МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

«Исследование операций в экономике»

Составитель: проф., к.т.н.   Гаряев Н.А.

г. Москва
2013 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Исследование операций в экономике или оптимизация, как раздел математики существует достаточно давно. Оптимизация - это выбор, т.е. то, чем постоянно приходится заниматься в повседневной жизни. Термином "оптимизация" в литературе обозначают процесс или последовательность операций, позволяющих получить улучшенное решение. Не смотря на то, что, конечной целью оптимизации является отыскание наилучшего или "оптимального" решения, обычно приходится довольствоваться улучшением известных решений, а не доведением их до совершенства. Под оптимизацией понимают скорее стремление к совершенству, которое, возможно, и не будет достигнуто.

1.1 Экскурс в историю

Когда люди начали принимать решение? Вероятно, со времени появления человека разумного. Интуиция и воля, умение ориентироваться в обстановке рождали решение. Жизнь заставляла находить вполне определенный, единственный, наилучший способ действий.

В 1938 г. перед двадцатипятилетним профессором Ленинградского университета Л. В. Канторовичем была поставлена задача: как наилучшим образом распределить работу восьми станков фанерного треста при условии, что известна производительность каждого станка по каждому из пяти видов обрабатываемых материалов?

Ученый нашел метод решения этой задачи, который стал общим. Он получил название «Линейное программирование». За разработку этого метода в 1965 г. Л. В. Канторовичу и двум ученым - академику B.C. Немчинову и профессору В.В. Новожилову - была присуждена Ленинская премия. В 1975 г. совместно с американским ученым Т. Купмансом Л.В. Канторович получил Нобелевскую премию за вклад в теорию оптимизации распределения ресурсов.

Методы линейного программирования применялись и одновременно развивались во время второй мировой войны для планирования военных операций. Еще до ее начала методы анализа военных систем на основе математического программирования стали использоваться военными специалистами в Великобритании, а затем и в других странах. В США и Канаде были созданы специальные подразделения, занимавшиеся анализом военных операций. В 1938 г. в США был введен термин *«исследование операций»* в качестве характеристики рода деятельности необычной исследовательской группы, выполнявшей работы по анализу военных систем, в частности решающих задачи оптимального использования радиолокационных установок в общей системе обороны страны. Этот анализ являлся основой для принятия командованием соответствующих решений.

Сегодня линейное и, шире, *математическое* программирование - один из основных методов принятия производственно-экономических решений. Существуют и другие методы: теория игр и статистических решений, метод Монте-Карло (статистических испытаний), теория массового обслуживания, сетевое планирование и др. Эти методы в совокупности объединяются под названием «исследование операций».

Описание любой задачи исследования операций включает задание компонентов (факторов) решения, налагаемых на них ограничений и системы целей. Каждой из целей соответствует целевая функция, заданная на множестве допустимых решений, значения которой выражают меру осуществления цели. Задачи исследования операций классифицируют по их *теоретико-информационным свойствам.* Если субъект в ходе принятия решения сохраняет свое информационное состояние, т. е. никакой информации не приобретает и не утрачивает, то принятие решения можно рассматривать как мгновенный акт. Соответствующие задачи называют *статическими.* Напротив, если субъект в ходе принятия решения изменяет свое информационное состояние, получая или теряя информацию, то в такой динамической задаче обычно целесообразно принимать решение *поэтапно* (многошаговые решения). Значительная часть динамических задач исследования операций входит в *динамическое программирование.*

С конца 1940-х годов сфера приложения исследования операций стала охватывать разнообразные стороны человеческой деятельности - как чисто технические (особенно технологические); так и технико-экономические, а также управленческие различного уровня.

Лишь отдельные задачи исследования операций поддаются аналитическому решению и сравнительно немногие - численному решению вручную.

Поэтому рост возможностей исследования операций тесно связан с прогрессом вычислительной техники.

С 1950-х годов для исследования обоснования решений сложных проблем политического, социального, военного, экономического, научного и технического характера стала применяться совокупность методологических средств, получившая название *системный анализ.* Он приложим для решения таких задач, как распределение мощностей между различными видами изделий, определение потребности в новом оборудовании и в рабочей силе той или иной квалификации, прогнозирование спроса на различные виды продукции, а также развитие и техническое оснащение вооруженных сил, освоение космоса и т. д.

Системный анализ базируется на ряде прикладных математических дисциплин, в частности на исследовании операций. Когда в задаче системного анализа имеется одна четко выраженная цель, степень достижения которой можно оценить на основе одного критерия, используют методы математического программирования.

Первое применение системного анализа в военном деле относят к истории древних веков, когда правитель Сиракуз обратился к Архимеду с просьбой помочь осажденному городу прорвать осаду римлян. Отдельные исследования по системному анализу проводились в конце XIX и начале XX веков, а также в первую мировую войну. Так, в 1886 г. военное командование прибегло к системному анализу, чтобы принять решение относительно производства 12-дюймовых орудий, предназначенных для использования в береговой артиллерии. Необходимо было сделать выбор между орудием, выпускаемым фирмой Круппа, и орудием нового образца американского производства. Во время второй мировой войны с помощью системного анализа разрабатывались, например, стратегические планы борьбы с подводными лодками.

Но эти работы не имели практического выхода и были неизвестны. Системный анализ (и его часть - исследование операций) во время второй мировой войны применялись для того, чтобы, например, решить, какие помехи предпочтительнее в качестве радиолокационных - пассивные или активные, какие цели для бомбометания наиболее эффективны, какие из способов обнаружения подводных лодок являются наилучшими и т. д.

После войны акцент в исследованиях сместился с тактических задач на задачи планирования, так как возникла необходимость создания новых видов оружия. Затем область применения методов исследования операций расширилась настолько, что охватила и военно-политические доктрины государств.

Примерами задач, решаемых с помощью методов исследования операций и математического программирования, могут быть следующие:

1) разработка высокоэффективных методов управления людьми и техникой;

2) разработка методов использования имеющейся техники, обеспечивающей выполнение поставленной задачи с минимальными затратами и с максимальным эффектом;

3) определение целесообразности разработки, приобретения и распределения техники и материалов в рамках общей стратегии деятельности людей.

Первые две задачи допускают применение наиболее продуктивных формальных методов. Используемые при принятии решения и распределении ресурсов в различных областях науки и техники (экономике, торговле) методы - управление запасами, назначение персонала, составление маршрутов и т. п. - практически не отличаются и интенсивно развиваются в последнее десятилетие.

Исследование операций - инструмент для выработки решений во всех областях деятельности человека, средство повышения эффективности и качества производства. Исследование операций во многих случаях остается единственным средством для принятия обоснованных решений.

Искусством выбора человек овладел в век научно-технической революции, когда появились «думающие машины» - ЭВМ, способные производить быстрые расчеты. Был найден язык общения человека с машиной. Можно было приступить к решению производственных и иных задач.

Оценим время, необходимое для решения задач математического программирования на ЭВМ. Причем проведем оценку для наиболее простого случая - линейного программирования. Как будет показано, область определения целевой функции в линейном программировании представляет собой выпуклое многомерное множество в $\boldsymbol{n}$-мерном пространстве переменных X, и экстремум целевой функции достигается в его вершинах. Неупорядоченный перебор вершин с целью выявления точки, в которой целевая функция достигает своего наибольшего или наименьшего значения, является практически невыполнимой задачей.

Простейшая задача линейного программирования - выбор по одному элементу в каждой из n строк и в каждом из n столбцов квадратной таблицы чисел, причем такой, чтобы сумма их оказалась максимальной (проблема выбора).

Число вершин соответствующего многогранного множества равно n! Для вычисления значения целевой функции в каждой из вершин многогранника необходимо произвести n сложений. При $n = 20$ число вершин многогранника $n! = 20!$ превысит 2^{18}. Выполняющей 400 млн. операций в секунду ЭВМ потребуется более 192 лет, чтобы перебрать вершины многогранника, определяемого условиями данной задачи линейного программирования. Практика требует решения задач для значений n, значительно превышающих 20.

В специальных методах решения задач математического, в частности линейного, программирования используют упорядоченный перебор вершин многогранника и производят порядка n^3 элементарных операций. Для названных задач размерностью $n \approx 20$ потребуется время счета на ЭВМ менее одной минуты.

В настоящее время трудно назвать области практической и научной деятельности, где бы не применялись методы математического программирования. Это планирование производства, управление запасами и трудовыми ресурсами, размещение объектов, техническое обслуживание оборудования, работ над проектами и календарное планирование, построение вычислительных, информационных, электроэнергетических, военных, транспортных систем, организация городской сферы обслуживания, здравоохранения, туризма, спорта и развлечений и т. д. Поэтому наряду с термином *решение* в математическом программировании употребляются и термины *план, стратегия, управление, поведение.*

1.2 Составление математической модели

Для того чтобы что-то рассчитать, надо формализовать задачу, т. е. составить *математическую модель,* поскольку по своей природе математические методы можно применять не непосредственно к излучаемой действительности, а лишь к математическим моделям тех или иных явлений. Причем результаты исследований математических моделей представляют практический интерес только тогда, когда модели достаточно адекватно отображают реальные ситуации и достаточно совершенны.

В задачах оптимизации требуется отыскать максимум или минимум некоторой целевой функции $f(x)$. Но *задача отыскания минимума функции $f(x)$ эквивалентна задаче отыскания максимума той же функции, взятой со знаком минус,* и наоборот. Поэтому будем говорить об оптимальном (*optimum* - наилучший) значении целевых функций.

Итак, сформулированные в реальных задачах требования могут быть выражены количественными критериями и записаны в виде математических выражений. Процесс формирования математической задачи и алгоритма ее решения достаточно сложен. Его можно представить в виде следующих этапов.

• *Изучение объекта.* На этом этапе следует хорошо понять все особенности функционирования объекта, четко определить факторы, влияющие на его функционирование, их число и степень влияния, выбрать критерий оптимизации, отражающий цель рассматриваемой задачи.

• *Описательное моделирование.* Устанавливают и словесно фиксируют основные связи и зависимости между характеристиками процесса или явления с точки зрения оптимизируемого критерия.

• *Математическое моделирование.* Переводят описательную модель на формальный математический язык. Все условия записывают в виде соответствующей системы равенств и неравенств, а критерий оптимизации - в виде функции. После того как задача записана в математической форме, ее конкретное содержание перестает нас интересовать до момента проведения содержательного анализа получаемого решения. Дело в том, что различные по своему содержанию задачи часто можно привести к одной и той же формальной математической записи.

• *Выбор или создание метода решения.* Главное внимание обращают на полученную математическую структуру задачи (постановку задачи). Исходя из нее, выбирают либо известный метод решения, либо некую модификацию известного метода, либо разрабатывают новый.

• *Выбор или написание программы для решения задачи на ЭВМ.* Задачи, содержащие целевую функцию и условия-ограничения и описывающие поведение реальных объектов, как правило, имеют большое число переменных и зависимостей (уравнений связи) между ними. Поэтому они могут быть решены в разумные сроки только с помощью ЭВМ. Программа для ЭВМ реализует выбранный метод решения задачи.

• *Решение задачи на* ЭВМ. Необходимую информацию для решения задачи вводят в память ЭВМ вместе с программой. В соответствии с программой ЭВМ производит необходимую обработку введенной числовой информации, получает требующиеся результаты (решение) и выдает его пользователю в заданной форме.

• *Анализ полученного решения.* Он бывает *формальным* (математическим) *и содержательным.* При формальном анализе проверяют соответствие полученного решения построенной математической модели, т. е. производят проверку правильности введения исходных данных, функционирования программы, ЭВМ и т. д. При содержательном анализе проверяют соответствие полученного решения тому реальному объекту, который моделировали. В результате содержательного анализа в модель (словесную и математическую) могут быть внесены изменения, после чего рассмотренный процесс повторяют. Только после полного завершения анализа (и формального, и содержательного) модель может быть использована для расчета.

Следует иметь в виду, что в математическом программировании выделяют два вида решений: допустимое решение и собственно решение задачи.

Под *допустимым решением* понимают такой набор значений искомых величин (переменных), который удовлетворяет условиям-ограничениям задачи. *Решением задачи* из множества допустимых решений будет то, при котором целевая функция достигнет своего наибольшего (наименьшего) значения.

Для того чтобы подчеркнуть важность содержательного анализа, приведем следующий пример. Когда впервые решали задачу о питании, то в качестве фактора оптимизации взяли минимум затрат, а в условие-ограничение включили только требование по калорийности пищи. Решение задачи было таковым: питаться следует уксусом (входил в состав возможных продуктов питания): и калорийность обеспечена, и стоимость минимальна.

Общую задачу математического программирования разбивают на задачи, названия которых определяются видом оптимизируемой функции, функций, входящих в условия-ограничения, типом переменных и алгоритмом решения:

Виды задач математического программирования

линейного программирования - функции $f(x)$, $gi(x)$, $hj(x)$ линейны;

нелинейного программирования - хотя бы одна из функций $f(x)$, $gi(x)$, $hj(x)$ нелинейна;

квадратичного программирования - $f(x)$ является квадратичной функцией, ограничения линейны (более точно, $f(x)$ должна быть квазиопределенной квадратичной формой);

сепарабелъного программирования - $f(x)$ представляет собой сумму функций, различных для каждой переменной, условия-ограничения могут быть как линейными, так и нелинейными (но все недиагональные элементы матрицы, состоящей из вторых частных производных любой функции задачи, равны нулю);

целочисленного (линейного и нелинейного) программирования - координаты искомого вектора x являются только целыми числами;

выпуклое программирование - функция $f(x)$ - выпуклая, g,(x) - вогнутые, т. е. рассматривают выпуклые функции на выпуклых множествах и т. п.

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Одномерная оптимизация

Основные методы

Метод сканирования

Метод равномерного поиска

Метод поразрядного поиска

Метод деления пополам (дихотомии)

Метод золотого сечения

Метод квадратичной интерполяции - экстраполяции

Многомерная безградиентная

Основные методы

Метод циклического покоординатного спуска.

Метод Хука и Дживса.

Метод Розенброка.

Метод Гаусса - Зайделя

Метод минимизации по правильному симплексу.

Метод минимизации по деформируемому симплексу

Многомерный поиск, использующий производные.

Многомерная безусловная градиентная оптимизация

Основные методы

Метод градиента

Метод наискорейшего спуска

Метод сопряженных градиентов

Метод тяжелого шарика

Многомерная случайная оптимизация

Основные методы

Метод слепого поиска

Метод случайных направлений

Метод поиска с "наказанием случайностью"

Метод с "блуждающим" поиском

Многомерная условная оптимизация

Основные методы

Метод наискорейшего спуска
Метод Дэвидона - Флетчера - Пауэлла
Метод параллельных касательных
Метод штрафов
Метод прямого поиска с возвратом
Метод проектирования градиента

1.3 ФОРМУЛИРОВКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

В общем виде математическую задачу оптимизации можно сформулировать следующим образом:

Минимизировать (максимизировать) целевую функцию с учетом ограничений в области допустимых значений.

Под минимизацией (максимизацией) функции n переменных $f(x)=f(x_1, ...,x_n)$ на заданном множестве U n-мерного векторного пространства E_n понимается определение хотя бы одной из точек минимума (максимума) этой функции на множестве U.

При записи математических задач оптимизации в общем виде обычно используется следующая символика:

f(x) -> min (max),
x принадлежит U,

где $f(x)$ - целевая функция, а U - допустимое множество, заданное ограничениями.

2 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Задачи одномерной минимизации представляют собой простейшую математическую модель оптимизации, в которой целевая функция зависит от одной переменной, а допустимым множеством является отрезок:

f(x) -> min,
x принадлежит [a, b].

Максимизация целевой функции (***f(x) -> max***) эквивалентна минимизации противоположной величины (***-f(x) -> min***), поэтому можно рассматривать только задачи минимизации.

