Производная и дифференциал. Основные правила вычисления

Определение: Функция $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x, если её приращение

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \text{ представимо в виде: } \Delta y = A\cdot\Delta x + \overline{\mathrm{o}}\big(\Delta x\big),$$

где $A = const$ не зависит от Δx.

Замечание: При $A \neq 0$ данное тождество показывает, что бесконечно малая $A\Delta x$ эквивалентна бесконечно малой Δy, и, значит, служит для последней её главной частью.

Определение: Предел $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* x.

Замечание: Иногда данный предел удобно представить в виде: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x+x_n)-f(x)}{x_n}$, где $0\neq x_n \to 0$ при $n\to\infty$.

Теорема: Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда в данной точке существует конечная производная $f'(x)$. Причём в этом случае $A = f'(x)$.

Определение: Назовем главную часть приращения $A\Delta x = Adx$ *дифференциалом функции* $f(x)$. Обозначение dy или df. Имеем, $dy = f'(x)\,dx \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Операция дифференцирования обладает следующими свойствами:

1. $\big[\alpha f(x)+\beta g(x)\big]' = \alpha f'(x)+\beta g'(x)$, *(линейность);*
2. $\big[f(x)\cdot g(x)\big]' = f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$, *(производная произведения);*
3. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$, *(производная частного);*
4. $\Big[f\big(g(x)\big)\Big]' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$, *(производная суперпозиции);*

Определение: Выражениями $f'_-(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, $f'_+(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, определяются соответственно *левая и правая производные.*

14.1. • Пусть функция $f(x)$ дифференцируема и $n\in\mathbb{N}$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} n\,[f(x+1/n)-f(x)] = f'(x).$$

Будет ли верно обратное утверждение? То есть, достаточно ли существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+x_n)-f(x)}{x_n}$$

для фиксированной последовательности $\{x_n\}$, убывающей к 0, для существования производной $f'(x)$?

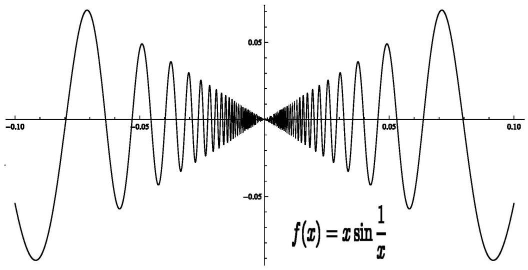
14.2. *(991, 992, 993)*

(а) • Покажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ \quad 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

непрерывна и дифференцируема в нуле, но имеет разрывную производную;

(б) При каком условии на параметр n функция

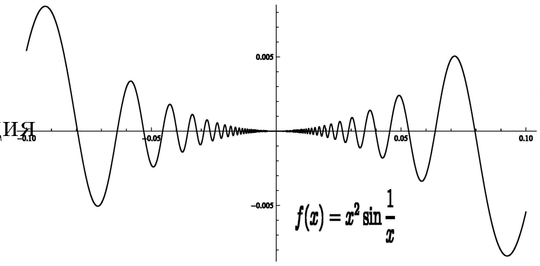


$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ \quad 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

- непрерывна при $x = 0$;

- дифференцируема при $x = 0$;

- имеет непрерывную производную при $x = 0$?



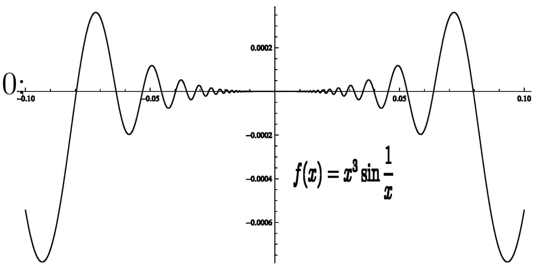
(в) При каком условии на параметры n и $m > 0$ функция

$$f(x) = \begin{cases} |x|^n \sin \dfrac{1}{|x|^m}, & \text{при } x \neq 0, \\ \quad 0, & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

имеет:

- ограниченную производную в окрестности точки $x = 0$;

- неограниченную производную в этой окрестности?



14.3. *(994, 995)*

(а) • Найдите $f'(a)$, если $f(x) = (x - a)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ непрерывна при $x = a$.

(б) Пусть $\varphi(x)$ непрерывная функция и $\varphi(a) \neq 0$. Покажите, что функция

$$f(x) = |x - a| \cdot \varphi(x)$$

не имеет производной в точке $x = a$.

14.4. Постройте пример функции:

(а) • имеющей производную только в одной точке;

(б) имеющей производную только в точках $x_1, \ldots, x_n$;

(в) имеющей производную только в счётном числе точек;

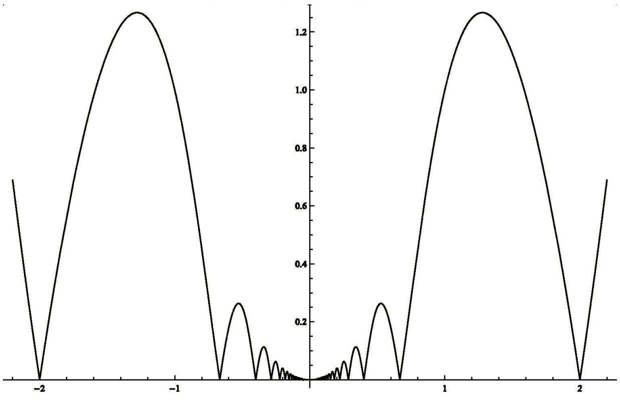
(г) непрерывной, но не дифференцируемой в точках $x_1, \ldots, x_n$;

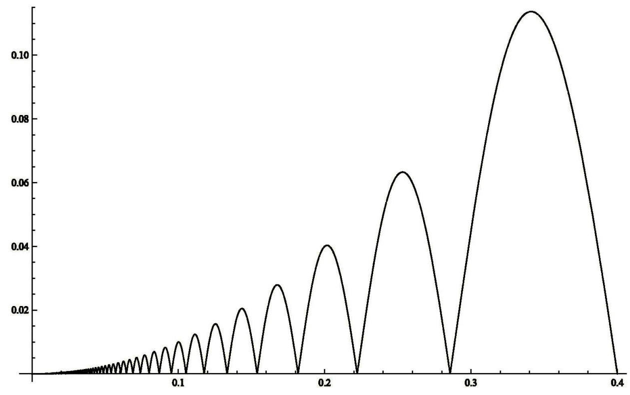
(д) непрерывной, но не дифференцируемой в бесконечном числе точек.

14.5. *(997)* • Покажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & \text{при } x \neq 0, \\ \quad 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

имеет точки не дифференцируемости в любой окрестности точки $x = 0$, но дифференцируема в этой точке.





14.6. Для функции $f(x)$ определите односторонние производные $f'_-(x)$, $f'_+(x)$, и исследуйте её на дифференцируемость:

(а) • $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$;

(б) $f(x) = x\sqrt{\ln(1 + x^2)}$;

(в) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ \quad 0, & \text{при } x = 0; \end{cases}$

(г) $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

В случае, когда функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x = x_0$ иногда получается найти *обобщенные односторонние производные*:

Определение: Пусть x_0 - точка разрыва первого рода функции $f(x)$. Выражения:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0-0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - 0)}{h}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}$$

называются *обобщёнными односторонними* (соответственно *левой и правой*) *производными функции* $f(x)$ в точке x_0.

14.7. *(1009.2)*

Найдите обобщённые производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ в точках разрыва функции $f(x)$, если:

(а) • $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{1 + x}{1 - x}$;

(б) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$;

(в) $f(x) = \mathrm{sgn}(x - x^3)$.

14.8.

(а) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$. То обязательно ли: 1) $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = \infty$, 2) $\overline{\lim\limits_{x \to a+0}} |f'(x)| = \infty$?

(б) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = \infty$. То

обязательно ли: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$?

14.9. Пусть
$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{при } x \geqslant a, \\ h(x), & \text{при } x < a. \end{cases}$$
Каким условиям должны удовлетворять непрерывные функции g и h, чтобы функция f была дифференцируемой на всей числовой прямой?

14.10. Функция $f(x)$ имеет производную при $x = a$. Вычислите следующие пределы:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\dfrac{1}{n}\right) - f\left(a-\dfrac{1}{n}\right)\right)$; *(б)* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x-a}$, $\quad n \in \mathbb{N}$;

(в) $\bullet$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)e^x - f(0)}{f(x)\cos x - f(0)}$, $\quad a = 0, \quad f'(0) \neq 0$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\dfrac{1}{n}\right) + f\left(a+\dfrac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(a+\dfrac{k}{n}\right) - k\cdot f(a)\right)$, $k \in \mathbb{N}$– фиксировано.

