Контрольная работа № 2

I. Схема Горнера

Задание 1. Переразложите многочлен $f(x)$ по степеням $x - a$.
а) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 11x - 1, \quad a = -1.$
б) $f(x) = -3x^4 - 2x^3 + 6x^2 - x + 2, \quad a = -2.$

Задание 2. Определите кратность корня x_0 многочлена $f(x)$.
а) $f(x) = 2x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 8x + 3, \quad x_0 = -1.$
б) $f(x) = 3x^5 - 12x^4 + 14x^3 - 7x^2 + 4x + 4, \quad x_0 = 2.$

II. Алгоритм Евклида

Задание 3. Представьте $d(x) = \text{НОД}\,(f(x), g(x))$ в виде $f(x)u(x) + g(x)v(x)$.
а) $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + x + 1, \quad g(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 5.$
б) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1, \quad g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2.$

III. Теорема о факторизации и производная многочлена

Задание 4. Найдите $d(x) = \text{НОД}\,(f(x), g(x))$ и $m(x) = \text{НОК}\,(f(x), g(x))$.
а) $f(x) = (x^4 - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1), \quad g(x) = (x^3 - 1)(x^2 - 1)(x + 1).$
б) $f(x) = (x^4 - 1)(x^3 + 8)(x - 1), \quad g(x) = (x^2 - 4x + 4)(x^2 - 1)(x - 1).$

Задание 5. Разложите многочлен $f(x)$ на неприводимые множители над $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.
а) $f(x) = x^3 + 27.$
б) $f(x) = x^8 + 4.$

Задание 6. Используя процедуру выделения кратных множителей, найдите разложение многочлена $f(x)$ на линейные множители.
а) $f(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 8.$
б) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 7x + 2.$

IV. Рациональные корни и неприводимость над $\mathbb{Q}$

Задание 7. Найдите рациональные корни многочлена $f(x)$.
а) $f(x) = 4x^5 + 8x^4 - 59x^3 + 67x^2 - 28x + 4.$
б) $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12.$

Задание 8. Пользуясь критерием Эйзенштейна, докажите неприводимость многочлена $f(x)$ над $\mathbb{Q}$.
а) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 5x + 1.$
б) $f(x) = x^4 - x^3 + 2x + 1.$

V. Евклидовы пространства

Задание 9. С помощью процесса ортогонализации постройте ортогональный базис подпространства $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$.
а) $a_1 = (1, 2, 2, -1)$, $a_2 = (1, 1, -5, 3)$, $a_3 = (3, 2, 8, -7)$.
б) $a_1 = (1, 1, -1, -2)$, $a_2 = (5, 8, -2, -3)$, $a_3 = (3, 9, 3, 8)$.

Задание 10. Найдите ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора x относительно подпространства $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$. Вычислите угол между x и L.

а) $x = (4, -1, -3, 4)$, $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$.

б) $x = (5, 2, -2, 2)$, $a_1 = (2, 1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 1, 3, 0)$, $a_3 = (1, 2, 8, 1)$.

Задание 11. Вычислите двумя способами объём параллелепипеда $\Pi(a_1, a_2, a_3)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

а) $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (-1, 0, 2)$, $a_3 = (2, -3, 1)$.

б) $a_1 = (3, 1, 0)$, $a_2 = (-1, -2, 2)$, $a_3 = (1, -1, -1)$.

VI. Линейные операторы

Задание 12. а) Линейное преобразование φ вещественного 3-мерного векторного пространства задано в базисе a_1, a_2, a_3 матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите $\operatorname{Im}(\varphi)$, $\operatorname{Ker}(\varphi)$ и матрицу A'_φ преобразования φ в базисе

$$a'_1 = 2a_1 + 3a_2 + a_3, \quad a'_2 = 3a_1 + 4a_2 + a_3, \quad a'_3 = a_1 + 2a_2 + 2a_3.$$

б) Линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан в базисе

$$a_1 = (1, 0, 0), \quad a_2 = (-1, 1, 0), \quad a_3 = (2, -1, -1)$$

матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите $\operatorname{Im}(\varphi)$, $\operatorname{Ker}(\varphi)$ и матрицу A'_φ оператора φ в базисе

$$a'_1 = (-1, -1, 1), \quad a'_2 = (0, -1, 2), \quad a'_3 = (0, 0, 1).$$

Задание 13. Линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей A_φ в стандартном базисе. Выясните, является ли этот оператор диагонализируемым. Найдите базис, в котором матрица оператора φ диагональна, а также укажите эту диагональную матрицу.

а) $A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. б) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Задание 14. Линейное преобразование φ евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ имеет в базисе

$$a_1 = (0, -1), \quad a_2 = (1, 2)$$

матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выясните, является ли это преобразование самосопряжённым. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ диагональна, а также укажите эту диагональную матрицу.

VII. Квадратичные формы

Задание 15. Приведите квадратичную форму $q(x_1, x_2, x_3)$ к каноническому виду методом Лагранжа.

а) $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

б) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Задание 16. При каких $a \in \mathbb{R}$ квадратичная форма $q(x_1, x_2, x_3)$ будет положительно определённой?

а) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

б) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Задание 17. Приведите квадратичную форму $q(x_1, x_2, x_3)$ к каноническому виду ортогональным преобразованием (приведение к главным осям).

а) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

б) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

VIII. Векторные пространства

Задание 18. а) Подпространства L_1 и L_2 пространства $\mathbb{R}^5$ заданы однородными системами уравнений:

$$L_1 = \{x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 = -2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0\},$$
$$L_2 = \{-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -4x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0\}.$$

Найдите базис суммы $L_1 + L_2$ этих подпространств.

б) Подпространство L_1 пространства $\mathbb{R}^5$ задано однородной системой уравнений:

$$L_1 = \{-3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0\}.$$

Подпространство L_2 пространства $\mathbb{R}^5$ порождено векторами

$$b_1 = (0, 5, 5, 5, 0), \quad b_2 = (1, 0, -1, 2, 1), \quad b_3 = (-3, 0, 0, 5, 1).$$

Найдите базис суммы $L_1 + L_2$ этих подпространств.

Задание 19. а) Подпространство L_1 пространства $\mathbb{R}^4$ порождено векторами

$$a_1 = (1, 2, 1, -2), \quad a_2 = (2, 3, 1, 0), \quad a_3 = (1, 2, 2, -3),$$

а подпространство L_2 — векторами

$$b_1 = (1, 1, 1, 1), \quad b_2 = (1, 0, 1, -1), \quad b_3 = (1, 3, 0, -4).$$

Найдите базис пересечения $L_1 \cap L_2$ этих подпространств.

б) Подпространство L_1 пространства $\mathbb{R}^4$ порождено векторами

$$a_1 = (1, 1, 0, 0), \quad a_2 = (0, 1, 1, 0), \quad a_3 = (0, 0, 1, 1),$$

а подпространство L_2 — векторами

$$b_1 = (1, 0, 1, 0), \quad b_2 = (0, 2, 1, 1), \quad b_3 = (1, 2, 1, 2).$$

Найдите базис пересечения $L_1 \cap L_2$ этих подпространств.

Ответы

1.

а) $f(x) = 2(x+1)^4 - 11(x+1)^3 + 16(x+1)^2 + 4(x+1) - 12$.
б) $f(x) = -3(x+2)^4 + 22(x+2)^3 - 54(x+2)^2 + 47(x+2) - 4$.

2.

а) 3.
б) 2.

3.

а) $d(x) = x+1$, $u(x) = -9/2 - 13x/10$, $v(x) = -11/10 - 7x/10 + 13x^2/10$.
б) $d(x) = x-1$, $u(x) = -3/11 + 2x/11$, $v(x) = 7/11 + x/11 - 2x^2/11$.

4.

