - y, \\ \dot{y} = 5y, \\ \dot{z} = 10x. \end{cases}$

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (1, 1)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 10

1. Показать, что функции $\psi_1 = \dfrac{y}{x}$, $\psi_2 = z - x - y$ определяют линейно-независимые первые интегралы системы $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x+y}{x}, \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$

2. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = 2x - t^2, \\ \dot{y} = \dfrac{8t\,xy}{(t^2 - y^2)(2t^2 + 2t + 1)} \end{cases}$, $x\big|_{t=0} = \dfrac{1}{4}$, $y\big|_{t=0} = 1$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y + e^{4t}, \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \dfrac{dy}{-y(x^2 + z^2)} = \dfrac{dz}{z(x^2 + y^2)}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{x+3y}, \\ \dot{y} = \dfrac{3y}{x+3y}, \end{cases}$ $x(1) = y(1) = 1$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = \left(\dfrac{17}{18}, -\dfrac{19}{18} \right)^T, \end{cases}$ используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (1, 0, -1)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Свести СДУ к одному дифференциальному уравнению. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = 10x - 3y - 9z, \\ \dot{y} = 7y - 18x + 18z, \\ \dot{z} = 18x - 17z - 6y. \end{cases}$

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0, 1)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 11

1. Показать, что вектор-функция

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t (2\cos t - \sin t) \\ e^t (3\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$$

является общим решением СНЛДУ

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5e^t \sin t \end{pmatrix}.$$

2. Решить СДУ $\begin{cases} t\,dy - \dfrac{2yx}{t^2}\,dt = t^3 \ln t\,dt, \\ t^2 \dot{x}^2 - 4t\,x\,\dot{x} + 4x^2 = 0, \end{cases}$ $\quad x(1) = y(1) = 1$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = -4x - y + t \cdot e^{4t}, \\ \dot{y} = x - 4y + 2e^{4t} \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{z+3} = \dfrac{dy}{-y} = \dfrac{dz}{x+3}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x-t}, \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 1$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (2, 1)^T, \end{cases}$ используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (2, 0, 0)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1}, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = -3x + y - 2z, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$, $z(0) = 0$, сведением к одному дифференциальному уравнению.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0,\, 0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 12

1. Показать, что вектор-функция

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^x \cos 3x \\ e^x \sin 3x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^x \sin 3x \\ -e^x \cos 3x \end{pmatrix}$$

является общим решением уравнения

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dy_2}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} + \dfrac{1-2t}{t^2} x = \dfrac{y e^{2/t + t - 1}}{t}, \\ t\,\dot{y} = y \ln \dfrac{y}{t}, \end{cases}$ $x(1) = -e^2$, $y(1) = 1$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 2t, \\ \dot{y} = 4x - 2y \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{2x - z} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{2z - x}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} t^2 \\ -2t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (1, -1)^T, \end{cases}$

используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (-2, 0, 0)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + e^{2t} \cos(e^t), \\ \dot{y} = x - y, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Записать систему в нормальной форме $\begin{cases} \ddot{x} = x^2 + y, \\ \dot{y} + 2x\dot{x} = x \end{cases}$ и решить при $x(0) = \dot{x}(0) = 1$, $y(0) = 0$.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0, 0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 13

1. Построить фундаментальную систему решений, нормированную при $t = 0$, для СДУ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$

2. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{y} - \dfrac{4xy}{t^4} = tg\,\dfrac{y}{t}, \\ t\,dx = \left(t^3 - x\right)dt, \end{cases}$ $x(1) = \dfrac{1}{4}$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y, \\ \dot{y} = 3x - y + 3\sin 2t \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{2z - y} = \dfrac{dy}{x - 4z} = \dfrac{dz}{4y - 2x}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dot{x} = 3 - x - y, \\ \dot{y} = 3 - x - y, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (2,\, 0)^T, \end{cases}$ используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (0, 1, 0)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = y - 1 + tg^2\, t, \\ \dot{y} = -x + tg\, t, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Решить СДУ сведением к одному ДУ $\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = 3x + z, \\ \dot{z} = 3x + y, \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = z(0) = 1$.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0, 0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 14

1. Показать, что вектор-функция $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$ является общим решением СНЛДУ $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2. Решить СДУ $\begin{cases} 2t\,x\,\dot{x} = 2x^2 + \sqrt{x^4 + t^4}, \\ t\dot{y} - \dfrac{y}{t+1} = \dfrac{\sqrt{2}xt}{\pm\sqrt{t(t^2-1)}}, \end{cases}$ $x(1) = y(1) = 0$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4y, \\ \dot{y} = 4x + 3y + \sin 3t \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{\cos y} = \dfrac{dy}{\cos x} = \dfrac{dz}{\cos x \cdot \cos y}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2xy, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (1, 1)^T, \end{cases}$ используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (0, -1, 0)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 3x - \dfrac{e^{-t}}{t}, \\ \dot{y} = y - x, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Решить СДУ сведением к одному ДУ: $\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = -x - z, \\ \dot{z} = -x - y, \end{cases}$ $x(0) = -1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0, 0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 15