14.11. Имеют ли производные в точке $x = 0$, следующие функции:

(а) $y = x\cdot|\sin x|$; *(б)* $y = x\cdot|x^3|$?

(в) Пусть функция f определена и имеет производную на $\mathbb{R}$. В каких точках функция $|f(x)|$ имеет производную? При каком условии, производная функции $|f(x)|$ существует на $\mathbb{R}$?

14.12. $\star$ Приведите пример функции $f(x)$, такой что $\exists$ ограниченная производная $f'(x)$ всюду на $(-2;2)$. И множество $\left\{\pm\dfrac{1}{n},\, n\in\mathbb{N}\right\}$ есть множество точек разрыва функции $f'(x)$.

14.13. $\star$ Пусть функция $f(x)$ имеет на $(0;+\infty)$ непрерывную производную, $f(0) = 1$, $|f(x)| \leqslant e^{-x}$ для $\forall x \geqslant 0$. Докажите, что $\exists\, x_0 : f'(x_0) = -e^{-x_0}$.

14.14. $\star$ Существует ли непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$, действующая из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ такая, что для $\forall\, x \in \mathbb{R}$ выполнено:
$$f(x) > 0 \text{ и } f'(x) = f\big(f(x)\big) \text{ ?}$$

14.15. $\star$ Предположим, что функция $f(x)$ имеет производную в точке a, а последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ таковы, что при каждом $n \geqslant 1$
$$x_n \neq a, \;\; z_n \neq a, x_n \neq z_n; \quad x_n \to a, \;\; z_n \to a \text{ при } n\to\infty.$$
Докажите, что:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n}$ не обязательно существует;

(б) если дополнительно при каждом $n \geqslant 1$ $x_n < a < z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} = f'(a)$.

Производные функций, заданных параметрически

Теорема 1: Пусть $f(x)$ непрерывна на $(a;b)$ и строго монотонна, тогда существует функция $x=f^{-1}(y)$ непрерывная на $(\alpha;\beta)$, где $\alpha=\lim\limits_{x\to a+0} f(x),\ \ \beta=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

Теорема 2: Пусть $y=f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $f'(x)\neq 0$ для $\forall x\in(a;b)$. Тогда, если $\exists f^{-1}(y)$, то $f^{-1}(y)$ дифференцируема на $(\alpha;\beta)$ и $\Big[f^{-1}(y)\Big]'=\dfrac{1}{f'(x)}$.

Рассмотрим систему уравнений: $\begin{cases} x=\varphi(t); \\ y=\psi(t); \end{cases} \qquad t\in(\alpha;\beta) \qquad (*)$

Теорема 3: Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на $(\alpha;\beta)$ и функция $\varphi(t)$ строго монотонна на этом интервале, то система $(*)$ определяет y как однозначную непрерывную функцию от $x:\ \ y=\psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$, на $(a;b)$, где $a=\lim\limits_{t\to\alpha+0}\varphi(t),\ \ b=\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)$.

Теорема 4: Пусть $\varphi(t),\ \psi(t)$ дифференцируемы и $\varphi'(t)\neq 0,\ y(x)=\psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$. Тогда

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'_t}{\varphi'_t}.$$

15.1. *(760)* Найдите обратную функцию $x=x(y)$, если $y=x+[x]$.

15.2. *(761, 762)*
покажите, что

(а) существует единственная непрерывная функция $y=y(x)$ $(x\in\mathbb{R})$, удовлетворяющая *уравнению Кеплера*

$$y-\varepsilon\sin y=x \qquad (0<\varepsilon<1)$$

(б) уравнение $\mathrm{ctg}x=kx$ для $\forall k\in\mathbb{R}$ имеет в интервале $(0;\pi)$ единственный непрерывный корень $x=x(k)$.

15.3. • Является ли требование монотонности необходимым для существования однозначной обратной функции?

15.4. *(764)* В каком случае отображение $y=f(x)$ и обратное к нему $x=f^{-1}(y)$ представляют одну и ту же функцию?

15.5. • Может ли быть непрерывной функция, обратная к разрывной?

15.6. *(767, 769, 772)* Определите однозначные непрерывные ветви обратных функций для следующих функций:

(а) $y = x^2$; *(б)* $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$; *(в)* $y = \mathrm{tg}x$.

15.7. *(781)* $\bullet$ Пусть $x = \mathrm{ch}t, \quad y = \mathrm{sh}t, \quad t \in \mathbb{R}$.

В каких областях изменения параметра t переменную y можно рассматривать, как однозначную функцию от переменной x? Найти выражения y для различных областей.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, тогда

$$y - y_0 = y'_x \cdot (x - x_0) \; - \; \textit{уравнение касательной в точке } (x_0; y_0);$$
$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_x} \cdot (x - x_0) \; - \; \textit{уравнение нормали в точке } (x_0; y_0),$$

где y'_x– значение производной в точке касания.

15.8.

(а) Напишите уравнение касательной и нормали к кривой

$$\gamma: \; x = 2t - t^2, \;\; y = 3t - t^3$$

в точках: 1) $t = 0$; 2) $t = -1$; 3) $t = \infty$

(б) Напишите уравнение касательной и нормали к кривой

$$\gamma: \quad x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \;\; y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$$

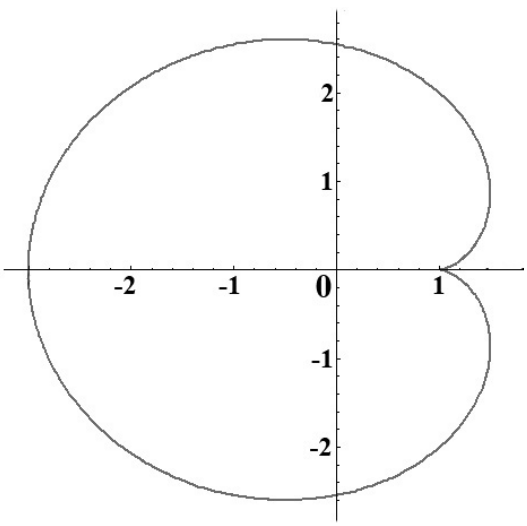
в точках: 1) $t = 0$; 2) $t = -1$; 3) $t = \infty$

15.9. Напишите уравнение касательной к *кардиоиде*

$$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t; \\ y = 2\sin t - \sin 2t; \end{cases}$$

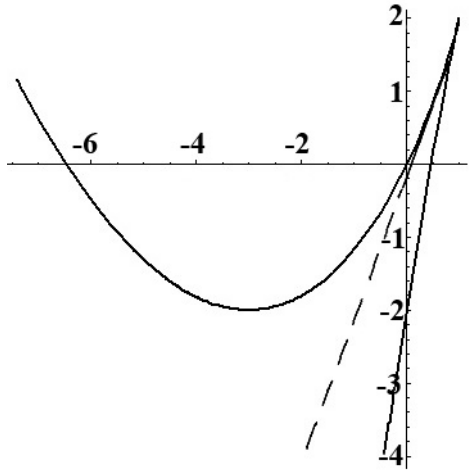
в точке t, если:

(а) $\bullet$ $t = \dfrac{\pi}{2}$; *(б)* $t = \dfrac{3\pi}{2}$; *(в)* $\bullet$ $t = \pi$.



<u>**Замечание:**</u> Более подробно об этой кривой можно узнать из обзорной статьи *В.Н. Березина "Кардиоида"//Квант. – 1977, № 12.*

15.10. *(пример точки возврата кривой)*



Напишите уравнение касательной к кривой

$$x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3$$

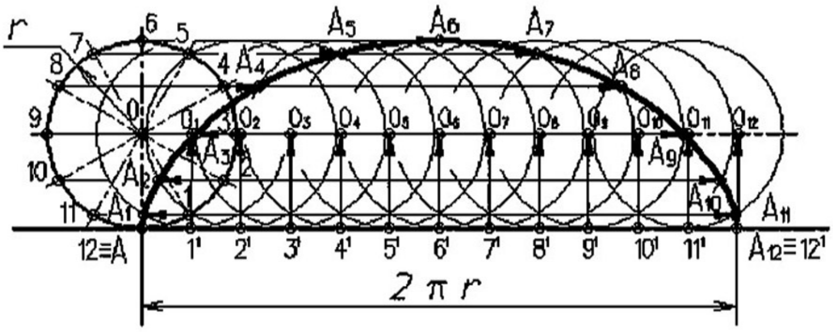
в точке $t = 1$.

15.11. • Напишите уравнение касательной к *циклоиде:*

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$$

в произвольной точке $t = t_0$. *Дайте способ построения касательной к циклоиде.*

<u>Замечание:</u> Циклоида определяется *кинематически* как траектория фиксированной точки производящей окружности радиуса r, катящейся без скольжения по прямой.