а) $d(x) = (x-1)(x+1)^2(x^2+x+1)$, $m(x) = (x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)(x^2+x+1)$.
б) $d(x) = (x-1)^2(x+1)$, $m(x) = (x+2)(x+1)(x-1)^2(x-2)^2(x^2-2x+4)(x^2+1)$.

5.

а) $f(x) = (x+3)(x^2-3x+9)$ над полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$,

$$f(x) = (x+3)(x - 3/2 + 3i\sqrt{3}/2)(x - 3/2 - 3i\sqrt{3}/2)$$

над полем $\mathbb{C}$.

б) $f(x) = (x^4 - 2x^2 + 2)(x^4 + 2x^2 + 2)$ над полем $\mathbb{Q}$,

$$f(x) = \prod_{k=0}^{3}\left(x^2 - (2^{5/4}\cos{(2k+1)\pi/8})x + \sqrt{2}\right) = \prod\left(x^2 \pm (2\sqrt{2} \pm 2)^{1/2}x + \sqrt{2}\right)$$

над полем $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \prod_{k=0}^{7}\left(x - 2^{1/4}(\cos{(2k+1)\pi/8} + i\sin{(2k+1)\pi/8})\right)$$

над полем $\mathbb{C}$.

6.

а) $f(x) = (x-1)^2(x+2)^3$.
б) $f(x) = (x-1)^4(x+2)$.

7.

а) $x_1 = 2$, $x_2 = 1/2$.
б) $x_1 = -3$, $x_2 = 1/2$.

8.

а) Можно взять $p=3$ после замены $x=y-1$.

б) Можно взять $p=3$ после замены $x=y+1$.

1.

а) Базис L_1 образуют векторы

$$a_1=(-1,-6,7,4,0),\quad a_2=(-1,-4,1,0,2),$$

а базис L_2 — векторы

$$b_1=(5,7,8,0,0),\quad b_2=(-3,-1,0,8,0),\quad b_3=(0,0,0,0,1).$$

Базис L_1+L_2 образуют векторы a_1, a_2, b_1, b_2.

б) Базис L_1 образуют векторы

$$a_1=(3,4,5,0,0),\quad a_2=(-3,1,0,5,0),\quad a_3=(0,-1,0,0,1),$$

а базис L_2 — векторы b_1, b_2, b_3. Базис L_1+L_2 образуют векторы a_1, a_2, a_3, b_2.

в) Базис L_1 образуют векторы

$$a_1=(1,1,0,0,2),\quad a_2=(0,0,1,0,3),\quad a_3=(-2,0,0,1,0),$$

а базис L_2 — векторы

$$b_1=(-1,2,0,0,0),\quad b_2=(1,0,2,-2,2).$$

Базис L_1+L_2 образуют векторы a_1, a_2, a_3, b_1.

г) Базис L_1 образуют векторы

$$a_1=(0,0,0,1,0),\quad a_2=(1,1,3,0,10),$$

а базис L_2 — векторы b_1, b_2, b_3. Базис L_1+L_2 образуют векторы a_1, a_2, b_1, b_2.

2.

а) Базис $L_1\cap L_2$ образуют векторы

$$c_1=-2a_1+a_2+a_3=b_1,\quad c_2=5a_1-a_2-2a_3=b_3.$$

б) Базис $L_1\cap L_2$ образуют векторы

$$c_1=a_1+a_2+a_3=b_1+b_2=(1,2,2,1),\quad c_2=2a_1+2a_3=b_1+b_3=(2,2,2,2).$$

в) Базис $L_1\cap L_2$ образуют векторы

$$c_1=a_1+a_2+a_3=b_1,\quad c_2=a_1+a_2=b_3.$$

г) Базис $L_1\cap L_2$ образует вектор $c=-2b_1+3b_2=(-8,3,3,-2)$.

3.

а) $b_1 = (1,2,2,-1)$, $b_2 = (2,3,-3,2)$, $b_3 = (2,-1,-1,-2)$.
б) $b_1 = (1,1,-1,-2)$, $b_2 = (2,5,1,3)$.