1. Найти и построить траекторию и фазовую траекторию системы $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ при $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

2. Решить СДУ $\begin{cases} ty' + y = \ln t + 1, \\ \left(t - x\cos\dfrac{x}{t}\right)dt + t\cos\dfrac{x}{t}\,dx = 0, \end{cases}$ $x(1) = \dfrac{\pi}{2}$, $y(1) = 0$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y + \cos t, \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{mz - ny} = \dfrac{dy}{nx - lz} = \dfrac{dz}{ly - mx}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y}{x - y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{x - y}, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0, -1)^T, \end{cases}$ используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (0, 0, 1)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Записать СДУ $\begin{cases} y'' - z = 0, \\ z'' - y = 0 \end{cases}$ в нормальной форме. Свести к одному ДУ. Решить систему при $y(0) = z(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $z'(0) = 0$.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0, 0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 16

1. Построить систему линейных дифференциальных уравнений, для которой вектор-функции $\begin{pmatrix} 2e^t \\ 3e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2e^{3t} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений.

2. Решить СДУ $\begin{cases} t\,\dot{y} + y = \ln t + 1, \\ \dot{x} = \dfrac{x^2}{t^2} - \dfrac{xy}{t \ln t} \end{cases}$ $x(1) = 1$, $y(1) = 0$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y, \\ \dot{y} = x + y + \sin t \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{0} = \dfrac{dy}{z(y+x)} = \dfrac{dz}{-x(z-x)}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sin x \cdot \cos y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \cos x \cdot \sin y, \end{cases}$ $x(0) = \pi$, $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \overline{x} + \begin{pmatrix} 4t-1 \\ 3t \end{pmatrix}, \\ \overline{x}(0) = (-1, 0)^T, \end{cases}$ используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\overline{x}} = A\overline{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $\overline{x}(0) = (0, 0, -1)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = -y - \dfrac{1}{\sin^2 t}, \\ \dot{y} = x - ctg\, t, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Решить СДУ сведением к одному ДУ: $\begin{cases} \dot{x} = x + y + z + e^t, \\ \dot{y} = x + y + z + e^{-3t}, \\ \dot{z} = x + y + z + 4 \end{cases}$ $x(0) = y(0) = z(0) = 0$.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overline{x} + \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \overline{x}(0) = (0, 2)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 17

1. Какие из функций $\psi_1=(x+y)e^{2t}$, $\psi_2=xye^{-t}$, $\psi_3=(2y-x)e$, $\psi_4=\dfrac{10x}{y+e^{2t}}$, $\psi_5=\dfrac{5xy}{e^t}$ определяют первые интегралы системы

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x^2}{y},\\ \dfrac{dy}{dt}=y-x.\end{cases}$$

Запишите общий интеграл системы.

2. Решить СДУ $\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{x^2}{t^2}+7\dfrac{x}{t}+8,\\ \dot{y}+\dfrac{x\,y\,tgt}{4t}+y^2\cos t=0,\end{cases}$ $x(1)=-4$, $y(1)=\dfrac{1}{\cos 1}$.

3. Решить СДУ $\begin{cases}\dot{x}=4x-2y+\sin t,\\ \dot{y}=x+2y+t\end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y-z}=\dfrac{dz}{z+y}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases}e^t\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{y},\\ e^t\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{x},\end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=2$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases}\dot{\overline{x}}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 5 & -1\end{pmatrix}\overline{x}+\begin{pmatrix}\sin 3t\\ 0\end{pmatrix},\\ \overline{x}(0)=(-3,0)^T,\end{cases}$

используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\overline{x}}=A\overline{x}$, если матрица A задана в виде

$A=\begin{pmatrix}3 & 12 & -4\\ -1 & -3 & 1\\ -1 & -12 & 6\end{pmatrix}$ и $\overline{x}(0)=(1,0,0)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^{t}, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Решить СДУ $\begin{cases} \ddot{x} + x = y + z, \\ \ddot{y} + y = x + z, \\ \ddot{z} + z = x + y. \end{cases}$

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0, 0)^{T} \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 18

1. Какие из функций $\psi_1 = x + y - t$, $\psi_2 = 5x - y + t$, $\psi_3 = 2x + 2y$, $\psi_4 = x + y + t$, $\psi_5 = \cos x + e^{y} + t^{2}$ определяют первые интегралы системы $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{y + t}{x + t}, \\ \dot{y} = \dfrac{x - t}{x = y}. \end{cases}$ Записать общий интеграл системы.