15.12. Пусть функция $y = f(x)$ задана уравнением:

$$r = a(1 + \cos\varphi), \;\; \varphi \in \left(0; \frac{2\pi}{3}\right),$$

где r и φ - *полярные координаты* точки $(x; y)$. Напишите уравнение касательной к данной кривой в точке φ_0.

<u>Замечание:</u> Требуется перейти к параметрическому виду, используя формулы перехода к полярным координатам: $\quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$.

15.13. *(касательная к эллипсу)* •

Пусть $y = y(x), \;\; x \in (-a; a)$ - функция, заданная неявно уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Возьмём точку $M_0(x_0; y_0)$, лежащую на данной кривой. Напишите уравнения касательной и нормали к рассматриваемой кривой в данной точке.

15.14. Проверьте, что

(а) любая касательная к *гиперболе*

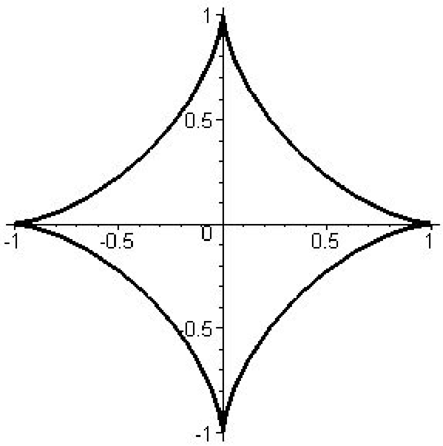
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

образует с её асимптотами треугольник постоянной площади.

(б) у *астроиды*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

для любой касательной длина её отрезка, заключенного между осями координат, постоянна.



Астроида

Замечание: *Астроида* — плоская кривая, описываемая точкой окружности радиуса r, катящейся по внутренней стороне окружности радиуса $R = 4r$.

(в) у *трактрисы*

$$x(t) = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right), \quad y(t) = a\sin t, 0 < t < \pi,$$

для любой касательной длина ее отрезка от точки касания до оси OX постоянна.

(г) расстояние от начала координат до любой нормали к кривой

$$x(t) \ = \ a \ (\cos t + t\sin t), \quad y(t) = a\,(\sin t - t\cos t)$$

постоянно.

(д) касательные к кривой

$$x(t) = a\,(t - \sin t), \quad y(t) = a\,(1 - \cos t),$$

проведённые в точках, соответствующих значениям t_0 и $t_0 + \pi$, перпендикулярны при любом $t_0 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Замечание: Важно отметить, что касательная, вообще говоря, не обязана иметь с графиком функции единственную общую точку.

15.15. $\bullet$ Постройте пример функции, отличной от постоянной, график которой имеет бесконечное количество точек пересечения с касательной в *любой* окрестности точки касания.

15.16. $\star$ Постройте непрерывное взаимно однозначное отображение полуинтервала на некоторое подмножество точек плоскости такое, что обратное к нему отображение разрывно.

Производные и дифференциалы высших порядков

Определение: *Производная порядка n* определяется индукционным соотношением:

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left[f^{(n-1)}(x)\right] \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Замечание: Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на интервале $(a;b)$, то пишут: $f(x) \in C^{(n)}(a;b)$. В частности, если $f(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков на $(a;b)$, это обозначают: $f(x) \in C^{(\infty)}(a;b)$.

Определение: *Дифференциалы порядка n* определяются формулами:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \ \ (n = 2, 3, \ldots), \quad \text{где принято } \ d^1 y = dy = y' dx.$$

Замечание:

1. Если x - независимая переменная, то полагают: $d^2x = d^3x = \ldots = 0$. В этом случае справедливо:
$$d^n y = y^{(n)} dx^n \ \Leftrightarrow \ y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$
2. Если $y = f(x)$, а $x = \varphi(t)$, то
$$dy = y'_x dx, \ dx = x'_t dt \ \Rightarrow \ dy = y'_x \cdot x'_t dt = y'_t dt \quad -$$
инвариантность формы первого дифференциала.
$$d^2 y = d(y'_x dx) = dy'_x\, dx + y'_x d(dx) \ = \ \left\{dy'_x = y''_{xx} dx\right\} \ = \ y''_{xx} dx^2 + y'_x d^2 x$$

Таблица производных:

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \ \ (a > 0); \qquad (e^x)^{(n)} = e^x;$$
$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right);$$
$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right);$$
$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n};$$
$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n};$$

Теорема: *(формула Лейбница)* Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - функции, имеющие на некотором множестве $\mathbf{E}$ производные до порядка n включительно. Тогда для $n-$ой производной и $n-$ого дифференциала от их произведения справедливы следующие формулы:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \ \ u^{(0)} = u;$$
$$d^n(u \cdot v) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k d^k u \cdot d^{(n-k)} v, \ \ d^0 u = u.$$

16.1. $\bullet$ *(нарушение инвариантности формы для дифференциалов высших порядков)* Пусть $y(x) = x^2$. Найдите d^2y в случае,

(а) x - независимая переменная; *(б)* $x = t^2$.

16.2. Найдите d^2y для функций $\bullet\, y_1 = e^x,\ \ y_2 = x^x$ в случаях, когда

(а) x - независимая переменная; *(б)* x - промежуточный аргумент.

16.3. *(1136)* $\bullet$ Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - дважды дифференцируемые функции. Найти $d^2(u^m v^n)$, где (m и n - постоянные).

16.4. *(1142, 1143)* Найдите производные $y'_x,\ y''_{x^2},\ y'''_{x^3}$ от функции $y = y(x)$, заданной параметрически, если:

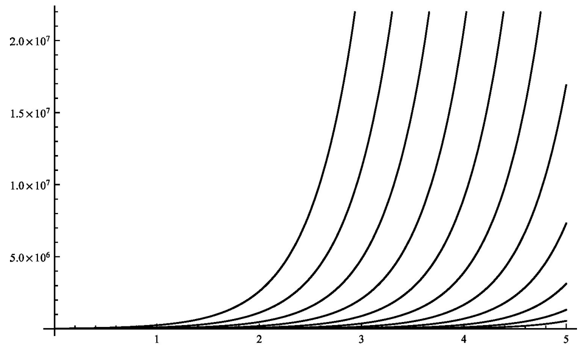
(а) $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$; *(б)* $\bullet\ x = e^t \cos t,\ \ y = e^t \sin t$.

16.5. *(1161, 1165)* Найдите производные указанного порядка:

(а) $\bullet\ y = x^2 e^{2x},\quad y^{(20)} = ?$

(б) $y = x^2 \sin 2x,\quad y^{(50)} = ?$

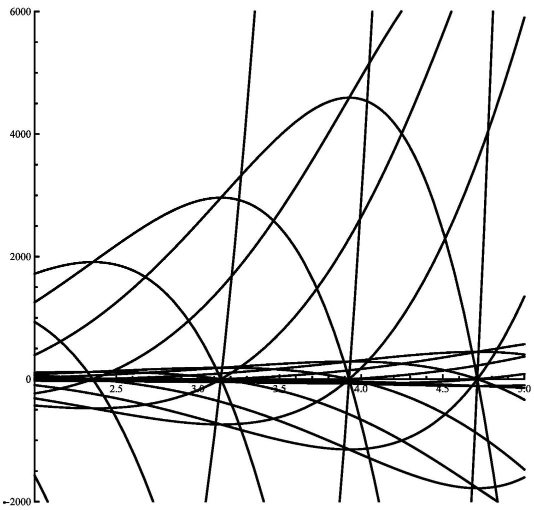
(в) $y = (x^3 + 4x^2 + 2)e^{2x},\quad y^{(10)} = ?$



16.6. *(1173, 1175)* Считая x независимой переменной, найдите дифференциалы указанного порядка:

(а) $y = x \cos 2x,\quad d^{(10)}y = ?$ *(б)* $\bullet\ y = \cos x \cdot \mathrm{ch} x,\quad d^{(6)}y = ?$

16.7. Вычислите производную порядка n функции:



первые 20 производных функции $f(x) = e^x \cdot \sin x$

(а) $f(x) = \sin^2 x,\ \ x \in \mathbb{R}$;

(б) $f(x) = x^2 e^x,\ \ x \in \mathbb{R}$;

(в) $f(x) = \sin ax \cdot \sin bx,\quad a$ и b - постоянные;

(г) $f(x) = \sin ax \cdot \cos bx,\quad a$ и b - постоянные;

(д) $\bullet\ f(x) = e^x \cdot \sin x$;

(е) $f(x) = x^{n-1} e^{1/x},\quad x \neq 0,\ n \geqslant 1$;

(ж) $f(x) = x^n \ln x,\quad x > 0,\ n \geqslant 1$.