К математическим задачам одномерной минимизации приводят прикладные задачи оптимизации с одной управляемой переменной. Кроме того, необходимость в минимизации функций одной переменной возникает при реализации некоторых методов решения более сложных задач оптимизации.

Для решения задачи минимизации функции ***f(x)*** на отрезке ***[a, b]*** на практике, как правило, применяют приближенные методы. Они позволяют найти решения этой задачи с необходимой точностью в результате определения конечного числа значений функции ***f(x)*** и ее производных в некоторых точках отрезка ***[a, b].*** Методы, использующие только значения функции и не требующие вычисления ее производных, называются прямыми методами минимизации.

Большим достоинством прямых методов является то, что от целевой функции не требуется дифференцируемости и, более того, она может быть не задана в аналитическом виде. Единственное, на чем основаны алгоритмы прямых методов минимизации, это возможность определения значений ***f(x)*** в заданных точках.

Рассмотрим наиболее распространенные на практике прямые методы поиска точки минимума.

2.1 Метод перебора (сканирования).

Метод перебора является простейшим из прямых методов минимизации и состоит в следующем.

Метод заключается в последовательном переборе всех значений, $a \le x \le b$ *с* шагом **ε** (погрешность решения) с вычислением критерия оптимальности ***R*** в каждой точке. Путем выбора наибольшего из всех вычисленных значений ***R*** и находится решение задачи ***x***.

Достоинство метода в том, что можно найти глобальный максимум критерия, если ***R(x)*** – многоэкстремальная функция. К недостаткам данного метода относится значительное число повторных вычислений ***R(x)***, что в случае сложной функции ***R(x)*** требует существенных затрат времени.

На практике можно реализовать одну из основных модификаций метода - последовательное уточнение решения, или сканирование с переменным шагом.

На первом этапе сканирование осуществляют с крупным шагом, затем отрезок, внутри которого получено наибольшее значение ***R(x)***, разбивается на более мелкие отрезки, ищется новый отрезок, внутри которого находится уточненное значение максимума. Он (новый отрезок) опять делится на более мелкие и т.д., до тех пор, пока величина отрезка, содержащего максимальное значение ***R(x)***, не будет меньше заданной погрешности. Главный недостаток этого варианта метода - возможность пропуска "острого" глобального максимума ***R(x)***.

2.2 Метод равномерного поиска

Основан на том, что переменной x присваиваются значения x+Δx с шагом Δx=const и вычисляются значения F(x). Если F(xn+1)> F(xn), переменной x дается новое приращение. Как только F(xn+1) станет меньше F(xn), поиск останавливается. При малой заданной погрешности этот метод неэкономичен по затратам машинного времени.

2.3 Метод поразрядного поиска

Метод поразрядного приближения является разновидностью метода равномерного поиска. Можно усовершенствовать метод перебора с целью уменьшения количества значений F(x), которые необходимо находить в процессе минимизации. Во-первых, если оказывается, что F(xi)<= F(x[i+1]), то отпадает необходимость вычислять F(x) в точках x[i+2], x[i+3] и т.д. Во-вторых, разумно было бы сначала определить отрезок, содержащий оптимальную точку, грубо, т.е. найти точку xm с небольшой точностью, а затем искать ее на этом отрезке с меньшим шагом дискретизации, повышая точность. Эти возможности улучшения и реализованы в методе поразрядного поиска. В этом методе перебор точек отрезка происходит сначала с шагом sh=x[i+1]-xi > ε до тех пор, пока не выполнится условие F(xi) < F(x[i+1]) или пока очередная из точек не совпадет с концом отрезка. После этого шаг уменьшается (обычно в 4 раза), и перебор точек с новым шагом производится в противоположном направлении до тех пор, пока значения F(x) снова не перестанут уменьшаться или очередная точка не совпадет с другим концом отрезка и т.д. Описанный процесс завершается, когда перебор в данном направлении закончен, а использованный при этом шаг дискретизации не превосходит ε.

Алгоритм метода поразрядного поиска

Шаг 1. Выбрать начальный шаг $sh=(b-a)/4$. Положить $x_0=a$. Вычислить $F(x_0)$.

Шаг 2. Положить $x_1=x_0+sh$. Вычислить $F(x_1)$.

Шаг 3. Сравнить $F(x_0)$ и $F(x_1)$. Если $F(x_0)>F(x_1)$, то перейти к шагу 4, иначе - к шагу 5.

Шаг 4. Положить $x_0= x_1$ и $F(x_0)=F(x_1)$. Проверить условие принадлежности x_0 интервалу $[a,b]$. Если $a < x_0< b$, то перейти к шагу 2, иначе - к шагу 5.

Шаг 5. Проверка на окончание поиска: если $|sh| <= \varepsilon$, то вычисления завершить, полагая $x_m= x_0$, $F_m=F(x_0)$, иначе - перейти к шагу 6.

Шаг 6. Изменить направление поиска: положить $x_0= x_1$, $F(x_0)=F(x_1)$, $sh=-sh/4$. Перейти к шагу 2.

2.4 Метод деления пополам (дихотомии).

Метод основан на делении текущего отрезка $[a, b]$, где содержится искомый экстремум, на две равные части с последующим выбором одной из половин, в которой локализуется максимум в качестве следующего текущего отрезка. Экстремум локализуется путем сравнения двух значений критерия оптимальности в точках, отстоящих от середины отрезка на $\varepsilon/2$, где ε - погрешность решения задачи оптимизации.

Если $R(x + \varepsilon/2) > R(x - \varepsilon/2)$, то максимум располагается на правой половине текущего отрезка $[a, b]$, в противном случае - на левой.

Процесс поиска завершается при достижении отрезком $[a, b]$ величины заданной погрешности ε.

К недостаткам метода относится его работоспособность только для одноэкстремальных функций $R(x)$ (т.е. таких, которые содержат один экстремум того типа, который мы ищем в задаче), так как в других случаях при сравнении двух критериев в соседних точках невозможно правильно выбрать следующий интервал, где находится максимум.

Алгоритм дихотомического поиска

Алгоритм дихотомического метода для минимизации функции на интервале $[a_1, b_1]$.

Начальный этап. Выбрать константу различимости $2\varepsilon > 0$ и допустимую конечную длину интервала неопределенности $l > 0$. Пусть $[a_1, b_1]$ - начальный интервал неопределенности. Положить $k=1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Если $b_k-a_k < l$, то остановиться; точка минимума принадлежит интервалу $[a_k,b_k]$. В противном случае вычислить $p_k=(a_k+b_k)/2-\varepsilon$ $q_k=(a_k+b_k)/2+\varepsilon$ и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Если $F(p_k) < F(q_k)$, положить $a_{[k+1]}=a_k$ и $b_{[k+1]}=q_k$. В противном случае положить $a_{[k+1]}=p_k$ и $b_{[k+1]}=b_k$. Заменить k на $k+1$ и перейти к шагу 1.

2.5 Метод золотого сечения

Метод основан на делении текущего отрезка $[a, b]$, где содержится искомый экстремум, на две неравные части, подчиняющиеся правилу золотого сечения, для определения следующего отрезка, содержащего максимум.

Золотое сечение определяется по правилу: отношение всего отрезка к большей его части равно отношению большей части отрезка к меньшей. Ему удовлетворяют две точки c и d, расположенные симметрично относительно середины отрезка.

$$\frac{ab}{cb}=\frac{cb}{ac} \qquad \frac{ab}{ad}=\frac{ad}{db}$$

Путем сравнения $R(c)$ и $R(d)$ определяют следующий отрезок, где содержится максимум. Если $R(d) > R(c)$ то в качестве следующего отрезка выбирается отрезок $[c, b]$, в противном случае - отрезок $[a, d]$.

Новый отрезок снова делится на неравные части по правилу золотого сечения. Следует отметить, что точка d является и точкой золотого сечения отрезка $[c,b]$, т.е.

$$\frac{ab}{cb}=\frac{cb}{ac}$$

Поэтому на каждой следующей итерации (кроме "запуска" метода на исходном отрезке) нужно вычислять только одно значение критерия оптимальности.

Существуют аналитические формулы для расчета новой точки на отрезке, где находится максимальное значение $R(x)$, которую нетрудно получить:

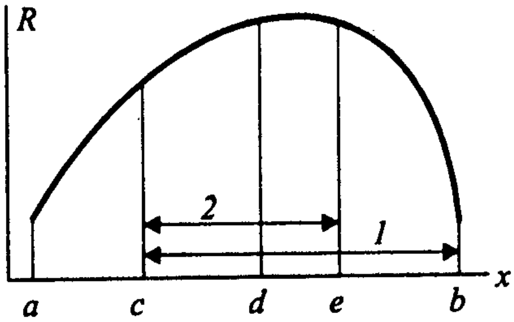


Иллюстрация метода золотого сечения: 1 - интервал, включающий в себя искомый максимум функции после первого этапа (первого золотого сечения в точках *c* и *d*); 2 - то же, после второго этапа (новая точка *e* и старая точка *d*)

$$c = a + (b - a)\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \qquad d = b - (b - a)\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Условие окончания поиска - величина отрезка, содержащего максимум, меньше заданной погрешности.

Метод обеспечивает более быструю сходимость к решению, чем многие другие методы, и применим только для одноэкстремальных функций.

На рис. приведены два этапа поиска максимума функции методом золотого сечения.

Алгоритм метода золотого сечения

Алгоритм метода золотого сечения для минимизации функции на интервале ***[a,b].***

Начальный этап. Выбрать допустимую конечную длину интервала неопределенности $l>0$. Пусть $[a,b]$ - начальный интервал неопределенности. Положить $c=a+(1-0.618)(b-a)$ и $d=a+0.618(b-a)$. Вычислить $F(c)$ и $F(d)$, положить $k=1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Если $b_k-a_k < l$, то остановиться; точка минимума принадлежит интервалу $[a_k,b_k]$. В противном если $F(c_k)>F(d_k)$, то перейти к шагу 2, а если $F(c_k)<=F(d_k)$,то к шагу 3.

Шаг 2. Положить $a_{[k+1]}=c_k$, $b_{[k+1]}=b_k$, $c_{[k+1]}=d_k$, $d_{[k+1]}=a_{[k+1]}+0.618(b_{[k+1]}-a_{[k+1]})$. Вычислить $F(d_{[k+1]})$ и перейти к шагу 4.

Шаг 3. Положить $a_{[k+1]}=a_k$, $b_{[k+1]}=d_k$,$d_{[k+1]}=c_k$, $c_{[k+1]}=a_{[k+1]}+(1-0.618)(b_{[k+1]}-a_{[k+1]})$. Вычислить $F(c_{[k+1]})$ и перейти к шагу 4.

Шаг 4. Заменить k на $k+1$ и перейти к шагу 1.

2.6 Метод квадратичной интерполяции - экстраполяции

Заключается в замене $F(x)$ в промежутке $x_1 \pm h$, где x_1 - начальное приближение, квадратической параболой, экстремум которой вычисляется аналитически. После приближенного нахождения экстремума x_m (максимума или минимума) можно задать $x_1=x_m$ и повторить поиск. Таким образом, с помощью итерационной процедуры значение x_m уточняется до получения его с заданной погрешностью ε. Этот метод обеспечивает поиск как максимумов, так и минимумов $F(x)$, *в* том числе для случая $F(x)=0$, причем точка x_m может лежать в интервале $x_1 \pm h$ (интерполяция) и быть вне его (экстраполяция).

Алгоритм реализации метода.

1. Задаем начальное приближение x_1 для x_m и вычисляем два смежных значения аргумента $P(x)$: $x_0=x_1-h$ и $x_2=x_1+h$, где h - полуинтервал интерполяции - экстраполяции.
2. Вычисляем три значения $F(x\}$: $F(x_o) = F_0$, $F(x_1)=F_1$ *и* $F(x_2)=F_2$.
3. Находим коэффициенты

$$c = \frac{F_0}{2h^2} - \frac{F_1}{h^2} + \frac{F_2}{2h^2} = \frac{1}{2h^2}(F_0 - 2F_1 + F_2) \quad b = \frac{-F_0(2x_1 + h) + 4F_1x_1 - F_2(2x_1 - h)}{2h^2},$$

параболы $y(x)=x^2+bx+c$, проходящей через выбранные три узла интерполяции - экстраполяции $F(x)$, и по ним вычисляем аналитически положение экстремума

$$\tilde{x} = -\frac{b}{2c} = \frac{1}{2} \times \frac{-F_0(2x_1 + h) + 4F_1x_1 - F_2(2x_1 - h)}{F_0 - 2F_1 + F}$$

4. Проверяем выполнение условия $(x_m-x_1)<\varepsilon$. Если оно не выполняется, задаем $x_1=x_m$, и идем к п. 1. Если выполняется, считаем x_m найденным с заданной погрешностью ε, вычисляем $F(x_m)$ и останавливаем счет.

2.7 Сравнение методов одномерной оптимизации

Показывает, что для простой функции $F(x)$, они обеспечивают примерно одинаковое время поиска. Исключением является последний метод, имеющий время поиска примерно в 2,5 раза меньше.

В большинстве случаев для гладких $F(x)$ метод квадратичной интерполяции - экстраполяции дает заметный выигрыш во времени вычислений. Удобно и то, что он без всякой перестройки программ обнаруживает как максимумы, так и минимумы $F(x)$, причем даже за пределами первоначально заданного интервала поиска. Преимущество метода золотого сечения перед методами поразрядного приближения и дихотомии при простых $F(x)$ не выявляется, поскольку программная реализация первого метода сложнее и необходимо выполнение ряда вспомогательных операции. Однако, при сложных $F(x)$ метод золотого сечения может давать существенный выигрыш во времени. Для поиска экстремумов пользуются также методом с числами Фибоначчи, однако, особым преимуществом перед методом золотого сечения он не обладает.

3 МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задача безусловной оптимизации состоит в нахождении минимума или максимума функции в отсутствие каких-либо ограничений. Несмотря на то, что большинство практических задач оптимизации содержит ограничения, изучение методов безусловной оптимизации важно с нескольких точек зрения. Многие алгоритмы решения задачи с ограничениями предполагают сведение ее к последовательности задач безусловной оптимизации. Другой класс методов основан на поиске подходящего направления и последующей минимизации вдоль этого направления. Обоснование методов безусловной оптимизации может быть естественным образом распространено на обоснование процедур решения задач с ограничениями.

3.1 Многомерный поиск без использования производных.

Рассмотрим методы решения минимизации функции нескольких переменных ***f***, которые опираются только на вычисление значений функции ***f(x),*** не используют вычисление производных, т.е. прямые методы минимизации. Важно отметить, что для применения этих методов не требуется не только дифференцируемости целевой функции, но даже аналитического задания. Нужно лишь иметь возможность вычислять или измерять значения ***f*** в произвольных точках. Такие ситуации часто встречаются в практически важных задачах оптимизации. В основном все описанные методы заключаются в следующем. При заданном векторе ***x*** определяется допустимое направление ***d***. Затем, отправляясь из точки ***x***, функция ***f*** минимизируется вдоль направления ***d*** одним из методов одномерной минимизации. Задача линейного поиска заключается в минимизации ***f(x+lym*d)*** при условии, что ***lym*** принадлежит ***L***, где ***L*** обычно задается в форме ***L=E1***, где ***E1***- вещественная ось, ***L={lym: lym >= 0}*** или ***L={l: a<=lym<=b}***. Будем предполагать, что точка минимума ***lym**** существует. Однако в реальных задачах это предположение может не выполняться. Оптимальное значение целевой функции в задаче линейного поиска может быть не ограниченным или оптимальное значение функции конечно, но не достигается ни при каком ***lym***.

3.1.1 Метод циклического покоординатного спуска.