4.

а) $x' = (1,-1,-1,5)$, $x'' = (3,0,-2,-1)$, $\arccos\sqrt{2/3}$.
б) $x' = (3,1,-1,-2)$, $x'' = (2,1,-1,4)$, $\arccos\sqrt{15/37}$.

5.

а) 19.
б) 13.

6.

а) $y = -9x/5 - 1/10$.
б) $y = -9x/5 + 17/10$.

7.

а) $\sqrt{14}$.
б) 2.

8.

а) Скрещиваются, расстояние

$$\min_{X_1\in\Pi_1, X_2\in\Pi_2} |X_1 - X_2| = |X_1^* - X_2^*| = |(2,1,-2,0)| = 3,$$

где $X_1^* = (2,1,-1,-2) + t(1,2,2,2) \in \Pi_1$, $X_2^* = (0,0,1,-2) + t(1,2,2,2) \in \Pi_2$.
б) То же, что и п. а), но с заменой Π_1 на Π_2 и наоборот.

1.

а) $\mathrm{Im}\,(\varphi) = \langle a_1 + a_3, -a_1 - a_2 - 2a_3\rangle$, $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \langle a_1 + a_2 + a_3\rangle$,

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы перехода от базиса a_1, a_2, a_3 к базису a'_1, a'_2, a'_3 и обратно таковы:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) $\mathrm{Im}\,(\varphi) = \langle (4,-1,-2), (3,-1,-1)\rangle$, $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \langle (0,0,1)\rangle$,

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 0 \\ -14 & -9 & 0 \\ 22 & 14 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы перехода от базиса a_1, a_2, a_3 к базису a'_1, a'_2, a'_3 и обратно таковы:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

2.

а) В базисе

$$a_1' = (1,1,1), \quad a_2' = (1,1,0), \quad a_3' = (-1,0,3)$$

оператор φ имеет диагональную матрицу, равную

$$A_\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

б) Оператор φ не является диагонализируемым, поскольку двукратному собственному значению $\lambda_1 = 1$ и однократному собственному значению $\lambda_2 = 2$ соответствуют одномерные собственные подпространства $L_{\lambda_1} = \langle (1,1,0) \rangle$ и $L_{\lambda_2} = \langle (2,1,1) \rangle$.

3.

Преобразование φ является самосопряжённым, так как

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$$

для любых векторов $x,\ y \in \mathbb{R}^2$. В ортонормированном базисе

$$a_1' = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \quad a_2' = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

это преобразование имеет диагональную матрицу

$$A_\varphi' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.

а) $q(x_1,x_2,x_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, где

$$x_1 = \frac{y_1}{2} + y_2, \quad x_2 = y_2 + y_3, \quad x_3 = -y_2 + y_3.$$

б) $q(x_1,x_2,x_3) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, где

$$x_1 = y_1 - y_2 - y_3, \quad x_2 = y_1 + y_2 - y_3, \quad x_3 = y_3.$$

5.

а) $-4/5 < a < 0$.
б) Ни при каких.

6.

а) $q(x_1,x_2,x_3) = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, где

$$x_1 = \frac{y_1}{\sqrt{3}} + \frac{y_2}{\sqrt{6}} + \frac{y_3}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{y_1}{\sqrt{3}} + \frac{y_2}{\sqrt{6}} - \frac{y_3}{\sqrt{2}}, \quad x_3 = \frac{y_1}{\sqrt{3}} - \frac{2y_2}{\sqrt{6}}.$$

б) $q(x_1,x_2,x_3) = 3y_1^2 - 6y_2^2$, где

$$x_1 = \frac{2y_1}{3} + \frac{y_2}{3\sqrt{2}} + \frac{y_3}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{y_1}{3} - \frac{4y_2}{3\sqrt{2}}, \quad x_3 = \frac{2y_1}{3} + \frac{y_2}{3\sqrt{2}} - \frac{y_3}{\sqrt{2}}.$$