16.8. *(1211, 1212)* Найдите $d^n y$, если:

(а) $y = x^n e^x$; *(б)* $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

16.9. Используя многократное дифференцирование, докажите следующие равенства:

(а) • $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k \sin\left(x + \dfrac{\pi k}{2}\right) = 2^{n/2} \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{4}\right), \quad x \in \mathbb{R},\ n \geqslant 1;$

(б) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \mathbf{C}_n^k = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}, \quad n \geqslant 1.$

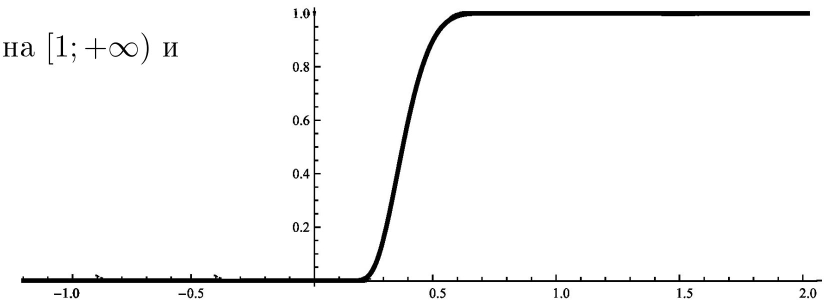
<u>**Замечание:**</u> Отметим, что доказательство данных утверждений методом математической индукции весьма трудоёмко.

16.10. Постройте пример бесконечно дифференцируемой на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ функции,

(а) • строго положительной при положительных x и равной 0 при отрицательных x;

(б) положительной в единичном интервале и равной 0 вне его;

(в) ⋆ равной 0 на $(-\infty; 0]$, равной 1 на $[1; +\infty)$ и строго монотонной на отрезке $[0; 1]$.



16.11. *(1226,1227, 1228)*

(а) Докажите, что *многочлены Чебышева:* $T_m(x) = \dfrac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x), \quad (m = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2) T_m''(x) - x T_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0.$$

(б) • Докажите, что *многочлены Лежандра:* $P_m(x) = \dfrac{1}{2^m m!} \left[(x^2 - 1)^m\right]^{(m)}, \quad (m = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2) P_m''(x) - 2x P_m'(x) + m(m+1) P_m(x) = 0.$$

(в) *Многочлены Чебышева-Лагерра* определяются формулой:

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)}, \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

Найдите явное выражение для многочлена $L_m(x)$, и докажите, что $L_m(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x L_m''(x) - (1 - x) L_m'(x) + m L_m(x) = 0.$$

16.12. $\star$ Зафиксируем удобное нам произвольное конечное или бесконечное положительное число a. Постройте пример функции $f(x) \in C^{\infty}(-a; a)$, для которой:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|f^{(n)}(0)|}{n!} = 1;$ *(б)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|f^{(n)}(0)|}{n!} = +\infty;$

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n} = 1;$ *(г)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n^2} = 1.$

16.13. Пусть $f(x) = \sin(x^{13} + x^{15})$. Найдите $f^{(43)}(0)$.

16.14. $\star$ Пусть $f(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$. Найдите $f^{(n)}(0)$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

16.15. $\star$ Предположим, что $f(x)$– дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, и такая, что для $\forall x \in [0; +\infty)$ выполнено неравенство:

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geqslant 0.$$

Докажите, что для $\forall x \in [0; +\infty)$ справедливо: $f(x) \geqslant 3e^{2x} - 2e^{3x}$.

16.16. $\star$ Пусть $f(x)$– действительнозначная функция, дифференцируемая $(n+1)$ раз во всех точках числовой прямой $\mathbb{R}$. Покажите, что для каждой пары действительных чисел a, b, $a < b$, таких, что

$$\ln\left(\frac{f(b) + f'(b) + \ldots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \ldots + f^{(n)}(a)}\right) = b - a$$

найдётся число $c \in (a; b)$, для которого выполняется равенство $f^{(n+1)}(c) = f(c)$.

16.17. $\star$ Найдите бесконечно дифференцируемую функцию $f : (0; +\infty) \mapsto (0; +\infty)$, для которой при любом начальном $x_0 > 0$ рекуррентная последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ удовлетворяет асимптотическому равенству $x_n \sim \dfrac{1}{\ln n}$, $n \to +\infty$.

16.18. $\star$ Сколько раз дифференцируема в нуле функция $f(x) = \begin{cases} x^k \sin\dfrac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \end{cases}$

и сколько её производных непрерывно в нуле?

<u>**Замечание:**</u> Данную задачу интересно сравнить с номером **14.2**.

16.19. $\star$ Найдите все определённые на действительной оси дважды дифференцируемые функции $f(x)$ такие, что $f'(x) \cdot f''(x) = 0$ для каждого x.

16.20. $\star$ Пусть $f(x)$– трижды непрерывно дифференцируемая на числовой прямой функция. Докажите, что найдётся такая точка ξ, что

$$f(\xi) \cdot f'(\xi) \cdot f''(\xi) \cdot f'''(\xi) \geqslant 0.$$

Основные свойства дифференцируемых функций

Теорема *(Ролля):* Если:

1. функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$;
2. $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ на $(a;b)$;
3. $f(a)=f(b)$;

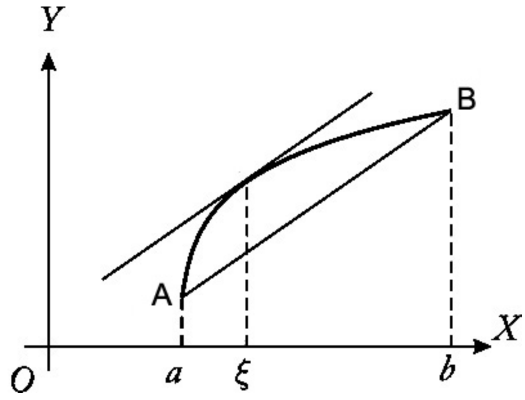
Тогда найдется хотя бы одно $\xi \in (a;b)$, такое, что $f'(\xi)=0$.

Теорема *(Лагранжа):* Если:

1. функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$;
2. $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ на $(a;b)$;

Тогда найдется хотя бы одно $\xi \in (a;b)$, что выполняется равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi) \qquad \textit{(формула конечных приращений).}$$



геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа

Теорема *(Коши):* Если:

1. функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $[a;b]$;
2. $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ на $(a;b)$;
3. $g'(x)\neq 0$, при всех x из $(a;b)$;
4. $g(a)\neq g(b)$;

Тогда найдется хотя бы одно $\xi \in (a;b)$, такое, что выполняется равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Замечание: Отметим, что условие **4)** в формулировке теоремы Коши может быть опущено, т.к. если $g(a)=g(b)$, то функция $g(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, а следовательно, найдется такое $\xi \in (a;b)$, что $g'(\xi)=0$.

17.1. *(1244)* • Найдите на кривой $y=x^3$ точку (x_0,y_0), касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1;-1)$ и $B(2;8)$.

17.2. Приведите пример функции $f(x)$,

(а) имеющей разрыв в одной точке отрезка,

(б) не имеющей производной в одной точке интервала,

(в) имеющей различные значения на концах отрезка,

для которой *не выполняется* заключение теоремы Ролля.

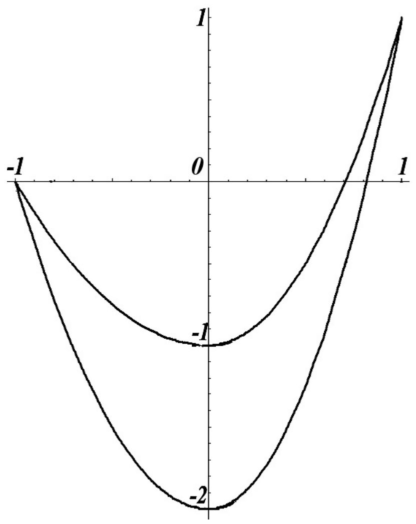
17.3. Приведите пример функции $g(x)$, не имеющей производной в одной точке интервала, для которой *не выполняется* заключение теоремы Коши.

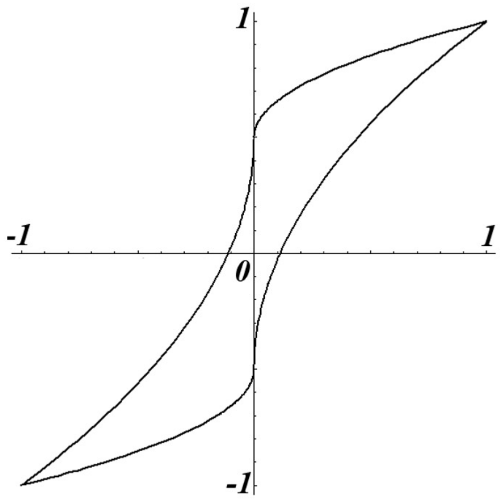
17.4. Постройте пример функций $f(x)$ и $g(x)$,

(а) имеющих бесконечные производные в одной точке интервала,

(б) • имеющих нулевые производные в одной точке интервала,

для которых *не выполняется* заключение теоремы Коши.