В этом методе в качестве направлений поиска используются координатные векторы. Метод осуществляет поиск вдоль направлений $\boldsymbol{d_1, ..., d_n}$, где $\boldsymbol{d_j}$ - вектор, все компоненты которого, за исключением ***j***-ого, равны нулю. Таким образом, при поиске по направлению $\boldsymbol{d_j}$ меняется только переменная $\boldsymbol{x_j}$, в то время как все остальные переменные остаются зафиксированными.

Заключается в поочередном поиске минимума по координате x_1, затем x_2 и т. д. После нахождения точки минимума по координате x_1 переходим к нахождению точки минимума по координате x_2 и т. д. Поиск ведется с одинаковым шагом, который уменьшается после нахождения всех значений $x_{1m}, x_{2m}, ... x_{nm}$. Таким образом, алгоритм реализации этого метода подобен алгоритму метода поразрядного приближения и лишь дополняется циклом задания переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, внутри которого оценивается погрешность нахождения x_{im} для каждой переменной.

Алгоритм циклического покоординатного спуска

Начальный этап. Выбрать ***eps >0***, которое будет использоваться для остановки алгоритма, и взять в качестве $\boldsymbol{d_1, ..., d_n}$ координатные направления. Выбрать начальную точку $\boldsymbol{x_1}$, положить $\boldsymbol{y_1 = x_1, k=j=1}$ и перейти к основному этапу.

Основной этап.

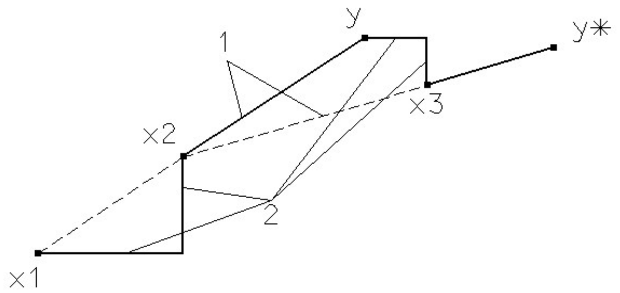
Шаг 1. Положить ***lymj*** равным оптимальному решению задачи минимизации ***f(yj+lym*dj)*** при условии, что ***lym*** принадлежит ***E1***. Положить ***y[j+1]= yj+lymj*dj.*** Если ***j < n***, то заменить j на j+1 и вернуться к шагу 1. Если ***j=n***, то перейти к шагу 2.

Шаг 2. Положить ***x[k+1] = y[n+1].*** Если ***|| x[k+1] - xk || < eps,*** то остановиться. В противном случае положить ***y1= x[k+1], j=1,*** заменить ***k*** на ***k+1*** и перейти к шагу 1.

3.1.2 Метод спирального координатного спуска

Отличается от рассмотренного выше лишь тем, что шаг h меняется каждый раз при переходе от поиска минимума по одной переменной к поиску минимума по другой переменной. В трехмерном пространстве это напоминает спуск во впадину по спирали. Обычно этот метод дает некоторое сокращение времени поиска.

3.1.3 Метод Хука и Дживса.



Метод Хука и Дживса. 1-поиск по образцу; 2- исследующий поиск вдоль координатных осей.

Метод Хука и Дживса осуществляет два типа поиска - исследующий поиск и поиск по образцу. Первые две итерации процедуры показаны на рисунке.

При заданном начальном векторе ***x1*** исследующий поиск по координатным направлениям приводит в точку ***x2*** . Последующий поиск по образцу в направлении ***x1- x2*** приводит в точку ***y.*** Затем исследующий поиск, начинающийся из точки ***y***, дает точку ***x3.*** Следующий этап поиска по образцу вдоль направления ***x3-x2*** дает ***y*.*** Затем процесс повторяется.

Алгоритм Хука и Дживса с использованием одномерной минимизации.

Рассмотрим вариант метода, использующий одномерную минимизацию вдоль координатных направлений ***d1,..., dn*** и направлений поиска по образцу.

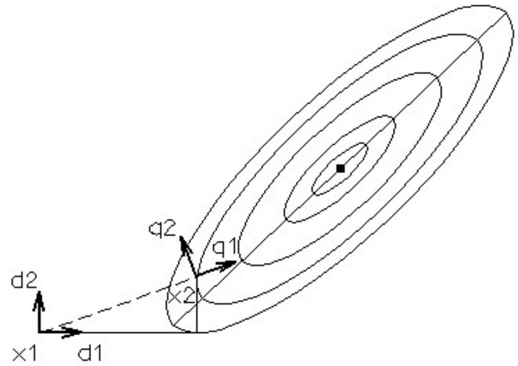
Начальный этап. Выбрать число ***eps > 0*** для остановки алгоритма. Выбрать начальную точку x1, положить ***y1= x1***, ***k=j=1*** и перейти к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Вычислить ***lymj*** - оптимальное решение задачи минимизации ***f(yj+lym * dj)*** при условии ***lym*** принадлежит ***E1***. Положить ***y[j+1]= yj+lymj*dj.*** Если ***j < n,*** то заменить ***j*** на ***j+1*** и вернуться к шагу 1. Если ***j=n***, то положить ***x[k+1] = y[n+1].*** Если ||***x[k+1] - xk***|| < ***eps***, то остановиться; в противном случае перейти к шагу 2.

Шаг 2. Положить ***d = x[k+1] - xk*** и найти ***lym*** - оптимальное решение задачи минимизации ***f(x[k+1]+lym*d)*** при условии lym принадлежит ***E1***. Положить ***y1= x[k+1]+lym*d, j=1,*** заменить ***k*** на ***k+1*** и перейти к шагу 1.

3.1.4 Метод Розенброка.



Построение новых направлений поиска в методе Розенброка.

Рассмотрим вариант метода с применением одномерной минимизации. На каждой итерации процедура осуществляет итеративный поиск вдоль n линейно независимых и ортогональный направлений. Когда получена новая точка в конце итерации, строится новое множество ортогональных векторов. На рисунке новые направления обозначены через q1 и q2.

Построение направлений поиска

Пусть $d_1,\ldots, d_n$ - линейно независимые векторы, по норме равные единицы. Предложим, что эти векторы взаимно ортогональны, т. е. $(d_i * d_j) = 0$ для $i = j$. Начиная из текущей точки ***xk***, целевая функция последовательно минимизируется вдоль каждого из направлений, в результате чего получается точка $x_{[k+1]}$. В частности, $x_{[k+1]} - x_k$ ***= Sum(lymj*dj),*** где ***lymj*** - длина шага по направлению d_j. Новый набор направлений $q_1,\ldots, q_n$ строится с помощью процедуры Грамма-Шмидта следующим образом:

$$a_i = \begin{cases} d_i, \text{ если } lym\ j = 0, \\ Sum(lymi*di),\ i=[j,n], \text{ если } lymj = 0, \\ a_i, \text{ при } j = 1, \end{cases}$$

$$bj = \begin{cases} aj - Sum\ (aj*qi)*qi,\ i=[1,j-1], \text{ при } j >= 2, \\ qj = bj / \|\ bj\ \|. \end{cases}$$

Новые направления, построенные таким образом, являются линейно независимыми и ортогональными.

Алгоритм метода Розенброка с минимизацией по направлению

Начальный этап. Пусть ***eps > 0*** - скаляр, используемый в критерии остановки. Выбрать в качестве $d_1,\ldots, d_n$ координатные направления, начальную точку x_1, положить $y_1= x_1$, ***k=j=1*** и перейти к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Найти ***lymj*** - оптимальное решение задачи минимизации ***f(yj+lymj*dj)*** при условии ***lym*** принадлежит E_1 и положить $y_{[j+1]}= y_j+lymj*d_j$. Если ***j < n,*** то заменить ***j*** на ***j+1*** и вернуться к шагу 1. В противном случае перейти к шагу 2.

Шаг 2. Положить $x_{[k+1]}= y_{[n+1]}$. Если $\|x_{[k+1]} - x_k\| <$ ***eps,*** то остановиться. В противном случае положить $y_1= x_{[k+1]}$, заменить ***k*** на ***k+1*** положить ***j=1*** и перейти к шагу 3.

Шаг 3. Построить новое множество линейно независимых и взаимно ортогональных направлений в соответствии с процедурой Грамма-Шмидта. Обозначить новые направления $d_1,..., d_n$ и вернуться к шагу 1.

3.1.5 Метод минимизации по правильному симплексу.

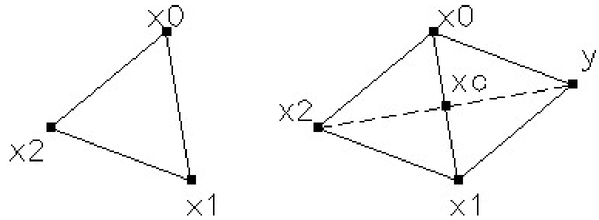
Правильным симплексом в пространстве En называется множество из n+1 равноудаленных друг от друга точек (***вершин симплекса***). Отрезок, соединяющий две вершины, называется ***ребром симплекса***.

В пространстве E2 правильным симплексом является совокупность вершин равностороннего треугольника, а в E3 - правильного тетраэдра. Если x_0 - одна из вершин правильного симплекса в En, то координаты остальных n вершин $x_1,..., x_n$ можно найти, например, по формулам:

$$x_{ji} = \frac{x_{j0} + d_1,\ i= j,}{xj0 + d2,\ i=j,}$$

где $d_1 = a(sqrt(n+1) - 1) / n*sqrt(2)$, $d_2 = a(sqrt(n+1) + n - 1) / n*sqrt(2)$, a - длина ребра.

Вершину x_0 симплекса, построенного по формулам (1), будем называть ***базовой***. В алгоритме симплексного метода используется следующее важное свойство правильного симплекса. По известному симплексу можно построить новый симплекс путем отражения какой-либо вершины, например, x_k симметрично относительно центра тяжести x_c остальных вершин симплекса. Новая и старая вершины y и x_k связаны соотношением: $(y+ x_k)/2 = x_c$, где $x_c = (1/n)Sum(x_i)$ для всех $i=k$. В результате получаем новый симплекс с тем же ребром и вершинами $y=2x_c-x_k$, x_i, $i=0,...,n$, $i=k$. Таким образом происходит перемещение симплекса в пространстве. На рисунке представлена иллюстрация этого свойства симплекса для двумерной области.



Построение нового симплекса в E2 отражением точки x2.

Поиск точки минимума функции $f(x)$ с помощью правильных симплексов производится следующим образом. На каждой итерации сравниваются значения функции в вершинах симплекса. Затем проводится описанная выше процедура отражения для той вершины, в которой $f(x)$ принимает наибольшее значение. Если в отраженной вершине получается меньшее значение функции, то переходят к новому симплексу. Если же попытка отражения не приводит к уменьшению функции, то сокращают длину ребра симплекса, например, вдвое и строят новый симплекс с этим ребром. В качестве базовой выбирают ту вершину x_0 старого симплекса, в которой функция принимает минимальное значение. Поиск точки минимума $f(x)$ заканчивают, когда либо ребро симплекса, либо разность между значениями функции в вершинах симплекса становятся достаточно малыми.

Алгоритм минимизации по правильному симплексу.

Начальный этап. Выбрать параметр точности eps, базовую точку x_0, ребро a и построить начальный симплекс. Вычислить $f(x_0)$.

Основной этап.

Шаг 1. Вычислить значения $f(x)$ в вершинах симплекса $x_1,..., x_n$.

Шаг 2. Упорядочить вершины симплекса $x_0,..., x_n$ так, чтобы $f(x_0)<=f(x_1)<=...<=f(x_{[n-1]})<=f(x_n)$.

Шаг 3. Проверить условие $(1/n)Sum[f(x_i)-f(x_0)]^2 < eps^2$, $i=[1,n]$.

Это одно из возможных условий останова. При его выполнении "дисперсия" значений $f(x)$ в вершинах симплекса становится меньше $e2$, что, как правило, соответствует либо малому ребру а симплекса, либо попаданию точки минимума x^* внутрь симплекса, либо тому и другому одновременно.

Если это условие выполнено, то вычисления прекратить, полагая $x^*= x0$. В противном случае перейти к шагу 4.

Шаг 4. Найти x_c и выполнить отражение вершины x_n : $y=2*x_c- x_n$. Если $f(y)<f(x_n)$, то положить $x_n=y$ и перейти к шагу 2. Иначе - перейти к шагу 5.

Шаг 5. Перейти к новому правильному симплексу с вдвое меньшим ребром, считая базовой вершиной x_0. Остальные n вершин симплекса найти по формуле $x_i=(x_i+ x_0)/2$, $i=1,...,n$. Перейти к шагу 1.

3.1.6 Метод минимизации по деформируемому симплексу

Алгоритм минимизации по правильному симплексу можно модифицировать, добавив к процедуре отражения при построении нового симплекса процедуры сжатия и растяжения. А именно, положение новой вершины y вместо вершины xn, соответствующей наибольшему значению функции, находится сравнением и выбором наименьшего среди значений целевой функции в точках:

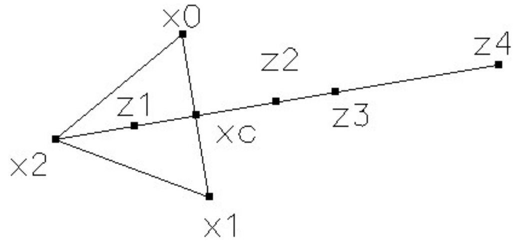
z1= xc - a(xc - xn), 0<a<1;

z2 = xc + a(xc - xn), 0<a<1;

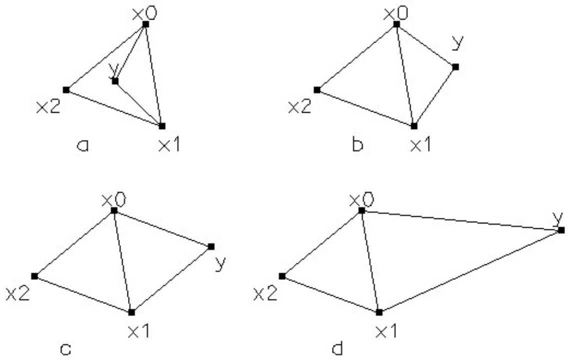
z3 = xc + b(xc - xn), b приближенно равно 1;

z4 = xc + g(xc - xn), g<1.

Геометрическая иллюстрация этих процедур для двумерного пространства приведена на рисунке.



Пробные точки z1, z2, z3, z4 для перехода к новому симплексу



Новые симплексы полученные в результате процедуры сжатия (a,b); отражения (c); растяжения (d)

Так как величина ***a*** принадлежит интервалу ***(0;1),*** то выбор точек ***z1*** и ***z2*** соответствует сжатию симплекса; ***b*** приближенно равно 1, поэтому выбор точки z3 соответствует отражению, а ***g>1*** и выбор точки ***z4*** приводит к растяжению симплекса.

Отметим, что при деформациях утрачивается свойство правильности исходного симплекса.

На практике хорошо зарекомендовал себя следующий набор параметров ***a=1/2, b=1, g=2.***

Алгоритм метода поиска точки минимума функции по деформируемому симплексу

Начальный этап. Выбрать параметр точности ***eps,*** параметры ***a, b*** и ***g***, базовую точку x_0, параметр ***a*** и построить начальный симплекс. Вычислить значение функции $f(x_0)$.

Основной этап.

Шаг 1. Вычислить значения функции в вершинах симплекса $x_1,\dots, x_n$.

Шаг 2. Упорядочить вершины симплекса $x_0,\dots, x_n$ так, чтобы $f(x_0)<=f(x_1)<=\dots<=f(x_{[n-1]})<=f(x_n)$.

Шаг 3. Проверить условие $(1/n)Sum[f(x_i)-f(x_0)]^2 < e^2$, $i=[1,n]$.

Это одно из возможных условий останова. При его выполнении "дисперсия" значений ***f(x)*** в вершинах симплекса становится меньше ***e2***, что, как правило, соответствует либо малому ребру ***a*** симплекса, либо попаданию точки минимума ***x**** внутрь симплекса, либо тому и другому одновременно.