2. Решить СДУ $\begin{cases} t\,\dot{y} - \dfrac{4yx}{t} = t^{2}\sqrt{y}, \\ \dot{x} = \dfrac{x^{2}}{t^{2}} - \dfrac{3x}{t} + 3, \end{cases}$ $x(1) = 1$, $y(1) = \dfrac{1}{4}$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y, \\ \dot{y} = x - 4y + e^{-3t} \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{4z - 5y} = \dfrac{dy}{5x - 3z} = \dfrac{dz}{3y - 4x}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{2y}{x-y}, \\ \dot{y} = \dfrac{2x}{x-y}, \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -t^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0,3)^T, \end{cases}$

используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (-1, 0, 0)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Привести к нормальной форме СДУ и решить ее: $\begin{cases} y'' + 2z' - y + 2z = 1, \\ z'' + 2y' + 2y - z = x \end{cases}$, $y'(0) = \dfrac{2}{3}$, $y(0) = -\dfrac{7}{9}$, $z'(0) = \dfrac{1}{3}$, $z(0) = -\dfrac{2}{9}$.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} e \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0,0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 19

1. Убедиться, что функции $\psi_1 = xy$ и $\psi_2 = \dfrac{z}{x}$ определяют независимые первые интегралы системы $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{x}, \\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}. \end{cases}$ Записать общее
решение системы.

2. Решить СДУ $\begin{cases} t\,\dot{y} + y = xy^2\,\dfrac{\ln t}{2t}, \\ \dot{x} = \dfrac{x^2}{t^2} - \dfrac{5x}{t} + 8, \end{cases}$ $x(1) = 2$, $y(1) = 1$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x - y + 4t \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{2y} = \dfrac{dy}{-\ln x} = \dfrac{dz}{\ln x - 2y}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{x-3y}, \\ \dot{y} = \dfrac{y}{x-3y}, \end{cases}$ $x(0) = 3$, $y(0) = 2$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \overline{x} + \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}, \\ \overline{x}(0) = (-2,\, 2)^T, \end{cases}$

используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\overline{x}} = A\overline{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ и $\overline{x}(0) = (1,\, 0,\, 2)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + e^{2t}\cos e^{t}, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Привести к нормальной форме СДУ, решить ее: $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - y = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - x = 0, \end{cases}$

$x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$, $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0, 2)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 20

1. Найти и построить траекторию и фазовую траекторию системы $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ при $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

2. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{y} = -\dfrac{4y}{x+4} + \dfrac{y^2 x}{4t}, \\ \dot{x} = \dfrac{x^2}{t^2} - \dfrac{9x}{t} + 24, \end{cases}$ $x(1) = 4$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 6y + e^{-t}, \\ \dot{y} = x + y + e^{t} \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \dfrac{dy}{2xy} = \dfrac{dz}{2xz}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dot{x} = \cos x \cdot \cos y, \\ \dot{y} = -\sin x \cdot \sin y, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -t \\ 3\cos t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (1, 1)^T, \end{cases}$

используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (-1, 0, 2)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Привести к нормальной форме СДУ $\begin{cases} x^2 y'' + x z' + y + z = x + 1, \\ x^2 z'' + x y' - y - z = -x - 1. \end{cases}$

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (2, 0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 21

1. Показать, что вектор-функции $\begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -2 \\ \cos t \end{pmatrix}$ являются линейно-независимыми на $(-\infty, \infty)$. Построить ЛСДУ, для которой они образуют фундаментальную систему решений.

2. Решить СДУ $\begin{cases} t\,\dot{x} = x\left(1 + \ln\dfrac{x}{t}\right), \\ t\left(1 + t^2\right)dy = \left(\dfrac{yxe^{t/2}}{t} + yt^2 - t^2\right)dt, \end{cases}$ $x(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, $y(1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + e^t, \\ \dot{y} = x - y + \cos t \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{z - y - 1} = \dfrac{dz}{2y + 1}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{(z - y)^2}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y}{(z - y)^2} \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 1$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \overline{x} + \begin{pmatrix} t^2 \\ -2 \end{pmatrix}, \\ \overline{x}(0) = (0, -2)^T, \end{cases}$ используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\overline{x}} = A\overline{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $\overline{x}(0) = (0, -2, 0)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = y - 1 + tg^2\, t, \\ \dot{y} = -x + tg\, t, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Привести к нормальной форме СДУ $\begin{cases} y'' + y' + z'' + z' = e^x, \\ y' + 2y + z' + z = e^{-x}. \end{cases}$ Решить ее.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \overline{x}(0) = (1, 0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 22

1. Показать, что вектор-функции $\begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -2 \\ t \end{pmatrix}$ являются линейно-независимыми на $(-\infty, \infty)$. Построить ЛСДУ, для которой они образуют фундаментальную систему решений.

2. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2}{t^2} - 7\dfrac{x}{t} + 15, \\ \dot{y} = \dfrac{2}{3}xy + 2t^3y^3, \end{cases}$ $x(1) = 3$, $y(1) = 1$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2y + 2e^{2t} \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{t\,dt}{y^2 - 2xy - x^2} = \dfrac{dx}{x+y} = \dfrac{dy}{x-y}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{2y}, \\ \dot{y} = \dfrac{4y}{x}, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}e^t, \\ \bar{x}(0) = (0, 0)^T, \end{cases}$ используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (0, -2, 0)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 3x - \dfrac{e^{-t}}{t}, \\ \dot{y} = y - x, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Привести к нормальной форме СДУ $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2m^2 y = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2m^2 x = 0, \ (m > 0), \end{cases}$

решить ее.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0, 1)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 23

1. Построить ЛСДУ, если ее фундаментальная матрица решений имеет вид $\Phi = \begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ 0 & 2e^{2t} & -e^{-t} \\ -e^t & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

2. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x}\left(1 - t^2\right) + xt = 1, \\ \dot{y} = \dfrac{2yx}{t^2 + y^2}, \end{cases}$ $x(2) = 2$, $y(2) = 1$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 8y, \\ \dot{y} = x - y + e^{-t} \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{2x - z} = \dfrac{dy}{1} = \dfrac{dz}{x}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} t\,dx = (t - 2x)\,dt, \\ t\,dy = (tx + ty + 2x - t)\,dx, \end{cases}$ $x(1) = 2$, $y(1) = 0$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 4t+2 \\ 3t^2/2+1 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (-1, 2)^T, \end{cases}$

используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (9, -5, 1)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + \dfrac{1}{\sin t}, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Привести к нормальной форме СДУ $\begin{cases} y'' + y' + z'' - z = e^x, \\ y' + 2y - z' + z = e^{-x} \end{cases}$ и решить.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (1, 0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 24

1. Построить фундаментальную систему решений, нормированную при $t = 0$, для СДУ $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y + x, \\ \dfrac{dx}{dt} = -5y - 3x. \end{cases}$

2. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{y}\cos t = y\sin t + \dfrac{x}{5t\cos t}, \\ \dot{x} = \dfrac{x^2}{t^2} - 11\dfrac{x}{t} + 35, \end{cases}$ $x(1) = 5$, $y(1) = 0$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x} = -5x - y + e^{-5t}, \\ \dot{y} = x - 5y + (1+t)e^{-5t} \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{z(x+z)} = \dfrac{dy}{-y(y+z)} = \dfrac{dz}{0}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} -2e^{2t} \\ 6e^{2t} \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (-1, -1)^T, \end{cases}$ используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0) = (0, -1, 0)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x} = y + t^2, \\ \dot{y} = x + 2e^t, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Привести к нормальной форме СДУ $\begin{cases} y'' - 3y - 4z + 3 = 0, \\ z'' + y + z - 5 = 0 \end{cases}$ и решить ее.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (1, 0)^T \end{cases}$ по формуле Коши.

ВАРИАНТ 25

1. Построить фундаментальную систему решений, нормированную при $t=0$, для СДУ $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=2y, \\ \dfrac{dx}{dt}=y+2x. \end{cases}$

2. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x}=\dfrac{x^2}{t^2}+3\dfrac{x}{t}, \\ \dot{y}=\dfrac{t^2}{y}-y-\dfrac{x}{2}, \end{cases}$ $\quad x(1)=0$, $\quad y(1)=1$.

3. Решить СДУ $\begin{cases} \dot{x}=4x+3y+2\sin 3t, \\ \dot{y}=3x+4y \end{cases}$ сведением к одному ДУ. Общее решение записать в векторной форме.

4. Найти общий интеграл СДУ $\dfrac{dx}{3z-2y}=\dfrac{dy}{2x-5z}=\dfrac{dz}{5y-3x}$.

5. Найти частный интеграл СДУ $\begin{cases} x\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y}{x}, \end{cases}$ $\quad x(0)=3$, $y(0)=1$.

6. Найти частное решение СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}}=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\bar{x}+\begin{pmatrix} 4t+1 \\ \dfrac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0)=(0,0)^T, \end{cases}$

используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ.

7. Методом Эйлера решить $\dot{\bar{x}}=A\bar{x}$, если матрица A задана в виде $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}(0)=(0,1,0)^T$.

8. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{x}=3x-3y+e^t, \\ \dot{y}=x-y+t, \end{cases}$ применяя метод вариации произвольных постоянных.

9. Решить СДУ сведением к одному ДУ $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y - 4z, \\ \dot{y} = -2x + y - 2z, \\ \dot{z} = 5x + 2y + 7z, \end{cases}$

$x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

10. Решить СНЛДУ $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}, \\ \bar{x}(0) = (0, -1)^T \end{cases}$ по формуле Коши.