17.5. Постройте пример функций $f(x)$ и $g(x)$,

(а) • имеющих бесконечные производные в одной точке интервала,

(б) имеющих нулевые производные в одной точке интервала,

для которых *выполняется* заключение теоремы Коши.

<u>Замечание:</u> Аналогичные примеры можно построить и для теоремы Лагранжа.

17.6. *(1251)* Докажите неравенства:

(а) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$, для $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

(б) $py^{p-1}(x-y) \leqslant x^p - y^p \leqslant px^{p-1}(x-y)$, если $0 < y < x$, $p > 1$;

(в) $|\mathrm{arctg} x - \mathrm{arctg} y| \leqslant |x - y|$, для $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

17.7. *(1245)* • Пусть $a \cdot b < 0$. Верна ли формула Лагранжа для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на сегменте $[a; b]$?

17.8. *(1263, 1264)*

(а) Проверить, что функции $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$ и $g(x) = \mathrm{arctg} x$ имеют одинаковые производные в области $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Вывести зависимость между этими функциями.

(б) Доказать тождество: $2\,\mathrm{arctg} x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi \cdot \mathrm{sgn} x$, при $|x| \geqslant 1$.

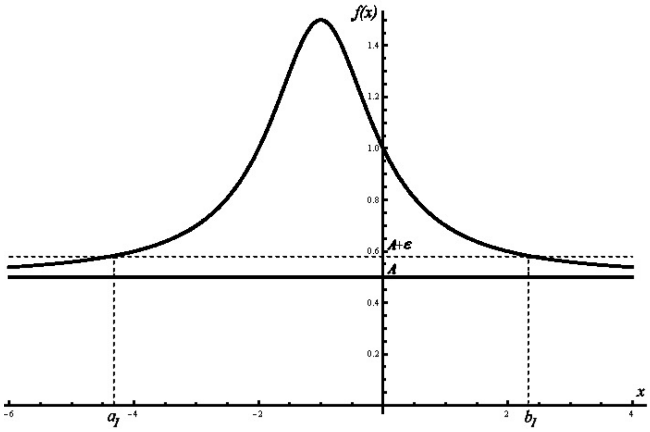
17.9. Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(a;b)$. Можно ли для $\forall\ \xi\ \in\ (a;b)$ указать точки

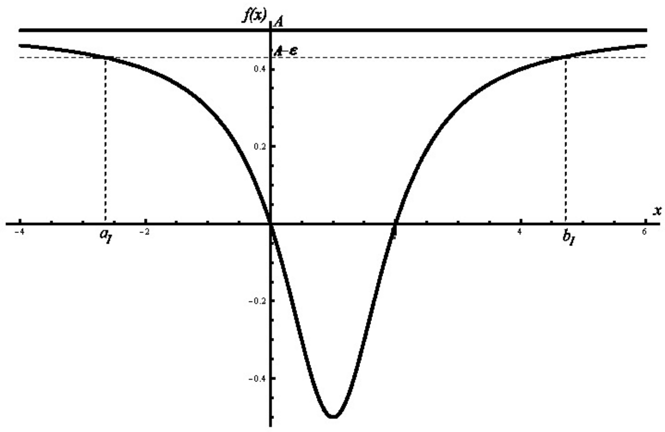
$$x_1, x_2 \in (a;b): \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi)?$$

17.10. Докажите, что единственная функция $y = y(x),\ x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $y' - \lambda y = 0$ есть показательная функция $y = Ce^{\lambda x}$, где $\lambda, C = const$.

17.11. *(1237)* • Пусть $f(x)$ имеет конечную производную в каждой точке конечного или бесконечного интервала $(a;b)$ и пусть $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$. Докажите, что

$$\exists c \in (a;b): \quad f'(c) = 0.$$





17.12. *(1238, 1239) (обобщённая теорема Ролля)*

(а) • Пусть выполнено:

1. $f(x) \in C^{(n-1)}[x_0; x_n]$;

2. $\exists f^{(n)}(x)$ на $(x_0; x_n)$;

3. $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n), \quad (x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$;

Докажите, что $\exists \xi \in (x_0; x_n)$ такое, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

(б) Пусть для некоторых натуральных p и q выполнено:

1. $f(x) \in C^{(p+q)}[a;b]$;

2. $\exists f^{(p+q+1)}(x)$ на $(a;b)$;

3. $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(p)}(a) = 0, \quad f(b) = f'(b) = \ldots = f^{(q)}(b) = 0$;

Докажите, что в таком случае $\exists c \in (a;b): \quad f^{(p+q+1)}(c) = 0$.

17.13. *(1254)* Пусть функция $f(x)$ дифференцируема, но не ограничена на конечном интервале $(a;b)$. Докажите, что её производная $f'(x)$ также не ограничена на $(a;b)$. Верна ли обратная теорема?

17.14. *(1258.1)* $\bullet$ Докажите, что если:

1. функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[x_0; X]$;

2. $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в интервале $(x_0; X)$;

3. существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0)$,

   то существует соответственно конечная или бесконечная односторонняя производная $f'_+(x_0)$ и
$$f'_+(x_0) = f'(x_0+0).$$

Замечание: Аналогично доказывается и утверждение насчёт левой производной.

Замечание: Из этого можно сделать вывод, что производная функции может иметь только точки разрыва $II-$го рода. Действительно, т.к. если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

17.15. *(1266)* Докажите, что если:

1. функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ на сегменте $[a; b]$, 2. $f'(a) = f'(b) = 0$,

то в интервале $(a; b)$ существует по меньшей мере одна точка c такая, что
$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\,\big|f(b) - f(a)\big|.$$

17.16. $\star$ Функция $f(x)$ дифференцируема на $[0; 1]$, $f(0) = 0$, и для некоторого $k > 0$ справедливо неравенство $|f'(x)| \leqslant k\,|f(x)|$. Докажите, что $f(x) \equiv 0$, при $x \in [0; 1]$.

17.17. $\star$ Функция $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ имеет производную во всех точках отрезка $[a; b]$ и $b - a \geqslant 4$. Докажите, что найдётся $x \in (a; b)$, что $f'(x) < 1 + f^2(x)$.

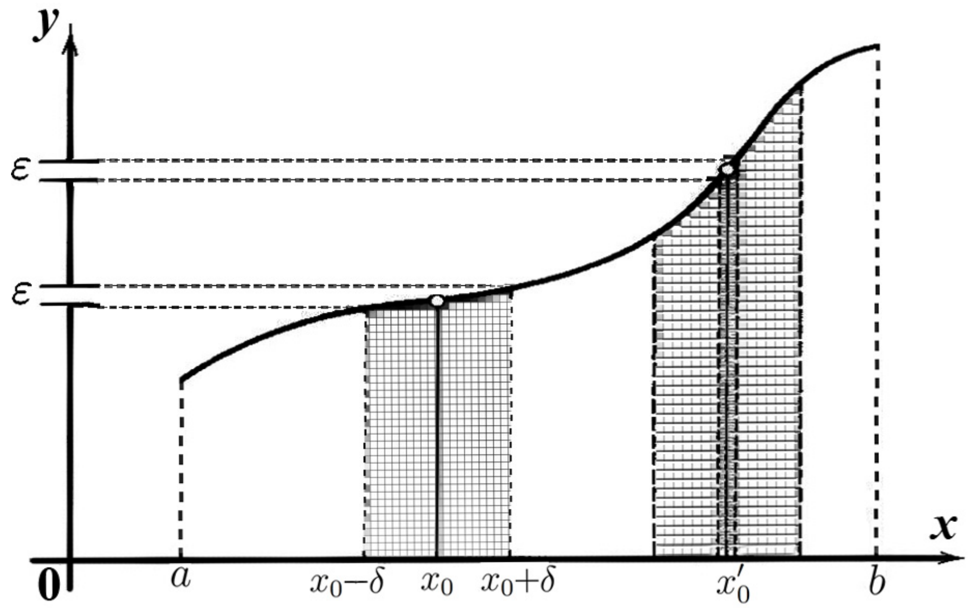
17.18. $\star$ Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n-$ отличные от 0 действительные числа; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n-$ попарно различные действительные числа. Докажите, что функция $f(x) = a_1 x^{\alpha_1} + \ldots + a_n x^{\alpha_n}$, определённая при $x > 0$, может иметь не более $(n-1)-$го нуля на $(0; +\infty)$.