Если это условие выполнено, то вычисления прекратить, полагая ***x*= x0.*** В противном случае перейти к шагу 4.

Шаг 4. Найти x_c и пробные точки z_k, $k=1,\dots,4$ по формулам (2). Найти $f(z^*)=minf(z_k)$. Если $f(z^*)<f(x_n)$, то положить $x_n = z^*$ и перейти к шагу 2. Иначе - перейти к шагу 5.

Шаг 5. Уменьшить симплекс, полагая $x_i=(x_i+ x_0)/2$, $i=1,\dots,n$ перейти к шагу 1.

3.2 Многомерный поиск, использующий производные.

Пусть функция ***f(x)*** дифференцируема в ***En*** . В этом разделе рассматривается итерационная процедура минимизации вида:

$x_k = x_{[k-1]} + lym[k]*d_k$, $k=1,\dots,$

где направление убывания d_k определяется тем или иным способом с учетом информации о частных производных функции ***f(x),*** а величина шага ***lym[k] >0*** такова, что

$f(x_k) < f(x_k-1)$, $k=1,2,\dots.$

Так как функция предполагается дифференцируемой, то в качестве критерия останова в случае бесконечной итерационной последовательности ***{ xk },*** как правило, выбирают условие $||grad(f(x_k))||<eps$, хотя, разумеется, могут быть использованы и другие критерии.

3.2.1 Метод наискорейшего спуска

Метод наискорейшего спуска является одной из наиболее фундаментальных процедур минимизации дифференцируемой функции нескольких переменных. Вектор ***d*** называется направлением спуска для функции ***f*** в точке ***x***, если существует такое ***d > 0,*** что ***f(x+lym*d)<f(x)*** для всех ***lym*** принадлежащих интервалу ***(0, d).*** В частности, если

$$\lim \frac{f(x+ld)-f(x)}{lym} < 0, \text{ при } lym \to 0+$$

то d - направление спуска. В методе наискорейшего спуска осуществляется движение вдоль направления d, для которого $||d|| = 1$ и которое минимизирует приведенный выше предел. Если f дифференцируема в точке x и $grad(f(x))=0$, то $-grad(f(x))/||grad(f(x))||$ является направлением наискорейшего спуска. В связи с этим метод наискорейшего спуска иногда называют градиентным методом.

Алгоритм метода наискорейшего спуска

При заданной точке x алгоритм наискорейшего спуска заключается в реализации линейного поиска вдоль направления $-grad(f(x))/||grad(f(x))||$ или, что то же самое, вдоль направления $-grad(f(x))$.

Начальный этап. Пусть $eps > 0$ - константа остановки. Выбрать начальную точку x1, положить $k=1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап. Если $||grad(f(x))|| < eps$, то остановиться; в противном случае положить $d_k = -grad(f(x))$ и найти $lym[k]$ - оптимальное решение задачи минимизации $f(x_k + lym*d_k)$ при $lym >= 0$. Положить $x_{[k+1]}=x_k+lym[k]*d_k$, заменить k на $k+1$ и повторить основной этап.

3.3 Методы, использующие сопряженные направления.

Понятие сопряженности очень важно в задаче безусловной минимизации. В частности, если целевая функция квадратична, то поиском вдоль сопряженных направлений можно получить точку минимума не более чем за n шагов, n - размерность пространства.

Определение. Пусть H - симметрическая матрица порядка nxn. Векторы $d_1,..., d_k$ называются H-сопряженными, или просто сопряженными, если они линейно независимы и $di(t)Hdj = 0$ при $i= j$, *где* $di(t)$ - вектор строка.

Минимум квадратичной функции может быть найден не более чем за n шагов при условии, что поиск ведется вдоль сопряженных относительно матрицы Гессе направлений. Поскольку произвольная функция может быть достаточно хорошо представлена в окрестности оптимальной точки ее квадратичной аппроксимацией, понятие сопряженности становится очень удобным для оптимизации как квадратичных, так и неквадратичных функций.

3.3.1 Метод Дэвидона - Флетчера - Пауэлла

Первоначально метод был предложен Дэвидоном и затем развит Флетчером и Пауэллом. Метод Дэвидона-Флетчера-Пауэлла называют также и методом переменной метрики. Он попадает в общий класс квазиньютоновских процедур, в которых направления поиска задаются в виде $- D_j*grad(f(y))$. Направление градиента является, таким образом, отклоненным в результате умножения на $-D_j$, где D_j - положительно определенная симметрическая матрица порядка nxn, аппроксимирующая обратную матрицу Гессе. На следующем шаге матрица D_{j+1} представляется в виде суммы D_j и двух симметрических матриц ранга один каждая. В связи с этим схема иногда называется схемой коррекции ранга два.

Алгоритм метода Дэвидона - Флетчера - Пауэлла

Начальный этап. Пусть $eps >0$ - константа для остановки. Выбрать точку x_1 и начальную симметрическую положительно определенную матрицу $D1$. Положить $y_1 = x_1, k=j=1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Если $||grad(f(x))|| < eps$, то остановиться; в противном случае положить $d_j = -D_j*grad(f(y_j))$ и взять в качестве $lymj$ - оптимальное решение задачи минимизации $f(y_j + lym*d_j)$ при $lym >= 0$. Положить $y_{[j+1]} = y_j + lymj*d_j$. *Если* $j < n$, то перейти к шагу 2. Если $j=n$, то положить $y_1=x_{[k+1]}=y_{[n+1]}$, заменить k на $k+1$, положить $j=1$ и повторить шаг 1.

Шаг 2. Построить D_{j+1} следующим образом:

$$D_{i+1} = D_i + \frac{pjpj(t)}{pj(t)qj} - \frac{Djqjqj(t)Dj}{qj(t)Djqj},$$

где $pj = lymj*dj,\ qj = grad(f(y[j+1])) - grad(f(yj))$.

Заменить j на $j+1$ и перейти к шагу 1.

3.4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Алгоритмы безусловной минимизации функций многих переменных можно сравнивать и исследовать, как с теоретической, так и с экспериментальной точек зрения.

Первый подход может быть реализован полностью только для весьма ограниченного класса задач, например, для сильно выпуклых квадратичных функций. При этом возможен широкий спектр результатов от получения бесконечной минимизирующей последовательности в методе циклического покоординатного спуска до сходимости не более чем за *n* итераций в методе сопряженных направлений.

Мощным инструментом теоретического исследования алгоритмов являются теоремы о сходимости методов. Однако, как правило, формулировки таких теорем абстрактны, при их доказательстве используется аппарат современного функционального анализа. Кроме того, зачастую непросто установить связь полученных математических результатов с практикой вычислений. Дело в том, что условия теорем труднопроверяемы в конкретных задачах, сам факт сходимости мало что дает, а оценки скорости сходимости неточны и неэффективны. При реализации алгоритмов также возникает много дополнительных обстоятельств, строгий учет которых невозможен (ошибки округления, приближенное решение различных вспомогательных задач и т.д.) и которые могут сильно повлиять на ход процесса.

Поэтому на практике часто сравнение алгоритмов проводят с помощью вычислительных экспериментов при решении так называемых специальных тестовых задач. Эти задачи могут быть как с малым, так и с большим числом переменных, иметь различный вид нелинейности. Они могут быть составлены специально и возникать из практических приложений, например задача минимизации суммы квадратов, решение систем нелинейных уравнений и т.п.

4 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4.1 ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим вопрос практического применения теории вероятностей. Чем более непредсказуем результат, тем интереснее и сложнее принимать решение. Как правило, возможные исходы известны, но вопрос в том, какому из них суждено сбыться. Теория вероятностей предлагает пути уменьшения неопределенности, именно поэтому важно ею овладеть. Студентам бывает трудно ее освоить из-за множества новых концепций, правил, понятий. Поэтому старайтесь представить себе реальные ситуации, в которых может встретиться предложенная проблема, что логично в такой ситуации предпринять. Просчитайте, какие последствия повлечет то или иное решение. Иногда это сделать сложно, но именно в этом заключается первый и самый важный этап принятия решения.

Итак, рассмотрев теоретически возможные исходы (с практической точки зрения), вы делаете вычисление вероятности каждого из них простым делом.

Рассмотрим кратко основные понятия теории вероятностей.

4.1.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей родилась из математической теории игр.

В середине XVII века французские математики Паскаль и Ферма разработали математическую модель, описывающую вероятность исходов в играх, зависящих от случая, по заказу известных игроков в азартные игры. При игре в «кости», рулетку, как и при опросах, исследованиях (физических, экономических, социологических и т.д.), результаты меняются от раза к разу даже при сохранении неизменных условий.

Деловые люди принимают решения в таких же условиях. Например, специалист по маркетингу никогда не сможет точно предсказать объемы реализации нового товара. Так же, как и заключая пари, невозможно предвидеть, выиграешь или проиграешь. И в том, и в другом случае присутствует *неопределенность.* Теория вероятностей как раз и оперирует этим понятием. Изучение теории вероятностей, основанной на игре случая, обеспечит надежный инструмент измерения и контроля различных форм неопределенности, с которыми имеют дело люди.

Для начала несколько слов о терминологии.

Опыт - действие, результат которого заранее неизвестен. Например, результат бросания монеты или игральной кости.

Эксперимент - один или несколько опытов. Например, бросание монеты 6 раз.

Исход - возможный результат эксперимента. Например, монета брошена 6 раз, результат: «решка», «решка», «решка», «орел», «орел», «решка».

Событие - один или несколько исходов эксперимента. Например, монета брошена 6 раз, событие: 2 «орла», 4 «решки».

Хотя может существовать неопределенность в отношении результата единственного эксперимента, ряд идентичных экспериментов определяет наиболее вероятный результат, который и используется в анализе ситуации.

Вероятность - что это такое?

В качестве иллюстрации можно взять бросание монеты. Существуют два возможных исхода - «орел» и «решка». С какой вероятностью будет выпадать «решка»? Бросим монету 10 раз, а результаты запишем. А потом увеличим число экспериментов до 100, 1000 и так далее. Возможные результаты могут быть таковы.

Таблица Возможное распределение результатов

Число бросков	**Число**		**Соотношение**	
	«орлов»	**«решек»**	**«орлов»**	**«решек»**
10	6	4	0,6	0,4
100	64	36	0,64	0,36
1000	643	357	0,643	0,357
10000	6431	3569	0,6431	0,3569

По мере увеличения числа бросков выявляется стремление частоты появления «орлов» к определенной величине. В данном примере их доля - 0,643 при точности трех знаков после запятой.

На основе данных табл. можно предсказать, что при 10001-м броске вероятность выпадения «орла» больше, нежели решки, и составит примерно 0,643.

Если считать «успехом» тот результат, в котором мы заинтересованы, то определение вероятности будет следующим:

Вероятность - это число «успехов», полученное в результате большого числа экспериментов, так что вероятность определяет возможность «успеха» в следующем эксперименте.

4.1.2 Свойства вероятности

Из того, что вероятность является соотношением, следуют два важных вывода. Если мы обозначим вероятность исхода эксперимента р, то можно сказать следующее:

1. Числовое значение вероятности находится в интервале от 0 до 1 включительно:

$О < p < 1$, т.е. р не может быть отрицательным или быть больше 1.

2. Сумма вероятностей результатов (вероятность полной группы событий) равна 1, т.е. вероятность того, что что-то произойдет, равна 1: $\sum P = 1$. Следовательно, вероятность события Е есть Р(Е), тогда: $0 \le P(E) \le 1$.

Как найти значение вероятности

Зная, что вероятность можно измерить, попробуем выразить ее в цифрах. Существуют три возможных пути.

1	Р = 1 определенность	Например, вероятность того, что вы когда-нибудь умрете.
↑	Увеличение определенности события	
0,5	Р=0,5	
↓	Увеличение неопределенности события	
0	Р = 0 невозможность	Например, вероятность того, что вы будете жить вечно.

4.1.3 ВЕРОЯТНОСТЬ, ОПРЕДЕЛЯЕМАЯ СИММЕТРИЕЙ

Существуют ситуации, в которых возможные исходы равновероятны. Например, при бросании монеты один раз, если монета стандартная, вероятность появления «орла» или «решки» одинакова, т.е. **Р(«орел») = Р(«решка»).** Так как возможны лишь два исхода, то **Р(«орел») + Р(«решка») = 1,** следовательно, **Р(«орел») = Р(«решка») = 0,5.**

В экспериментах, где исходы имеют равные шансы появления, вероятность события Е, равна:

$$P(E) = \frac{\text{Количество равновероятных исходов, составляющих Е}}{\text{Общее количество исходов}}$$

Пример 1

Монета брошена три раза. Какова вероятность двух «орлов» и одной «решки»?

Решение.

Для начала найдем все возможные исходы: (ppp, ppo, pop, opp, poo, opo, oop, ooo).

Итак, имеются 8 равновозможных исходов, следовательно, вероятность каждого из них равна 1/8. Событие Е - два «орла» и «решка» - произошло три раза (poo, opo, oop). Поэтому:

$$P(E) = \frac{\text{Количество исходов, дающих Е}}{\text{Общее количество исходов}} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Пример 2

Стандартная игральная кость брошена два раза. Какова вероятность того, что сумма очков равна 9 или больше?

Решение.

Найдем все возможные исходы.

Общее количество очков, получаемое при двукратном бросании игральной кости

Очки при втором броске	Очки при первом броске					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Итак, в 10 из 36 возможных исходов сумма очков равна 9 или больше, следовательно:

$$P\text{ (9 или больше очков в результате двух бросаний игральной кости)} = \frac{10}{36} = 0{,}278$$

4.1.4 ВЕРОЯТНОСТЬ, ОПРЕДЕЛЯЕМАЯ ЭМПИРИЧЕСКИ

При общем числе экспериментов n, из которых m удачных, вероятность требуемого результата подсчитывается так:

$$P\text{ (успешных исходов)} = \frac{m}{n} \quad \text{при большом n}$$

Отношение m/n есть относительная частота появления определенного результата при достаточно продолжительном эксперименте. Вероятность обычно подсчитывается либо на основе данных проведенного эксперимента, либо на основе прошлых данных.

Пример 3

Из пятисот протестированных электроламп 415 проработали более 1000 часов. На основе данных этого эксперимента можно заключить, что вероятность нормального функционирования лампы данного типа более 1000 часов составляет:

415/500= 0,83

Примечание. Контроль имеет разрушающий характер, поэтому не все лампы могут быть проверены. Если бы была протестирована только одна лампа, то вероятность составила бы 1 или 0 (т.е. сможет проработать 1000 часов или нет). Отсюда следует необходимость повторения эксперимента.

Пример

Стаж, лет	Число работников
Менее 1	26
От 1 до 2	36
От 2 до 3	16
От 3 до 4	20
От 4 до 5	2
5 и более	0
Всего: 100	

В таблице приведены данные о стаже мужчин, работающих в фирме:

Стаж работы мужчины

Какова вероятность того, что следующий принятый на работу в фирму человек проработает не меньше двух лет:

Решение.

Из таблицы видно, что 38 из 100 работников работают в компании больше двух лет. Эмпирическая вероятность того, что следующий работник останется в компании на срок более двух лет равна: 38/100= 0,38

При этом мы предполагаем, что новый работник «типичен», а условия работы неизменны.

4.1.5 СУБЪЕКТИВНАЯ ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ

В жизни и бизнесе часто возникают ситуации, в которых отсутствует симметрия, и экспериментальных данных тоже нет. Поэтому определение вероятности благоприятного исхода под влиянием взглядов и опыта исследователя носит субъективный характер.

Пример

1. Эксперт по инвестициям считает, что вероятность получения прибыли в течение первых двух лет равна 0,6.