17.19. Пусть $f(x), g(x), h(x)$ непрерывны на $[a; b]$, существуют f', g', h' на $(a; b)$ и
$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}, \quad x \in [a; b].$$
Докажите, что $\exists \theta \in (a; b) : F'(\theta) = 0$. Выведите из этого утверждения теоремы Лагранжа и Коши.

17.20. $\star$ Пусть $f(x)$ - дважды дифференцируемая функция. Пусть $f(0) = 0$. Докажите, что найдётся такое $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, что
$$f''(\xi) = f(\xi)\big(1 + 2\operatorname{tg}^2\xi\big).$$

Определение: Будем говорить, что функция $f(x)$ *равномерно непрерывна на множестве* $\{x\}$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta(\varepsilon): \ \forall x_1, x_2 \in \{\mathbf{x}\}, \ |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$



Утверждение: Если $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве $\{\mathbf{x}\}$, то $f(x)$ непрерывна во всех точках этого множества.

Теорема *(Кантора):*

Если $f(x)$ непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве $\{\mathbf{x}\}$, то $f(x)$ и равномерно непрерывна на этом множестве.

Замечание: Главное в определении равномерной непрерывности то, что для $\forall\ \varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$, гарантирующее выполнение неравенства $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ***сразу для всех*** $x_1, x_2 \in$ ***$\{x\}$ при единственном условии*** $|x_1 - x_2| < \delta$.

18.1. *(787)* • Сформулируйте на языке “$\varepsilon - \delta$“ утверждение: функция $f(x)$ непрерывна на множестве $\{\mathbf{x}\}$, но не является равномерно непрерывной на нём.

18.2. Постройте пример функции,

(а) • определённой и непрерывной на конечном полуинтервале, но не являющейся равномерно непрерывной на нём;

(б) • определённой и непрерывной на неограниченном полуинтервале, но не являющейся равномерно непрерывной на нём.

Определение: Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$. Тогда величина
$$\omega\big(f;[a;b]\big) = \sup_{x,x' \in [a;b]} \big|f(x') - f(x)\big|$$
называется *колебанием функции f на отрезке* $[a;b]$.

Определение: *Модулем непрерывности* $\omega\big(\delta;f\big)$ *функции* f, определённой на отрезке $[a;b]$, называется функция
$$\omega\big(\delta;f;[a;b]\big) = \sup_{|x'-x''|<\delta} \big|f(x'') - f(x')\big|, \quad x', x'' \in [a;b];$$

18.3. *(утверждения, облегчающие исследование на равномерную непрерывность)*

Докажите следующие предложения:

(а) • Пусть интервал $(a;b)$ конечен, тогда: функция $f(x)$ непрерывна на $(a;b)$, $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, тогда и только тогда, когда $f(x)$ равномерно непрерывна на $(a;b)$;

(б) • Функция $f(x)$ определена и непрерывна в области $[a;+\infty)$ и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < \infty$, тогда $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a;+\infty)$;

(в) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$ (конечном или бесконечном), $f(x)$ монотонна и ограничена на нём. Тогда эта функция равномерно непрерывна на этом интервале;

(г) Если функция $f(x)$ определена и имеет ограниченную производную на некотором интервале $(a;b)$ (конечном или бесконечном), то она равномерно непрерывна на нём;

(д) Для того, чтобы функция $f(x)$ была равномерно непрерывна на отрезке $[a;b]$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0$, что при $0 < x' - x < \delta$, $[x;x'] \subset [a;b]$ выполнялось неравенство: $\omega(f;[x;x']) < \varepsilon$;

(е) Для того, чтобы определённая на множестве $\{\mathbf{E}\}$ функция $f(x)$ была равномерно непрерывна на нём необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\delta\to 0+0} \omega(\delta;f;\mathbf{E}) = 0$;

(ж) Сумма и произведение конечного числа равномерно непрерывных на ограниченном интервале $(a;b)$ функций равномерно непрерывна на этом интервале.

(з) Пусть функция $f:(a;b) \mapsto \mathbb{R}$ имеет вторую производную на интервале $(a;b)$, причём $\sup\limits_{(a;b)} |f''(x)| < +\infty$. Тогда функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $(a;b)$.

(и) Если функция неограничена на ограниченном интервале, то она не является равномерно непрерывной на этом интервале.

18.4. Является ли требование ограниченности функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$ необходимым для того, чтобы $f(x)$ могла быть равномерно непрерывной на этом множестве?

18.5. Исследуйте на равномерную непрерывность следующие функции, используя определение данного свойства:

(а) $f(x) = \sin x$ на $\mathbb{R}$;

(б) $f(x) = \mathrm{arctg} x$ на $\mathbb{R}$;

(в) • $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на 1) $[a; +\infty)$, $a > 0$; 2) $(0; a]$, $a > 0$;

(г) • $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0; +\infty)$;

(д) $f(x) = \ln x$ на $(0; 1)$;

(е) $f(x) = x \sin x$ на $[0; +\infty)$;

(ж) $f(x) = \sin(x^2)$ на $[0; +\infty)$.

18.6. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $\dfrac{\sin x}{x}$ при $0 < x < \pi$.

(а) • с использованием теоремы Кантора;

(б) ⋆ без использования теоремы Кантора;

18.7. *(801.1)* Покажите, что функция

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$$

равномерно непрерывна на каждом интервале $J_1 = \{-1 < x < 0\}$ и $J_2 = \{0 < x < 1\}$ по отдельности, но не является равномерно непрерывной на множестве $J_1 \bigcup J_2 = \{0 < |x| < 1\}$.

18.8. Исследуйте на равномерную непрерывность следующие функции:

(а) $f(x) = \sqrt{\ln x} \cdot \cos \dfrac{1}{x}$ при $x \in [2; +\infty)$;

(б) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ при $x \in (0; 1)$.

18.9. Докажите, что функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

Замечание: Из данной задачи можно сделать вывод, что на бесконечном промежутке произведение двух равномерно непрерывных функций, вообще говоря, может уже не являться равномерно непрерывным (ср. с **№18.3,ж)**).

18.10. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет на множестве $\{\mathbf{X}\}$ следующему условию:

$$\exists k > 0,\ \alpha > 0\ :\ \forall x_1, x_2 \in \{\mathbf{X}\}\ \Rightarrow\ \big|f(x_1) - f(x_2)\big| \leqslant k\,|x_1 - x_2|^{\alpha}$$

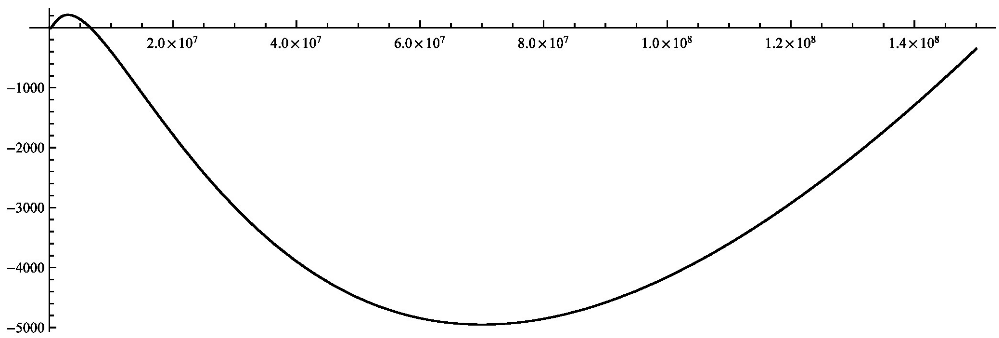
(при $\alpha = 1$ это условие называют *условием Липшица*, а при $\alpha < 1-$ *условием Гёльдера порядка* α). Докажите, что функция, удовлетворяющая этому условию, равномерно непрерывна на множестве $\{\mathbf{X}\}$.

Утверждение *(Лемма Гейне-Бореля)*: Из всякой бесконечной системы интервалов, покрывающей отрезок числовой прямой, можно выбрать конечную подсистему, также покрывающую этот отрезок.

18.11. Докажите теорему Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке, с помощью леммы Гейне-Бореля.

18.12. $\star$ Пусть функция $f : [1; +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Верно ли, что

(а) $\dfrac{f(x)}{x}$ ограничена; (б) существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$?



18.13. $\star$ Пусть функция $f(x)$ определена на луче $[0; +\infty)$ и равномерно непрерывна на нём. Известно, что для любого $x \geqslant 0$ выполняется тождество:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x+n) \;=\; 0, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

18.14. $\star$ Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a; b]$. Докажите, что

$$\lim_{h\to 0+0} \sup_{x\in[a;b-h]} \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \right| \;=\; 0.$$

18.15. Пусть функция $f(x)-$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и периодична с периодом $T > 0$. Докажите, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

18.16. $\star$ Будет ли функция $f(n) = \sin n$, определённая на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, равномерно непрерывной?

Рассмотрим точку a на вещественной прямой $\mathbb{R}$, возможно равную ∞.

Теорема: *(первое правило Лопиталя)*

Пусть найдется такое $\delta > 0$, что выполнено:

1. функции $f(x), g(x)$ непрерывны в $\mathbf{U}'_\delta(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;
2. производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в $\mathbf{U}'_\delta(a)$, причем $g'(x) \neq 0,\ x \in \mathbf{U}'_\delta(a)$;
3. существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;

Тогда имеем: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема: *(второе правило Лопиталя)*

Пусть найдется такое $\delta > 0$, что выполнено:

1. функции $f(x), g(x)$ непрерывны в $\mathbf{U}'_\delta(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;
2. производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в $\mathbf{U}'_\delta(a)$, причем $g'(x) \neq 0,\ x \in \mathbf{U}'_\delta(a)$;
3. существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;

Тогда имеем: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечание: раскрытие неопределённостей видов: $0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 1^\infty,\ 0^0$ путём алгебраических преобразований и логарифмирования приводится к раскрытию неопределённостей двух первых типов: $\dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty}$.

19.1. Постройте пример

(а) • разрывных функций $f(x)$ и $g(x)$, таких, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и выполнено: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;

(б) • непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$, таких, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, но $\nexists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, и $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} < \infty$;

(в) бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ и $g(x)$, для которых существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} < \infty$. Однако, $\lim\limits_{x\to a} f^{(k)}(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g^{(k)}(x) = 0$ для $\forall k \in \mathbb{N}$;

(г) функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих при $x \neq a$ конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, для которых $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Существует предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, но не существует предела $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

19.2. *(1322, 1330, 1336, 1341, 1343, 1348, 1351, 1356, 1359, 1363, 1368, 1369)*

Определите значения следующих выражений:

(а) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}x}$;

(б) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^x - x}{\mathrm{ln}x - x + 1}\right)$;

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}, \quad (\varepsilon > 0)$;

(г) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^\varepsilon \ln x, \quad (\varepsilon > 0)$;

(д) $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^x - 1}$;

(е) $\lim\limits_{x\to\pi/4} (\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}$

(ж) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$;

(з) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\mathrm{ctg}x - \dfrac{1}{x}\right)$;

(и) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$;

(к) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\mathrm{arcsin}x}{x}\right)^{1/x^2}$;

(л) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}\right)^{1/x^2}$;

(м) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\mathrm{cth}x}$;

(н) • $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt[3]{1+x+x^2+x^3} - \sqrt{1+x+x^2} \cdot \dfrac{\ln(e^x + x)}{x}\right]$;

(о) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$;

__Замечание:__ Применяя правило Лопиталя, часто бывает выгодно предварительно использовать асимптотические равенства вида:

$$\sin\alpha \sim \mathrm{tg}\alpha \sim (e^\alpha - 1) \sim \ln(1+\alpha) \sim \mathrm{sh}\alpha \sim \mathrm{arctg}\alpha \sim \mathrm{arcsin}\alpha \sim \alpha,$$

где $\alpha = \alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$.

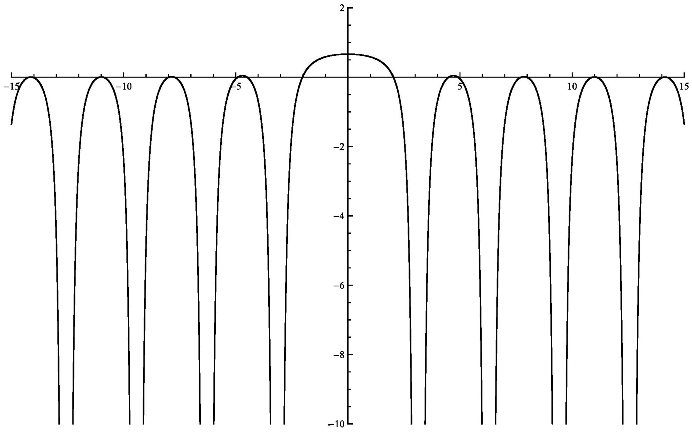
19.3. Вычислите следующие пределы:

(а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\pi\mathrm{ctg}(\pi x)\right);$

(б) $\bullet\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x};$

__Замечание:__ В последнем примере будет ошибкой перейти в числителе к асимптотическому равенству:

$$\sin x - x\cos x \sim x(1-\cos x).$$



$f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \mathrm{ctg}^2 x$

(в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{sh}^2 x\cdot\ln(1+x)}{\mathrm{tg}x - x};$

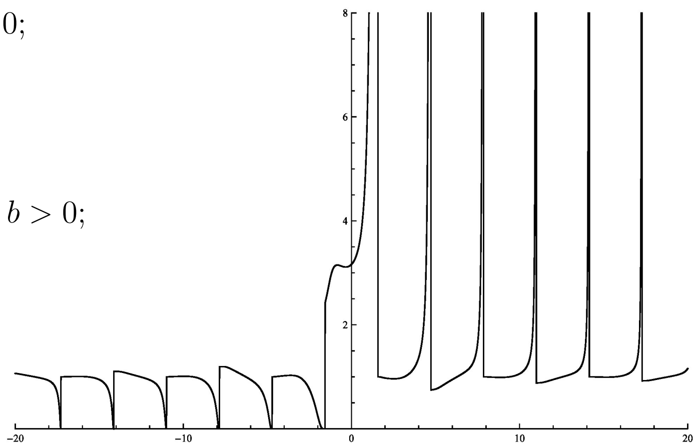
(г) $\bullet\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2 x\right);$

(д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{a^x-1}{a-1}\right)^{1/x},\quad 0\leqslant a\neq 1;$

(е) $\bullet\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{\sin x}+b^{\mathrm{tg}x}}{2}\right)^{1/x},\quad a>0,\ b>0;$

(ж) $\lim\limits_{x\to e}\left(\dfrac{a^{\ln x}+b^{\ln x}}{a+b}\right)^{\dfrac{1}{\ln x - 1}},\quad a>0,\ b>0;$

(з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos(\sin x)\right)^{1/x^2};$



$f(x) = \left(\dfrac{2^{\sin x}+5^{\mathrm{tg}x}}{2}\right)^{1/x}$

19.4.

(а) $\bullet$ Пусть $\exists f''(a)$. Найдите предел:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2};$$

(б) Пусть $\exists f'''(a)$. Найдите предел:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-3f(a+2h)+3f(a+h)-f(a)}{h^3}.$$

19.5. *(1373)*

Исследуйте на дифференцируемость в точке $x = 0$ функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}, & \text{при } x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{при } x = 0; \end{cases}$$

В случае дифференцируемости, найдите значение производной $f'(x)$ в точке 0.

19.6. *(1374)*

Исследуйте возможность применения правила Лопиталя и вычислите следующие пределы:

(а) • $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$;

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x)e^{\sin x}}$;

(в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \sin(1/x)}{\sin^2 x}$.

19.7. ⋆ Функция $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет производную на $(0; +\infty)$, причём

(а) $f(x) + f'(x) \to 0$, при $x \to +\infty$. Докажите, что $f(x) \to 0$, при $x \to +\infty$.

(б) $f(x) + 2f'(x)\sqrt{x} \to 0$, при $x \to +\infty$. Докажите, что $f(x) \to 0$, при $x \to +\infty$.

19.8. ⋆ Найдите пределы:

(а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k^x\right)^{1/x}, \quad p_k > 0, \;\; a_k > 0, \;\; 1 \leqslant k \leqslant n;$

(б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k^x\right)^{1/x}, \quad p_k > 0, \;\; a_k > 0, \;\; 1 \leqslant k \leqslant n;$

(в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k^x\right)^{1/x}, \quad p_k \geqslant 0, \;\; a_k > 0, \;\; 1 \leqslant k \leqslant n, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1;$

19.9. ⋆ *(Задача В.И. Арнольда)* Найдите предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arctg}(\arcsin x) - \arcsin(\operatorname{arctg} x)}.$$

Теорема: Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $\mathbf{U}(x_0)$ точки x_0, имеет в этой окрестности производные до $(n-1)-$го порядка включительно, и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \overline{\text{o}}\big((x-x_0)^n\big), \text{ при } x \to x_0. \tag{1}$$

Определение: Многочлен $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ называется *многочленом Тейлора функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

Определение: Функция $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ называется *остаточным членом* $n-$*го порядка формулы Тейлора.*

Определение: Формула **(1)** называется *формулой Тейлора* $n-$*го порядка для функции* $f(x)$ *в окрестности точки* x_0 *с остаточным членом в форме Пеано* (или *локальной формулой Тейлора*).