2. Прогноз менеджера по маркетингу: вероятность продажи 1000 единиц товара в первый месяц после его появления на рынке равна 0,4.

4.2 ДЕЙСТВИЯ С ВЕРОЯТНОСТЯМИ

Для начала определимся с терминологией:

Независимыми событиями А и В называются такие, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого. Например: по одному разу брошены монета и кость, выпали - «решка» и «6». Результаты обоих событий друг на друга не влияют, поэтому называются независимыми.

Несовместимыми событиями А и В называются такие, если может произойти только одно из них. Например, брошена игральная кость: А - выпало четное число, В - нечетное. Если кость брошена только один раз, А и В произойти одновременно не могут, поэтому они - несовместные события.

Вероятность сложных событий определяется двумя правилами - правилом сложения вероятностей и правилом умножения вероятностей.

4.2.1 Правило сложения вероятностей

Для простоты рассмотрим лишь два события - А и В. Правило сложения вероятностей применяется для подсчета вероятности осуществления событий А или В, или их обоих сразу:

$$P(A + B) = P(A) + A(B) - P(AB).$$

Если события А и В несовместимы, то: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Так как события А и В несовместимые, то они не могут произойти одновременно, значит:

$$P(AB) = 0.$$

Пример

Игральная кость брошена один раз. Какова вероятность выпадения «двойки» или нечетного числа?

Решение.

Возможны 6 исходов - 1, 2, 3, 4, 5, и 6. Назовем событием А выпадение «двойки», а событием В - выпадение «единицы», «тройки» или «пятерки».

Решить задачу можно либо по правилу симметрии, либо используя правило сложения вероятностей.

1. По правилу симметрии:

$$P\text{ (2 или нечетное число)} = \frac{\text{Число благоприятных исходов (т.е. 2 или 1, 3, 5)}}{\text{Общее число исходов}} = \frac{4}{6} = 0{,}278$$

2. По формуле сложения вероятностей:

два события несовместимы, значит: P(AB) = 0, поэтому P(A+B) = P(A) + P(B).

Отсюда P(A+B)=P(A)+P(B)=1/6+3/6=4/6

Пример

Игральная кость брошена один раз. Какова вероятность выпадения «двойки» или четного числа?

Решение.

События совместимы, когда они могут произойти одновременно. Поэтому:

1. По правилу симметрии: существуют три исхода - 2, 4, 6, следовательно, вероятность появления «двойки» или любого другого четного числа равна 3/6.

2. По правилу сложения вероятностей:

P (A + B) = P (A) + P (B) - P (AB),

а так как A и B не являются взаимоисключающими, то

P (A + B) =1/6+3/6-1/6=3/6

Пример

Число дефектов в изделии может быть любым - 0, 1, 2, 3, 4, и т.д. По оценке компании вероятность отсутствия дефекта составляет 0,9, а вероятность наличия одного дефекта - 0,05. Какова вероятность, что в изделии не больше, чем один дефект?

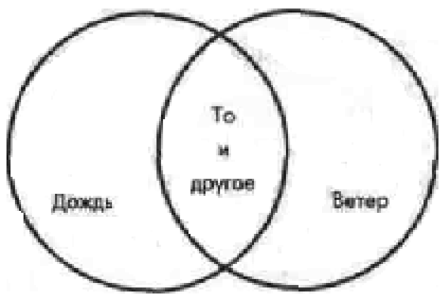
Решение. P(не больше, чем один дефект) = P(отсутствие дефектов или один).

Опять события несовместимы, поэтому:

P (отсутствие дефектов или один) = P(отсутствие дефектов) + P(один дефект) + 0,9 + 0,05 = 0,95.

Пример

Прогноз метеорологов: P(дождь) = 0,4; P(ветер) = 0,7; P(дождь и ветер) = 0,2.



Прогноз погоды в виде диаграммы Венна

Какова вероятность того, что будет дождь или ветер?

Решение. По формуле сложения вероятностей:

P(дождь или ветер или то, и другое) = P (дождь) + P(ветер) - P(дождь и ветер) = 0,4 + 0,7 - 0,2 = 0,9.

Диаграмма Венна - еще один вид представления результата в графической форме. Здесь события изображены в виде окружностей, помещенных внутри прямоугольника. В данном случае одна окружность обозначает дождь, другая - ветер. Их общее пространство - дождь и ветер. Свободная площадь - отсутствие дождя и ветра. Значения вероятностей должны быть проставлены в соответствующих местах диаграммы:

4.2.2 Условная вероятность

Рассмотрим два события - E и F, которые происходят друг за другом. P (E) - вероятность события E. Отсюда возникают две альтернативные ситуации:

1. F от E не **зависит,** и на вероятность события F не влияет то, произошло ли уже событие E или нет.

2. E и F - зависимы, т.е. вероятность события F зависит от того, произошло ли уже событие E или нет. В этом случае вероятность события F называется **условной.** Вероятность F при условии, что E произошло, обозначается так:

P(F при условии E) или P(F/E). Если E и F независимы, тогда:

P (F при условии E) = P (F).

Пример

В коробке 8 красных шаров и 6 голубых. Какова вероятность того, что из двух вытащенных наугад шаров последний будет красным?

Решение Возможны два варианта:

1. Первым вытащен красный шар, в коробке осталось 7 красных и 6 голубых шаров;

2. Первым вытащен голубой шар, осталось 8 красных и 5 голубых шаров.

В случае 1 вероятность того, что второй вытащенный шар будет красным, равна 7/13.

В случае 2 вероятность равна 8/13.

4.2.3 Правило умножения вероятностей

Это правило применяется, когда требуется найти вероятность того, что события A и B произойдут одновременно. Правило умножения вероятностей состоит в следующем:

P (AB) = P (A) x P (B/A).

Если A и B независимы, то P (B/A) = P (B), и правило выглядит так:

P (AB) = P (A) x P (B).

Пример

Игральная кость брошена дважды. Событие A - выпадение "двойки" при первом бросании, событие B - выпадение нечетного числа при втором бросании. Какова вероятность того, что события A и B произойдут в одном эксперименте?

Решение.

Так как результат второго опыта не зависит от результата первого, то события А и В - независимы, тогда по формуле умножения вероятностей:

P(AB)=P(A)xP(B)=1/6+3/6=3/36=0,083

Пример

На станции отправления имеется 8 заказов на отправку товара:

пять - внутри страны, а три - на экспорт. Какова вероятность того, что два выбранных наугад заказа окажутся предназначенными для потребления внутри страны?

Решение.

Событие А - первый взятый наугад заказ - внутри страны. Событие В - второй, тоже взятый наугад заказ. Нам необходимо найти вероятность Р (АВ), поэтому по формуле:

P(AB)=P(A)xP(B/A)=5/8+4/7=20/56=0,357

4.2.4 Правило вычисления вероятностей для более чем двух событий

Рассмотренные правила применимы также, если событий более, чем два. Для несовместимых событий правило сложения вероятностей приобретает следующий вид:

Р (А + В + С + ...) = Р (А) + Р (В) + Р (С) + ...

Для совместимых событий формула приобретает очень сложный вид. Для независимых событий правило умножения вероятностей имеет следующий вид:

Р (А и В и С и ...) = Р (А) х Р (В) х Р (С) х ...

Если события не являются независимыми, то правило умножения вероятностей запишется как: Р (А х В х С х ...) = Р (А) х Р (В/А) х Р (С/АВ) х ...

Пример

Совет директоров состоит из трех бухгалтеров, трех менеджеров и двух инженеров. Планируется создать подкомитет из его членов. Какова вероятность того, что все трое в этом подкомитете будут бухгалтеры?

Решение.

Р(все члены - бухгалтеры) = Р(1-й член - бухгалтер и 2-й член - бухгалтер и 3-й член - бухгалтер) = Р(1-и член - бухгалтер) х Р(2-й член - бухгалтер при условии, что 1-й член - бухгалтер) х Р(3-й член - бухгалтер при условии, что 1-й и 2-й члены - бухгалтеры) = (3/8) х (2/7) х (1/6) = 1/56.

Пример

Станок работает при условии одновременного функционирования узлов А, В и С, которые работают независимо друг от друга. Вероятность поломки этих узлов равна 0,2; 0,3; 0,1 соответственно. Какова вероятность, что станок выйдет из строя?

Решение

Станок функционирует только в случае бесперебойной работы каждого узла, в противном случае происходит остановка оборудования.

Для каждого узла вероятности таковы:

Р (поломка узла А) = 0,2, следовательно, Р (узел А работает) = 0,8;

Р (поломка узла В) = 0,3, следовательно, Р (узел В работает) = 0,7;

Р (поломка узла С) = 0,1, следовательно, Р (узел С работает) = 0,9.

Р (работает А и работает В и работает С) = Р (работает А) х Р (работает В) х Р (работает С) = 0,8 х 0,7 х 0,9 = 0,504.

Вероятность поломки оборудования в течение года равна сумме семи остальных «ветвей» или, так как вероятность полной группы событий (т.е. бесперебойная работа и поломка) равна 1, то:

Р (поломка) = 1 - Р (бесперебойная работа) = 1 - 0,504 = 0,496.

4.2.5 ФОРМУЛА БАЙЕСА

На основании правила умножения вероятностей мы можем вывести формулу Байеса:

РР (АВ) = Р (А) х Р (В/А) или Р (АВ) = Р (В) х Р (А/В),

откуда Р (А/В)= Р (АВ)/ Р (В)

Это и есть формула Байеса.

Вероятность Р(А) подсчитывается до проведения опыта, поэтому носит теоретический, предварительный характер. Вероятность Р(А/В) основывается на данных уже проведенного эксперимента, поэтому более точна с практической точки зрения.

Пример

Фирма имеет три источника поставки комплектующих - фирмы А, В, С. На долю фирмы А приходится 50% общего объема поставок, В - 30% и С - 20%. Из практики известно, что 10% поставляемых фирмой А деталей бракованных, фирмой В - 5% и фирмой С - 6%.

1. Какова вероятность, что взятая наугад деталь была получена от фирмы А?

2. Какова вероятность, что взятая наугад и оказавшаяся бракованной деталь получена от фирмы А?

Решение.

1. Так как 50% комплектующих деталей поставляются фирмой А, то

Р (деталь поставлена А) = 50%, или Р (А) = 0,5.

Следовательно, вероятность того, что взятая наугад деталь была поставлена фирмой А, равна 0,5.

2. Используя формулу Байеса, это можно выразить так:

$$P\,(A\ /\ \text{с браком}) = \frac{P\,(A \text{ и с браком})}{P\,(\text{с браком})} = \frac{0{,}5x0{,}1}{(0{,}5x0{,}1)+(0{,}3x0{,}05)+(0{,}2x0{,}06)} = 0{,}65$$

Итак, вероятность того, что поступившая бракованная деталь была поставлена фирмой А, равна 0,65.

4.3 РЕЗЮМЕ

Теория вероятностей имеет дело с понятием неопределенности. При проведении эксперимента мы знаем все возможные исходы, однако не все они произойдут. Ответ на вопрос, каковы же шансы реализации того или иного исхода, дает вероятность.

Событие - это один или несколько исходов, которые нас интересуют. Численные границы вероятности - от 0 до 1 включительно. Сумма вероятностей всех возможных исходов (вероятность полной группы событий) всегда равна 1. Вероятность определяется или на основе свойства симметрии эксперимента, или путем повторения измерений, или на основе субъективной оценки.

Существуют два основных правила подсчета вероятности: правило сложения и правило умножения вероятностей. Правило сложения вероятностей применяется для вычисления вероятности появления события А или В, или обоих вместе:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Для несовместимых событий формула преобразуется в следующую:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Правило умножения вероятностей применяется, когда события происходят

$$P(AB) = P(A) \text{ x } P(B/A).$$

Для независимых событий эта формула преобразуется в следующую:

$$P(AB) = P(A) \text{ x } P(B).$$

Перед вычислением вероятности необходимо составить список всех возможных исходов эксперимента. Лучше всего изобразить их графически, для чего используются таблицы, диаграммы в виде «деревьев», диаграммы Венна. Только после этого приступают к расчетам.

Расчет по формуле Байеса применяется с целью модификации вероятности в случае, когда появилась новая дополнительная информация. Этот расчет основан на правиле умножения вероятностей: $P(A/B)=P(AB)/P(B)$

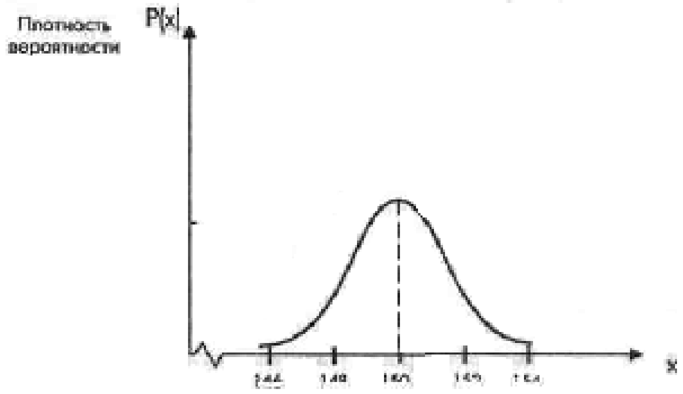
4.4 НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

4.4.1 Природа нормального распределения

Нормальное распределение используется в ситуациях, связанных с измерениями веса или объема товаров, роста мужчин, проходящих медкомиссию, срока работы электроламп и т.д. Характерные свойства равномерного распределения, рассмотренные нами в предыдущем параграфе, относятся также и к нормальному распределению:

1. Площадь, образуемая кривой нормального распределения, представляет собой вероятность, что непрерывная случайная величина примет значения из заданного интервала.
2. Общая площадь под кривой нормального распределения равна полной вероятности, т.е. 1.
3. Невозможно точно определить вероятность того, что непрерывная случайная величина принимает какое-то конкретное значение.

Нормальное вероятностное распределение - это симметричное относительно среднего случайного значения величины распределение. Теоретически значения случайной величины находятся в интервале от минус до плюс бесконечности, т.е. непрерывная случайная величина может принимать любые значения, как положительные, так и отрицательные. Однако на практике нормальное распределение обычно используется для случайной величины, значения которой расположены в ограниченном интервале. Ниже представлен график типичного нормального распределения.



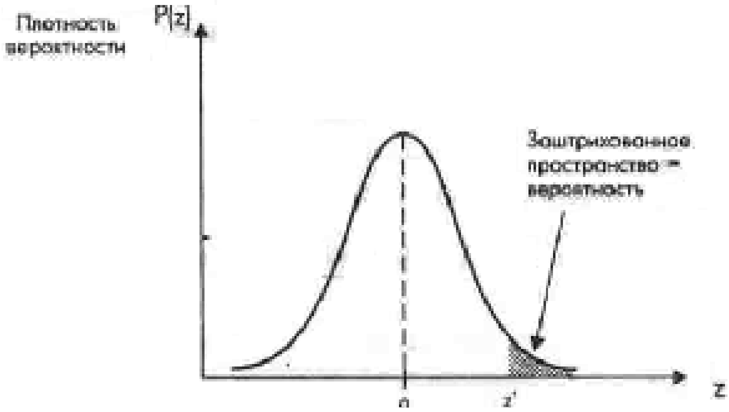
Распределение пачек чая по весу

Функция плотности вероятности для нормального распределения представляет собой сложную математическую функцию, которая зависит от среднего значения случайной величины m и ее дисперсии σ^2. К счастью, все нормальные распределения можно свести к единому стандартному вероятностному распределению. Для этого распределения были составлены таблицы, в которых указываются площади под кривой для различных значений непрерывной случайной величины и по которым мы можем определить ту вероятность, которая нам требуется.

В стандартном нормальном распределении среднее значение случайной величины равно 0, дисперсия равна 1 и, следовательно, стандартное отклонение равно 1. Замена нормального распределения стандартным распределением означает то, что значения случайной величины (минуты, граммы, сантиметры и т.д.) выражены стандартным отклонением среднего значения случайной величины. После замены реальных цифр единицами стандартного отклонения (z) требуемые вероятности могут быть найдены по таблице.

Существует несколько вариантов таблиц нормального распределения. Все они дают один и тот же результат, только несколько различными путями.

4.4.2 Стандартное нормальное распределение



Стандартное нормальное распределение

В таблицах нормального распределения приведены значения вероятностей для z от 0 до 3,5. Так как распределение симметрично, то эти же значения могут быть использованы для отрицательных z.

Значение непрерывной случайной величины можно выразить числом стандартных отклонений от среднего значения следующим образом: $z=(x-\mu)/\sigma$

где x - значение случайной величины;

μ - среднее значение;

σ - стандартное отклонение;

z - на сколько стандартных отклонений отличается интересующее нас значение случайной величины от среднего.

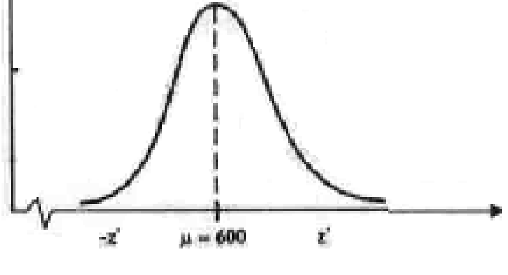
Пример

Производителю электроламп известно, что средний срок работы лампы составляет 600 ч, а стандартное отклонение срока работы - 40 ч. Какова вероятность, что срок работы:

1) менее 700 ч;
2) менее 550 ч;
3) от 550 до 700 ч;
4) 2% ламп имеют минимальный срок работы. Какова его величина?

Решение.

На рисунке приведена функция плотности распределения электроламп по сроку работы.



Распределение электроламп по сроку работы

Вероятность того, что электролампа проработает менее 700 ч

На рисунке вероятность того, что электролампа проработает менее 700 ч, представлена заштрихованным пространством.

Теперь перейдем к стандартному нормальному распределению со средним, равным 0, и стандартным отклонением, равным 1. Подсчитаем, сколько стандартных отклонений находится между средним μ и 700 ч, т. е. найдем значение z:

$$z=(x-\mu)/\sigma=(700-600)/40=2{,}5$$

(700 ч отличается от среднего на 2,5 стандартных отклонений). По таблице нормального распределения находим: $P(z> 2{,}5) =0{,}0062$.

Так как общая вероятность равна 1, то: $P (z < 2{,}5) = 1 - 0{,}0062 = 0{,}9938$,

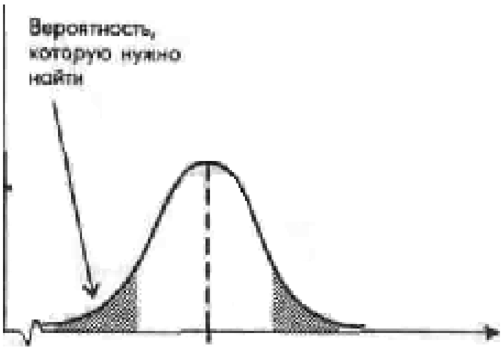
т.е. вероятность того, что лампа проработает меньше 700 ч, равна 99,38%. Иными словами, 99,38% ламп проработают 700 ч и меньше.

2. На рисунке вероятность того, что лампа проработает меньше 550 ч, представлена заштрихованным пространством.

Теперь сведем нормальное распределение к единому виду со средним, равным 0, и стандартным отклонением, равным 1. Подсчитаем, сколько стандартных отклонений находится между средним μ и 550 ч:

$$z=(L-\mu)/\sigma=(550-600)/40=-1{,}25$$

(550 ч на 1,25 стандартных отклонений меньше среднего)



Вероятность того, что срок работы лампы будет меньше 550 ч

Так как нормальное распределение симметрично, то:

$P(z \le - 1{,}25) =P(z \ge 1{,}25)$. По таблице нормального распределения находим:

$P(z \ge -1{,}25) =0{,}1056$, или

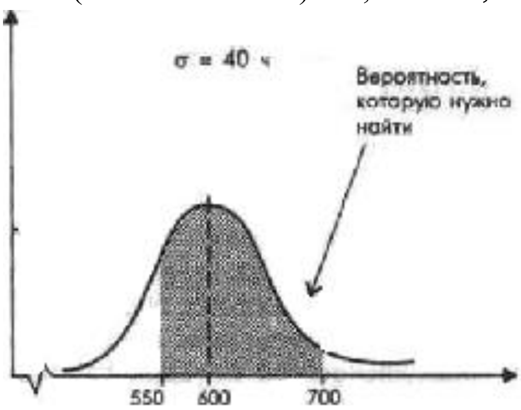
$P(z \le - 1{,}25) =0{,}1056$,

т.е. вероятность того, что срок работы лампы будет меньше 550 ч, равна 0,1056. Иными словами, 10,56% ламп проработают меньше 550 ч.

3. На рисунке площадь заштрихованного пространства равна вероятности того, что лампа проработает от 550 до 700 ч.

$P (550 < L < 700$ ч$)=P (L < 700$ ч$) - P (L < 550$ ч$)$. Требуемые вероятности мы рассчитали в пунктах 1 и 2:

$P (550 < L < 700$ ч$) = 0{,}9938 - 0{,}1056=0{,}8882$,

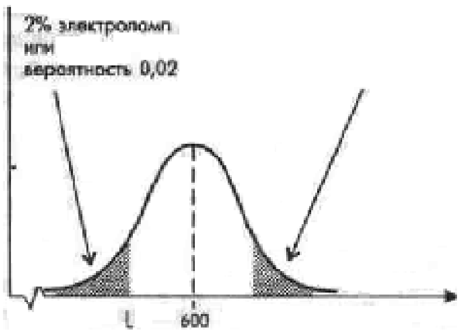


Вероятность того, что лампа проработает от 550 до 700 ч

т.е. вероятность того, что электролампа проработает от 550 до 700 ч, равна 0,8882. Иными словами, 88,82% ламп будут работать 550-700 ч.

4. Этот вопрос несколько отличается от остальных. Отталкиваясь от процента лампочек, найдем соответствующий срок работы L.

Во-первых, находим в таблице значение z, соответствующее вероятности 0,02; z равно 2,055. Это означает, что случайная величина, имеющая вероятность 0,02, на 2,055 стандартных отклонений больше среднего. Ввиду симметричности нормального распределения ту же самую вероятность имеет случайная величина, на 2,055 стандартных отклонений меньше среднего.



Продолжительность работы 2 % ламп

Тогда искомый срок работы равен: $L = 600 - 82{,}2 = 517{,}8$ ч. Т.е. для 2% ламп с минимальной продолжительностью работы срок работы составляет 517,8 ч.

5 ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

5.1 Моделирование.

Моделирование в научных исследованиях стало применяться еще в глубокой древности и постепенно захватывало все новые области научных знаний: техническое конструирование, строительство и архитектуру, астрономию, физику, химию, биологию и, наконец, общественные науки. Большие успехи и признание практически во всех отраслях современной науки принес методу моделирования XX в. Однако, методология моделирования долгое время развивалась независимо отдельными науками. Отсутствовала единая система понятий, единая терминология. Лишь постепенно стала осознаваться роль моделирования как универсального метода научного познания.

Термин "модель" широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. Рассмотрим только такие "модели", которые являются инструментами получения знаний.

Модель - это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале.

Под моделирование понимается процесс построения, изучения и применения моделей. Оно тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно включает и построение абстракций, и умозаключения по аналогии, и конструирование научных гипотез.

Главная особенность моделирования в том, что это метод опосредованного познания с помощью объектов-заместителей. Модель выступает как своеобразный инструмент познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект. Именно эта особенность метода моделирования определяет специфические формы использования абстракций, аналогий, гипотез, других категорий и методов познания.

Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать или вовсе невозможно, или же это исследование требует много времени и средств.

Моделирование - циклический процесс. Это означает, что за первым четырехэтапным циклом может последовать второй, третий и т.д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, обусловленные малым знанием объекта и ошибками в построении модели, можно исправить в последующих циклах. В методологии моделирования, таким образом, заложены большие возможности саморазвития.

5.1.1 Словесное описание задачи

Фирма, производящая некоторую продукцию осуществляет её рекламу двумя способами через радиосеть и через телевидение. Стоимость рекламы на радио обходится фирме в 5 $, а стоимость телерекламы - в 100$ за минуту.

Фирма готова тратить на рекламу по 1000 $ в месяц. Так же известно, что фирма готова рекламировать свою продукцию по радио, по крайней мере, в 2 раза чаще, чем по телевидению.

Опыт предыдущих лет показал, что телереклама приносит в 25 раз больший сбыт продукции, нежели радиореклама.

Задача заключается в правильном распределении финансовых средств фирмы.

5.1.2 Математическое описание.

1. Неизвестные.

X_1 - время потраченное на радиорекламу.

X_2 - время потраченное на телерекламу.

2. Целевая функция

$Z = X_1 + 25X_2$

где Z – максимальная прибыль от рекламной компании

3. Ограничения

по тратам на рекламу $5X_1 + 100X_2 <= 1000$

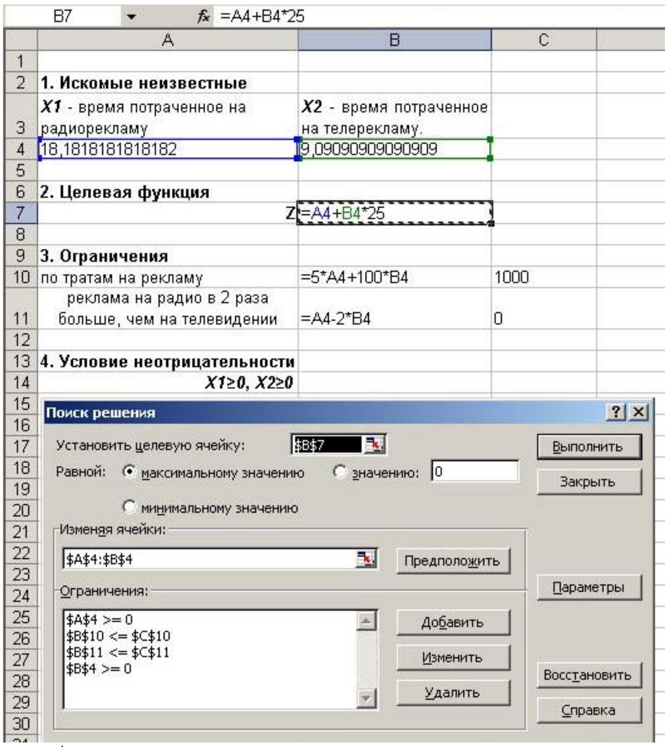
реклама на радио в 2 раза больше, чем на телевидении $X_1 - 2X_2 => 0$

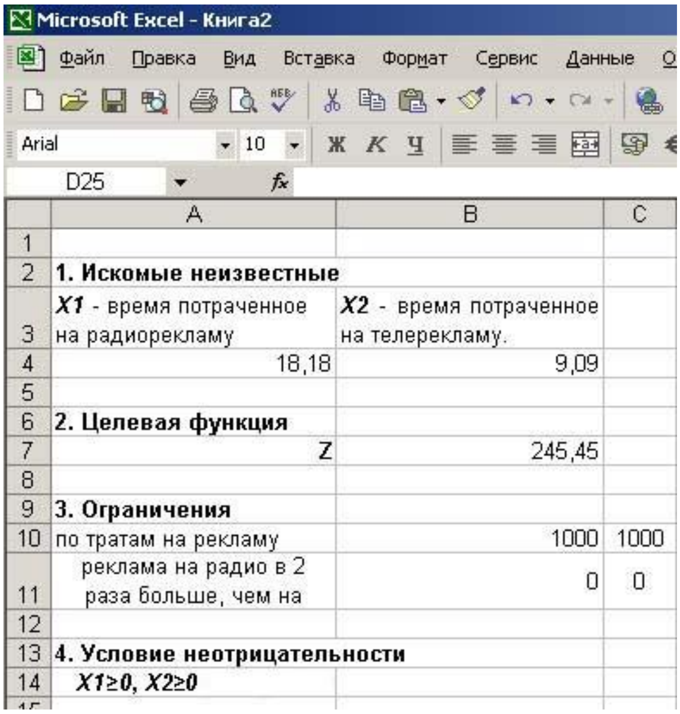
4. Условие неотрицательности

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0,$

5.2 Решение в Microsoft Excel

Используя надстройку Microsoft Excel Поиск решения записываем условие задачи:





Анализ результатов

Оптимальное решение

С точки зрения практического использования результатов решения задач, при интерпретации результатов оптимизации в нашей задаче нас прежде всего интересует количество времени, которое закажет наша фирма на радио и телевидение, т. е. значения управляемых переменных X_1 и X_2.

Управляемые переменные	Оптимальные значения	Решение
X_1	18,18	Время выделяемое фирмой на телерекламу
X_2	9,09	Время выделяемое фирмой на радиорекламу
Z	245,45	Прибыль получаемая от рекламы.

Статус ресурсов

Будем относить ресурсы *к дефицитным* или *недефицитным* в зависимости от того, полное или частичное их использование предусматривает оптимальное решение задачи. Говоря о *ресурсах,* фигурирующих в задаче, мы подразумеваем, что установлены некоторые *максимальные* пределы их запасов, поэтому в соответствующих исходных ограничениях должен использоваться знак <=. Следовательно, ограничения со знаком => не могут рассматриваться, как ограничения на ресурсы. Скорее, ограничения такого типа отражают то обстоятельство, что решение должно удовлетворять определенным требованиям, например обеспечению минимального спроса или минимальных отклонений от установленных структурных характеристик производства (сбыта).

В модели, построенной для задачи, фигурирует ограничение со знаком <=. Это требование можно рассматривать, как ограничение на соответствующий « ресурс », так как увеличение спроса на продукцию эквивалентно расширению « представительства » фирмы на рынке сбыта.

Из вышеизложенного следует, что статус ресурсов (дефицитный или недефицитный) для любой модели можно установить непосредственно из результирующей симплекс-таблицы, обращая внимание на значения остаточных переменных. Применительно к нашей задаче можно привести следующую сводку результатов:

Ресурсы	Остаточная переменная	Статус ресурса
Ограничение по бюджету	S_1	Дефицитный
Превышение времени рекламы радио над теле	S_2	Дефицитный

Положительное значение остаточной переменной указывает на неполное использование соответствующего ресурса, т. е. данный ресурс является недефицитным. Если же остаточная переменная равна нулю, это свидетельствует о полном потреблении соответствующего ресурса. Из таблицы видно, что наши ресурсы являются дефицитными. В случае не дефицитности любое увеличение ресурсов сверх установленного максимального значения привело бы лишь к тому, что они стали бы еще более недефицитными. Оптимальное решение задачи при этом осталось бы неизменным.

Ресурсы, увеличение запасов которых позволяет улучшить решение (увеличить прибыль), - это остаточные переменные S_1 и S_2. В связи с этим логично поставить следующий вопрос, какому из дефицитных ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств на увеличение их запасов, с тем, чтобы получить от них максимальную отдачу? Рассмотрим ценность различных ресурсов.

Ценность ресурса

Ценность ресурса характеризуется величиной улучшения оптимального значения Z, приходящегося на единицу прироста объема данного ресурса.

Ценность ресурсов можно определить по значениям множителей Лагранжа в отчете по устойчивости надстройки «Поиск решения».