Определение: Если $x_0 = 0$, то формула **(1)** принимает вид:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \overline{\text{o}}\big(x^n\big), \text{ при } x \to 0,$$

и называется *формулой Маклорена.*

Таблица основных разложений:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \overline{\text{o}}\big(x^n\big).$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \overline{\text{o}}\big(x^{2n}\big).$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \overline{\text{o}}\big(x^{2n+1}\big).$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \overline{\text{o}}\big(x^n\big).$$
$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \overline{\text{o}}\big(x^n\big).$$

Теорема *(Тейлора):*

Функция $f(x)$, имеющая в точке x_0 производные до $n-$го порядка включительно, единственным образом представляются в виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \overline{\text{o}}\big((x-x_0)^n\big),\ x \to x_0,$$

где коэффициенты разложения определяются формулами:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots n. \tag{2}$$

Теорема: Если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности $\mathbf{U}(x_0)$ точки x_0, производные до $(n+1)-$го порядка включительно, то для любой точки $x \in \mathbf{U}(x_0)$ найдется точка ξ, лежащая между x и x_0, такая что:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{3}$$

Определение: Формула **(3)** называется *формулой Тейлора с остаточным членом* $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *в форме Лагранжа.*

20.1. *(1377)* Напишите разложения по целым неотрицательным степеням x до члена с x^5 следующих функций:

(а) $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$. *(б)* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$;

(в) $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2+2x+3}$; *(г)* $f(x) = \dfrac{2x^3-4x^2+x+1}{x^2+3x+1}$.

Чему равно значение $f^{(5)}(0)$ для этих функций?

20.2. *(1379, 1381, 1382, 1385, 1387)* Представьте формулой Маклорена функцию $f(x)$ до членов указанного порядка:

(а) $f(x) = \sqrt[m]{a^m+x}$, $(a>0)$ до $\overline{\mathrm{o}}(x^2)$; *(б)* • $f(x) = e^{2x-x^2}$ до $\overline{\mathrm{o}}(x^5)$;

(в) $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1}$ до $\overline{\mathrm{o}}(x^4)$; *(г)* $f(x) = \sin(\sin x)$ до $\overline{\mathrm{o}}(x^3)$;

(д) • $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ до $\overline{\mathrm{o}}(x^6)$; *(е)* • $f(x) = \sin x \cdot \ln(1+x)$ до $\overline{\mathrm{o}}(x^5)$;

(ж) $f(x) = e^{\sin\left(\ln(1+2x)\right)}$ до $\overline{\mathrm{o}}(x^3)$; *(з)* $f(x) = \dfrac{x^2}{1+\sin x}$ до $\overline{\mathrm{o}}(x^6)$.

Определение: *Метод неопределённых коэффициентов* - метод, используемый для нахождения искомой функции в виде точной или приближённой линейной комбинации конечного или бесконечного набора базовых функций. Указанная линейная комбинация берётся с неизвестными коэффициентами, которые определяются тем или иным способом из условий рассматриваемой задачи. Обычно для них получается система алгебраических уравнений.

20.3. Применяя метод неопределённых коэффициентов, получите формулу Маклорена с $\overline{\mathrm{o}}(x^5)$ функции $f(x)$, если:

(а) • $f(x) = \mathrm{tg}x$; *(б)* $f(x) = \mathrm{th}x$.

Пусть известно представление формулой Тейлора в окрестности точки x_0 до $\overline{\mathrm{o}}\big((x-x_0)^n\big)$ производной функции $f(x)$, то есть известна формула:

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k+\overline{\mathrm{o}}\big((x-x_0)^n\big),\quad b_k=\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}.$$

Тогда существует $f^{(n+1)}(x_0)$, и поэтому функцию $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n+1} a_k(x-x_0)^k+\overline{\mathrm{o}}\big((x-x_0)^{n+1}\big)=a_0+\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}+\overline{\mathrm{o}}\big((x-x_0)^{n+1}\big),$$

где $a_0=f(x_0),\quad a_{k+1}=\dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}\cdot\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{b_k}{k+1}.$

Следовательно,

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}+\overline{\mathrm{o}}\big((x-x_0)^{n+1}\big),\tag{4}$$

где b_k– коэффициенты формулы Тейлора функции $f'(x)$.

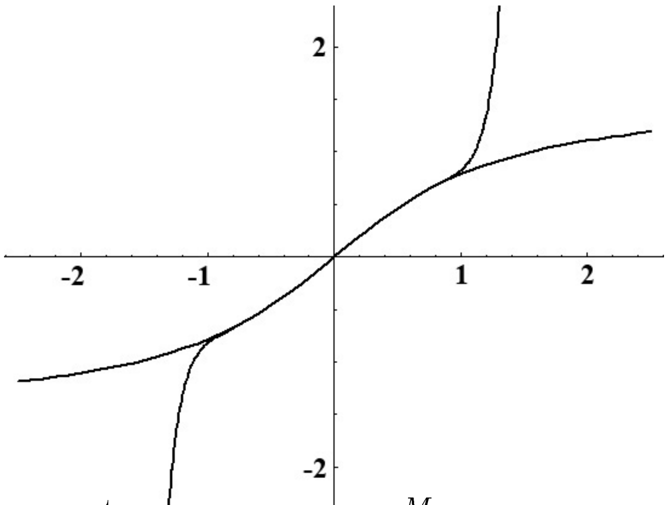
20.4. Представьте формулой Маклорена функцию $f(x)$ до членов указанного порядка:

(а) • $f(x)=\mathrm{arctg}x$ до $\overline{\mathrm{o}}\big(x^{2n+2}\big)$;

(б) $f(x)=\arcsin x$ до $\overline{\mathrm{o}}\big(x^{2n+2}\big)$;

(в) $f(x)=\arccos\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ до $\overline{\mathrm{o}}\big(x^3\big)$;

(г) $f(x)=x^2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ до $\overline{\mathrm{o}}\big(x^{2n+2}\big)$;



$\mathrm{arctg}x$ *и его многочлен Маклорена*

20.5. Найдите следующие пределы, используя формулу Тейлора:

(а) • $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]$;

(б) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$;

(в) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$;

(г) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x$;

(д) • $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{arctg}(3+x^2)-\mathrm{arctg}(2+\cos x)}{\ln(1+x)-e^x+1}$;

(е) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{\mathrm{sh}\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{1}{\ln\frac{(1+x)^3}{1+3x}}}$;

20.6. Пусть $f(x)$ - бесконечно дифференцируемая в нуле функция. Докажите, что если

(а) f чётная, то её разложение по формуле Маклорена содержит только чётные степени x;

(б) f нечётная, то её разложение по формуле Маклорена содержит только нечётные степени x.

20.7. • Представьте формулой Маклорена функцию $f(x) = e^x + x^2|x|$ до $\overline{\mathrm{o}}(x^n)$. Какие значения может принимать n?

20.8. Пусть $f \in C^{(3)}(\mathbb{R})$, функции $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$ всюду положительны. Докажите, что $\exists\, a > 0 :\ f(x) > ax^2$ при $\forall x > 0$.

20.9. $\star$ Пусть $f \in C^{(2)}(-1;1)$, $f''(0) \neq 0$ и для $\forall x \in (-1;1)$ значение $\theta(x)$ определяется как одно из чисел θ, для которых

$$f(x) - f(0) = f'(\theta)x, \quad \theta \in (0;1).$$

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\theta(x)}{x}$, если он существует.

20.10. $\star$ Пусть $f \in C^{(2)}[0;1]$, $f(0) = f(1) = 0$ и $\min\limits_{[0;1]} f(x) = -1$. Докажите, что $\max\limits_{[0;1]} f''(x) \geqslant 8$.

20.11. $\star$ Пусть $k-$ фиксированное положительное число. $n-$ая производная функции $\dfrac{1}{x^k - 1}$ имеет вид: $\dfrac{P_n(x)}{(x^k-1)^{n+1}}$, где $P_n(x)-$ некоторый полином. Найдите величину $P_n(1)$.

20.12. $\star$ Разложите в бесконечную сумму по Маклорену функцию

$$e^{x\cos\alpha} \sin\big(x \sin\alpha\big),$$

где $\alpha-$ произвольное действительное число.

20.13. $\star$ Пусть $f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ и пусть все коэффициенты в разложении отношения $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ по степеням x по модулю не превосходят 2. Докажите, что $|a_n| \leqslant n + 1$.

20.14. $\star$ Покажите, что для всех натуральных $n > 1$, справедливо неравенство:

$$\frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{ne}.$$