Отсюда следует, что уменьшение количества денег выделенных на рекламу вызывает пропорциональное уменьшение целевой функции с тем же коэффициентом пропорциональности, равным 0,2454. Так как мы оперируем с *линейными* функциями, полученный вывод можно обобщить, считая, что и *увеличение* количества денег выделенных на рекламу (эквивалентное введению *избыточной* переменной $S_1 < 0$) приводит к пропорциональному *увеличению* Z с тем же коэффициентом пропорциональности, равным 0,2454. Аналогичные рассуждения справедливы для ограничения 2.

Несмотря на то, что ценность различных ресурсов, определяемая значениями переменных, была представлена в стоимостном выражении, ее нельзя отождествлять с действительными ценами, по которым возможна закупка соответствующих ресурсов. На самом деле речь идет о некоторой мере, имеющей экономическую природу и количественно характеризующей ценность ресурса только относительно полученного оптимального значения целевой функции. При изменении ограничении модели соответствующие экономические оценки будут меняться даже тогда, когда оптимизируемый процесс предполагает применение тех же ресурсов. Поэтому при характеристике ценности ресурсов экономисты предпочитают использовать такие термины, как теневая цена, скрытая цена, или более специфичный термин - двойственная оценка.

Заметим, что теневая цена (ценность ресурса) характеризует интенсивность улучшения оптимального значения Z. Однако при этом не фиксируется интервал значений увеличения запасов ресурса, при которых интенсивность улучшения целевой функции остается постоянной. Для большинства практических ситуаций логично предположить наличие верхнего предела увеличения запасов, при превышении которого соответствующее ограничение становится избыточным, что в свою очередь приводит к новому базисному решению и соответствующим ему новым теневым ценам.

5.3 ПРИМЕРЫ ФОРМУЛИРОВКИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Основная процедура является общей для формулирования всех задач линейного программирования:

Шаг 1. Определение переменных задачи, значения которых нужно получить в пределах существующих ограничений**.**

Шаг 2. Определение цели и ограничений на ресурсы.

Шаг 3. Описание цели через переменные задачи.

Шаг 4. Описание ограничений через переменные задачи.

Хотя на применение данной процедуры не влияет число переменных в задаче линейного программирования, рассмотрим сначала задачу с двумя переменными.

Пример 4

Строительная фирма производит два отделочных раствора - "Супер" и «Экстра». Фирма может продать всю продукцию, которая будет произведена, однако объем производства ограничен количеством основного ингредиента и производственной мощностью имеющегося оборудования. Для производства 1 л " Супер " требуется 0,02 ч работы оборудования, а для производства 1 л «Экстра» - 0,04 ч. Расход специального ингредиента составляет 0,01 кг и 0,04 кг на

1 л " Супер " и «Экстра» соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы имеется 24 ч времени работы оборудования и 16 кг специального ингредиента. Доход фирмы составляет 0,10 у.е. за 1 л «Супер» и 0,30 у.е. за 1 л «Экстра». Сколько продукции каждого вида следует производить ежедневно, если цель фирмы состоит в максимизации ежедневного дохода?

Решение

Шаг 1. Определение переменных. В рамках заданных ограничений фирма должна принять решение о том, какое количество каждого вида растворов следует выпускать. Пусть p - число литров «Супер», производимое за день. Пусть m - число литров «Экстра», производимое за день.

Шаг 2. Определение цели и ограничений. Цель состоит в максимизации ежедневного дохода. Пусть P - ежедневный доход, у.е. Он максимизируется в рамках ограничений на количество часов работы оборудования и наличие специального ингредиента.

Шаг 3. Выразим цель через переменные:

$P = 0{,}10\ p + 0{,}30\ m$ (у.е. в день).

Это целевая функция задачи - количественное соотношение, которое подлежит оптимизации.

Шаг 4. Выразим ограничения через переменные. Существуют следующие ограничения на производственный процесс:

а) Время работы оборудования. Для производства p литров «Супер» и m литров «Экстра» требуется: $(0{,}02\ p + 0{,}04\ m)$ часов работы оборудования ежедневно. Максимальное время работы оборудования в день составляет 24 ч, следовательно, объем производства должен быть таким, чтобы число затраченных часов работы оборудования было меньше либо равно 24 ч ежедневно. Таким образом, $0{,}02\ p + 0{,}04\ m \le 24$ ч/день.

б) Специальный ингредиент. Производство p литров «Супер» и m литров «Экстра» требует $(0{,}01\ p + 0{,}04\ m)$ кг ингредиента ежедневно. Максимальный расход ингредиента составляет 16 кг в день, следовательно, объем производства должен быть таким, чтобы требуемое количество специального ингредиента составляло не более 16 кг в день. Таким образом,

$0{,}01\ p + 0{,}04\ m \le 16$ кг/день.

Других ограничений нет, однако разумно предположить, что фирма не может производить напитки в отрицательных количествах, поэтому:

в) Условие неотрицательности: $p \ge 0$, $m \ge 0$.

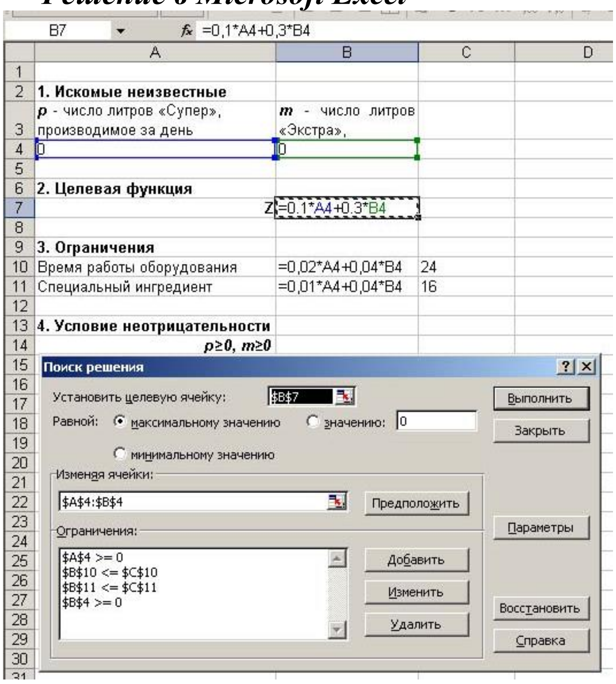
Окончательная формулировка задачи линейного программирования имеет следующий вид. Максимизировать:

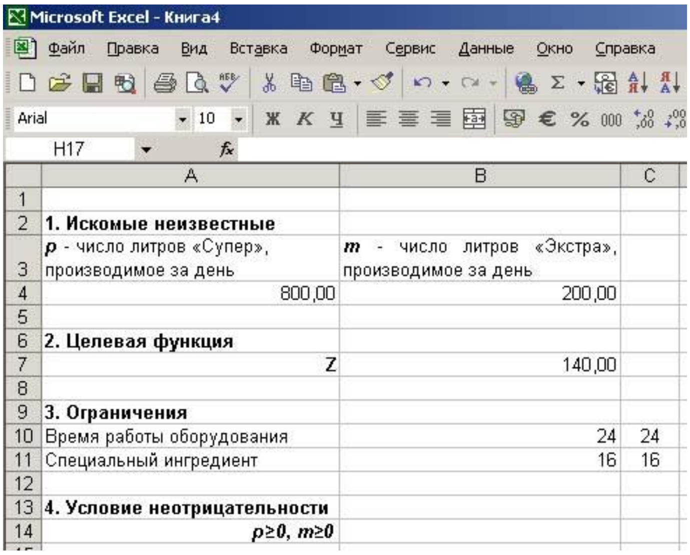
$P = 0{,}10\ p + 0{,}30\ m$ (у.е. в день)

при ограничениях:

время работы оборудования:	$0{,}02\ p + 0{,}04\ m \le 24$ ч/день;
специальный ингредиент:	$0{,}01\ p + 0{,}04\ m \le 16$ кг/день;
условие неотрицательности:	$p, m \ge 0$.

Решение в Microsoft Excel





	A	B	C	D	E
1	**Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости**				
2	**Рабочий лист: [Книга4.xls]Лист1**				
3	Изменяемые ячейки				
4				**Результ.**	**Нормир.**
5		**Ячейка**	**Имя**	**значение**	**градиент**
6		$A$4	p - число литров «Супер», производимое за день	800,00	0,00
7		$B$4	m - число литров «Экстра», производимое за день	200,00	0,00
8					
9	Ограничения				
10				**Результ.**	**Лагранжа**
11		**Ячейка**	**Имя**	**значение**	**Множитель**
12		$B$10	Время работы оборудования m - число литров «Экстра», производимое за день	24	2,5000
13		$B$11	Специальный ингредиент m - число литров «Экстра», производимое за день	16	5,0000

ОТВЕТ:

Оптимальное решение

Управляемые переменные	Оптимальные значения	Решение
p	800	p - число литров «Супер», производимое за день
m	200	m - число литров «Экстра», производимое за день
Z	140	Доход

Ценность ресурса

Время работы оборудования	2,5
Специальный ингредиент	5,0

т.е. влияние специального ингредиента, как ресурса, на увеличение дохода в 2 раза выше, чем время работы оборудования.

Пример 5

Завод-производитель высокоточных элементов для автомобилей выпускает два различных типа деталей: X и Y. Завод располагает фондом рабочего времени в 4000 чел.-ч. в неделю. Для производства одной детали типа X требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа Y - 2 чел.-ч. Производственные мощности завода позволяют выпускать максимум 2250 деталей типа X и 1750 деталей типа Y в неделю. Каждая деталь типа X требует 2 кг металлических стержней и 5 кг листового металла, а для производства одной детали типа Y необходимо 5 кг металлических стержней и 2 кг листового металла. Уровень запасов каждого вида металла составляет 10000 кг в неделю. Кроме того, еженедельно завод поставляет 600 деталей типа X своему постоянному заказчику. Существует также профсоюзное соглашение, в соответствии с которым общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не менее 1500 штук. Сколько деталей каждого типа следует производить, чтобы максимизировать общий доход за неделю, если доход от производства одной детали типа X составляет 30 у.е., а от производства одной детали типа Y - 40 у.е.?

Решение

Сначала необходимо сформулировать задачу линейного программирования.

Шаг 1. Идентификация переменных. Необходимо произвести x деталей типа X и y деталей типа Y в неделю.

Шаг 2. Какова цель задачи? Каковы ограничения на процесс производства? Цель состоит в максимизации общего дохода за неделю. Производственный процесс ограничивается уровнем:

а) фонда рабочего времени - максимально возможный фонд рабочего времени составляет 4000 чел. -ч. в неделю.

б) производственной мощности - для каждого типа деталей существует отдельное ограничение по производственной мощности. Оборудование позволяет выпускать не более 2250 деталей типа X и 1750 типа Y в неделю.

в) металлических стержней - максимальный их уровень составляет 10000 кг в неделю.

г) листового металла - максимальный уровень этого ресурса равен 10000 кг в неделю.

Кроме того, существуют ограничения на минимальный объем производства деталей каждого вида:

а) постоянные заказы - число произведенных деталей X должно быть достаточным для удовлетворения размера постоянных заказов.

б) Профсоюзное соглашение - общее число деталей (x + y) не должно быть ниже объема, предусмотренного соглашением.

Шаг 3. Целевая функция. Пусть P - общий доход за неделю, у.е., где

$P = 30\ x + 40\ y$ (у.е. в неделю).

Шаг 4. Ограничения на производственный процесс. Для каждого ограничения на ресурсы, необходимые для производства x деталей типа X и y деталей типа Y в неделю, ниже приведены количества и соответствующие им максимальные уровни наличных ресурсов.

Требуемый фонд рабочего времени:	$1x + 2y \le 4000$ чел.-ч.
Требуемая производственная мощность:	$x \le 2250$ деталей $y \le 1750$ деталей
Требуемое количество металлических стержней:	$2x + 5y \le 10000$ кг
Требуемое количество листового металла:	$5x + 2y \le 10000$ кг
Постоянные заказы:	$x \ge 600$ деталей
Профсоюзное соглашение:	$x + y \ge 1500$ деталей
Условие неотрицательности:	$x, y \ge 0$

Окончательная формулировка задачи линейного программирования имеет вид:

Производится x деталей типа X и y деталей типа *Y* в неделю.

Максимизировать: $P = 30x + 40y$ (у.е.) при ограничениях представленных выше.

Пример 6

Завод по производству электронного оборудования выпускает персональные компьютеры и системы подготовки текстов. В настоящее время освоены четыре модели:

а) "Юпитер" - объем памяти 512 Кбайт, одинарный дисковод;

б) "Венера" - объем памяти 512 Кбайт, двойной дисковод;

в) "Марс" - объем памяти 640 Кбайт, двойной дисковод;

г) "Сатурн" - объем памяти 640 Кбайт, жесткий диск.

В производственный процесс вовлечены три цеха завода - цех узловой сборки, сборочный и испытательный. Распределение времени, требуемого для обработки каждой модели в каждом цехе, а также максимальные производственные мощности цехов приведены в таблице. Отдел исследований рынка производит периодическую оценку потребительского спроса на каждую модель. Максимальные прогнозные значения спроса и доходы от реализации единицы продукции каждой модели также содержатся в таблице.

Построить задачу линейного программирования для изложенной проблемы производства изделий в ассортименте, если цель состоит в максимизации общего ежемесячного дохода.

Решение

Шаг 1. Выбор переменных. Производится: j единиц "Юпитера" в месяц, v единиц "Венеры" в месяц, m единиц "Марса" в месяц, s единиц "Сатурна" в месяц.

Время, требуемое на обработку каждой модели в каждом цехе

Цех	Время на единицу продукции, ч				Максимальная производственная мощность, ч/мес.
	"Юпитер"	"Венера"	"Марс"	"Сатурн"	
Узловой сборки	5	8	20	25	800
Сборочный	2	3	8	14	420
Испытательный	0,1	0,2	2	4	150
Максимальное прогнозное значение спроса, за месяц	100	45	25	20	
Доход, у.е.	15	30	120	130	

Шаг 2. Какова цель задачи? Каковы ограничения на производственный процесс? Цель состоит в максимизации общего дохода за месяц. Объем производства ограничен размером фонда рабочего времени по каждому цеху и возможностью продажи компьютеров каждой модели.

Шаг 3. Целевая функция задачи. Пусть P (у.е.) - общий доход в месяц, тогда:

$P = 15j + 30v + 120m + 130s$ (у.е. в месяц).

Шаг 4. Ограничения на производственный процесс. Для каждого цеха время, требуемое для производства j, v, m и s единиц продукции соответствующих моделей увязывается с максимальной производственной мощностью данного цеха.

Цех узловой сборки	$5j + 8v + 20m + 25s \le 800$ (ч/мес.)
Сборочный цех:	$2j + 3v + 8m + 14s \le 420$ (ч/мес.)
Испытательный цех:	$0{,}1j + 0{,}2v + 2m + 4s \le 150$ (ч/мес.)
Спрос на "Юпитер":	$j \le 100$ (ед./мес.)
Спрос на "Венеру":	$v \le 45$ (ед./мес.)
Спрос на "Марс":	$m \le 25$ (ед./мес.)
Спрос на "Сатурн":	$s \le . 20$ (ед./мес.)
Условие неотрицательности:	$j, v, m, s \ge 0$

Окончательная формулировка задачи линейного программирования такова:

каждый месяц производится j, v, m и s единиц компьютеров типа "Юпитер", "Венера", "Марс" и "Сатурн" соответственно. Максимизировать:

P = 15 j + 30 v + 120 m + 130 s (у.е. в месяц) в условиях ограничений, указанных выше.

5.4 РЕЗЮМЕ

Модели линейного программирования используются в решении проблемы распределения ограниченных ресурсов для достижения своих целей в бизнесе. Целью может являться максимизация прибыли за неделю или минимизация ежедневных издержек. Формулировка задачи линейного программирования требует последовательного выполнения следующих шагов:

Шаг 1. Определение переменных решения.

Шаг 2. Определение линейной целевой функции и линейных ограничений.

Шаг 3. Выражение целевой функции через переменные задачи.

Шаг 4. Выражение ограничений через переменные задачи.

При формулировке задач с двумя или с множеством переменных применяется одна и та же процедура. Однако задачу с двумя переменными можно решить графически. Ограничения, которые обычно представлены неравенствами знака "≤" или "≥", изображаются на графике с помощью прямых и областей на плоскости. Каждое ограничение разделяет плоскость графика на допустимую и недопустимую области. Область, точки которой удовлетворяют всем ограничениям задачи, называется допустимым множеством. Допустимое множество содержит все возможные решения задачи.

Оптимальное решение, которое всегда находится в крайней точке допустимого множества, можно найти после нанесения на график линии уровня целевой функции. Целевая функция перемещается параллельно этой линии в направлении, противоположном началу координат, в случае максимизации целевой функции, или в сторону начала координат в случае ее минимизации. Координаты последней крайней точки, через которую проходит линия уровня перед тем, как она всецело окажется вне пределов допустимого множества, являются значениями переменных, которые оптимизируют целевую функцию задачи.

Поскольку практическая реализация модели может осуществляться в условиях неопределенности, большое место в линейном программировании занимает анализ чувствительности модели. Этот метод позволяет учесть вариацию и неопределенность коэффициентов целевой функции и значений правой части ограничений задачи.

Задачи линейного программирования с множеством переменных решаются на компьютерах с помощью симплекс-метода. Итоговая таблица алгоритма симплекс метода содержит оптимальное значение целевой функции, соответствующие ему значения переменных решения и значения остаточных или избыточных переменных. Кроме того, в ней указываются теневые цены на ресурсы. Итоговую таблицу симплекс-метода можно использовать также в анализе чувствительности, чтобы выявить общее воздействие изменений в запасах лимитирующих ресурсов на целевую функцию и каждое из ограничений.

Для каждой исходной задачи линейного программирования существует ее двойственная формулировка. Решения прямой и двойственной задачи одинаковы. Двойственную модель можно получить непосредственно из исходной прямой модели, поменяв местами ее коэффициенты. Иногда более простая формулировка двойственной задачи дает существенные преимущества в процессе решения по сравнению со сложной постановкой прямой задачи.

5.5 ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА И ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

5.5.1 ВВЕДЕНИЕ

Методы линейного программирования, рассмотренные нами, являются хорошим инструментом для решения ряда проблем распределения ресурсов. Применение пакетов прикладных программ позволяет значительно упростить решение задачи. Поэтому лицо, принимающее решение, получает возможность уделить большее внимание интерпретации и оценке решения задачи. Однако применение прикладных пакетов предполагает предварительную формализацию модели линейного программирования. В процессе решения большинства проблем эта задача является основной. При построении модели необходимо идентифицировать ее переменные и сформулировать систему ограничений.

При решении некоторых видов проблем распределения ресурсов использование специально созданных для этих целей алгоритмов упрощает процесс построения исходной модели.

Целью является минимизация общей стоимости транспортировки. Пусть, например, некоторой компании принадлежат три завода и пять пунктов распределения продукции, находящиеся в одном регионе. Администрация компании должна организовать перевозку конечной продукции с заводов в пункты распределения с минимальной стоимостью. В этой ситуации наиболее подходящими могли бы стать методы решения транспортной задачи.

Частным случаем транспортной задачи является задача о назначениях. Предполагается, что из каждого пункта производства в каждый пункт потребления перевозится только один товар. Например, в машинном цехе имеется шесть токарных станков различного срока службы и различной конструкции. Каждое утро начальник цеха должен распределить по этим станкам шесть видов работ. Продолжительность выполнения каждой работы на различных станках неодинакова. Начальник цеха намерен распределить по каждому станку работу таким образом, чтобы свести к минимуму общее время выполнения работ. В процессе решения этой и подобных проблем можно использовать алгоритм решения задачи о назначениях.

В настоящей главе мы рассмотрим применение указанных алгоритмов для решения задач небольшой размерности. Однако следует принять во внимание, что на практике размерность таких задач гораздо больше, поэтому решаются они с использованием пакетов прикладных программ. Более того, очень часто решение транспортной задачи осуществляется в несколько этапов, например, при перевозках типа "завод-склад-розничная продажа". В таких случаях приходится модифицировать основной алгоритм и использовать более сложные методы решения.

5.5.2 ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА И АЛГОРИТМ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Данная проблема связана с распределением товаров между поставщиками (находящимися в пунктах производства) и потребителями (находящимися в пунктах назначения) таким образом, чтобы общая стоимость этого распределения была минимальной. Эта задача может быть решена либо с помощью методов линейного программирования, либо специального алгоритма решения транспортной задачи. Применение методов линейного программирования проиллюстрировано в примере.

Пример 7

Компания осуществляет производство оконных рам на двух заводах - А и В. Поставкой оконного стекла на каждый из заводов занимаются две фирмы - Р и Q. На ноябрь заводу А требуется 5000 кв.м стекла, а заводу В - 3500 кв.м. Фирма Р может поставить максимум 7500 кв.м стекла, а фирма Q - 4000 кв.м. Таблица содержит информацию о стоимости перевозки одного кв.м стекла от каждого поставщика каждому заводу.

Стоимость перевозки бутылок, показатели спроса и предложения

Поставщик	Стоимость перевозки одного кв.м стекла на завод, рублей		Максимальный объем поставки
	А	В	
Р	4	4	7500
Q	3	2	4000
Спрос на стекло	5000	3500	

Как следует организовать доставку оконного стекла на заводы, чтобы общая стоимость перевозки была минимальной?

Решение.

При решении транспортной задачи всегда полезно проверить, не существует ли очевидного решения. Теоретически было бы желательно использовать для перевозок только наиболее дешевые маршруты. Для обоих заводов Q был бы наиболее предпочтительным поставщиком, так как стоимость перевозки для него ниже, чем для Р. Однако максимальный объем перевозок для Q составляет только 4000 кв.м стекла, тогда как общий спрос равен 8500. Вероятно, наиболее дешевым вариантом было бы использование маршрута из Q в В стоимостью 2 рубля за единицу, удовлетворяющее весь спрос завода В (3500). Остаток запаса (500) следует направить из Q в А по стоимости 3 рубля за единицу. Остальной спрос завода А следует удовлетворить через поставщика Р, причем стоимость перевозки составит 4 рубля за единицу. Общая стоимость транспортировки при таком распределении будет иметь вид:

$2 \times 3500 + 3 \times 500 + 4 \times 4500 = 26500$ рублей в месяц.

Однако мы не можем доказать, что данное распределение ресурсов является наиболее экономичным. Основные аспекты исследования транспортной модели состоят в следующем: доказательство того, что сформулированная задача имеет решение; обоснование положения о том, что это решение является оптимальным; изучение влияния на полученное решение любых изменений условий задачи.

Пусть фирма Р поставляет x кв.м стекла для завода А и y кв.м стекла для завода В. Тогда для полного удовлетворения спроса фирма должна поставлять оставшиеся (5000 - x) кв.м стекла на завод А и (3500 - y) кв.м стекла на завод В. Цель состоит в минимизации общей стоимости транспортировки С (в рублях), где

$C=4x+4y+3\ (5000 - x) + 2\ (3500 - y)$,

следовательно, $C = x + 2\ y + 22000$, а целевая функция задачи имеет вид:

$Z = C - 22000 = x + 2y$.

Z принимает свое минимальное значение тогда, когда С принимает минимальное значение. Значения x и y, которые минимизируют Z, минимизируют также и С. Минимизация целевой функции осуществляется в условиях следующей системы ограничений:

Спрос завода А: $x \le 5000$ кв.м стекла

Спрос завода В: $y \le 3500$ кв.м стекла

Поставки из P: $x+y \le 7500$ кв.м стекла
Поставки из Q: $(5000 - x) + (3500 - y) \ge 4000$ кв.м стекла
$x, y \ge 0$

5.6 ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Частным случаем транспортной задачи является задача о назначениях, в которой число пунктов производства равно числу пунктов назначения, т.е. транспортная таблица имеет форму квадрата. Кроме того, в каждом пункте назначения объем потребности равен 1, и величина предложения каждого пункта производства равна 1. Любая задача о назначениях может быть решена с использованием методов линейного программирования или алгоритма решения транспортной задачи. Однако ввиду особой структуры данной задачи был разработан специальный алгоритм, получивший название **Венгерского метода.**

5.6.1 Алгоритм решения задачи о назначениях (ручной расчет)

Этот алгоритм состоит из трех этапов.

Этап 1:

1. Формализация проблемы в виде транспортной таблицы по аналогии с решением транспортной задачи.
2. В каждой строке таблицы найти наименьший элемент и вычесть его из всех элементов данной строки.
3. Повторить ту же самую процедуру для столбцов.

Теперь в каждой строке и в каждом столбце таблицы есть по крайней мере один нулевой элемент. Представленная в полученной с помощью описанного выше приема "приведенной" транспортной таблице задача о назначениях эквивалентна исходной задаче, и оптимальное решение для обеих задач будет одним и тем же. Сущность Венгерского метода заключается в продолжении процесса приведения матрицы до тех пор, пока все подлежащие распределению единицы не попадут в клетки с нулевой стоимостью. Это означает, что итоговое значение приведенной целевой функции будет равно нулю. Так как существует ограничение на неотрицательность переменных, нулевое значение целевой функции является оптимальным.

Этап 2.

Если некоторое решение является допустимым, то каждой строке и каждому столбцу соответствует только один элемент. Если процесс распределения элементов осуществляется только в клетки с нулевой стоимостью, он приведет к получению минимального значения целевой функции.

1. Найти строку, содержащую только одно нулевое значение стоимости, и в клетку, соответствующую данному значению, поместить один элемент. Если такие строки отсутствуют, допустимо начать с любого нулевого значения стоимости.
2. Зачеркнуть оставшиеся нулевые значения данного столбца.
3. Пункты 1 и 2 повторять до тех пор, пока продолжение описанной процедуры окажется невозможным.

Если на данном этапе окажется, что есть несколько нулей, которым не соответствуют назначения и которые являются незачеркнутыми, то необходимо:

4. Найти столбец, содержащий только одно нулевое значение, и в соответствующую клетку поместить один элемент.
5. Зачеркнуть оставшиеся нули в данной строке.
6. Повторять пункты 4 и 5 до тех пор, пока дальнейшая их реализация окажется невозможной.

Если окажется, что таблица содержит неучтенные нули, повторить операции 1-6. Если решение является допустимым, т.е. все элементы распределены в клетки, которым соответствует нулевая стоимость, то полученное решение одновременно является оптимальным. Если решение является недопустимым, осуществляется переход к этапу 3.

Этап 3.

1. Провести минимальное число прямых через строки и столбцы матрицы (но не по диагоналям) таким образом, чтобы они проходили через все нули, содержащиеся в таблице.
2. Найти наименьший среди элементов, через которые не проходит ни одна из проведенных прямых.
3. Вычесть его из всех элементов, через которые не проходят прямые.
4. Прибавить найденный элемент ко всем элементам таблицы, которые лежат на пересечении проведенных ранее прямых.
5. Все элементы матрицы, через которые проходит только одна прямая, оставить без изменения.

В результате применения данной процедуры в таблице появляется, по крайней мере один новый ноль. Необходимо возвратиться к этапу 2 и повторять алгоритм до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.

Пример 8

Некоторая строительная компания имеет четыре сбытовые базы и четыре заказа, которые необходимо доставить различным потребителям. Складские помещения каждой базы вполне достаточны для того, чтобы вместить один из этих заказов. В таблице содержится информация о расстоянии между каждой базой и каждым потребителем. Как следует распределить заказы по сбытовым базам, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной?

Расстояние от сбытовых баз до потребителей

Сбытовая база	Расстояние, км. Потребители			
	I	II	III	IV
A	68	72	75	83
B	56	60	58	63
C	38	40	35	45
D	47	42	40	45

Решение

Понимание существа проблемы можно в значительной степени облегчить, если перед тем, как применять Венгерский метод, попытаться решить поставленную задачу, используя один из широко известных методов. Примените метод Вогеля и проследите, насколько он приближает нас к оптимальному решению, которое мы рассмотрим в конце данного раздела. Значения общего спроса и общего предложения для всех строк и столбцов равны единице.

Этап 1 Венгерского метода: В каждой строке находится наименьший элемент.

Выявление наименьших элементов по строкам

Сбытовая база	Расстояние, км. Потребители				Наименьший элемент строки
	I	II	III	IV	
A	68	72	75	83	68
B	56	60	58	63	56
C	38	40	35	45	35
D	47	42	40	45	40

Наименьший элемент вычитается из всех элементов соответствующей строки

Вычитание наименьшего элемента по строкам и выявление наименьшего элемента по столбцам

Сбытовая база	Расстояние, км. Потребители			
	I	II	III	IV
A	0	4	7	15
B	0	4	2	7
C	3	5	0	10
D	7	2	0	5
Наименьший элемент столбца	0	2	0	5

Найденный наименьший элемент вычитается из всех элементов соответствующего столбца.

Вычитание наименьшего элемента по столбцам

Сбытовая база	Расстояние, км. Потребители			
	I	II	III	IV
A	0	2	7	10
B	0	2	2	2
C	3	3	0	5
D	7	0	0	0

В соответствии с процедурой, описанной в этапе 2, осуществляются назначения. Наличие назначения обозначается через[0]

Назначения в клетки с нулевыми значениями

Сбытовая база	Расстояние, км. Потребители			
	I	II	III	IV
A	[0]	2	7	10
B	0	2	2	2
C	3	3	[0]	5
D	7	[0]	0	0

На данном этапе мы можем осуществить только три нулевых назначения, тогда как требуемое их количество равно четырем. Полученное распределение является недопустимым. Переходим к этапу 3. Проводим наименьшее число прямых, проходящих через все нули таблицы.

Проведение прямых через нулевые элементы

Сбытовая база	Расстояние, км. Потребители

	I	II	III	IV
A	0	2	7	10
B	0	2	2	2
C	3	3	0	5
D	7	0	0	0

Наименьшим элементом, через который не проходит ни одна из прямых, является число 2. Скорректируем таблицу так, как это описано выше в соответствии с этапом 3, т.е. вычтем 2 из каждого элемента, через который не проходит ни одна прямая, и добавим 2 ко всем элементам, лежащим на пересечении двух прямых, оставив без изменения все прочие элементы, через которые проходит только одна прямая. Теперь перераспределим соответствующие назначения сбытовых баз и потребителей.

Скорректированная таблица с назначениями для нулевых клеток

Сбытовая база	Расстояние, км. Потребители			
	I	II	III	IV
A	0	0	7	8
B	0	0	2	0
C	3	1	0	3
D	9	0	2	0

Теперь требование о размещении четырех назначении в клетки с нулевой стоимостью выполняется, следовательно, полученное решение является оптимальным. Перевозки осуществляются со сбытовой базы А к потребителю I, с базы В - к потребителю II, с базы С-к потребителю III и с базы D - к потребителю IV. Хотя данное решение и является оптимальным, однако оно не единственное. Тем не менее, в любом оптимальном решении должен присутствовать маршрут (С,III), поскольку это единственный элемент с нулевой стоимостью в строке С.

Минимальную дальность перевозок для каждого из трех решений можно вычислить из исходной таблицы:

Решение 1: 68 + 60 + 35 + 45 = 208 км.;

Решение 2: 68 + 63 + 35 + 42 = 208 км.;

Решение 3: 72 + 56 + 35 + 45 = 208 км.

Общая дальность перевозок для всех трех решений одинакова.

Примечание: в задачах большей размерности, чем задача из примера убедиться в том, что проведенное в соответствии с пунктом 1 этапа 3 число прямых является минимальным, гораздо труднее. В этой связи может оказаться полезным так называемое "правило правой руки":

1. Выбирается любая строка или столбец, содержащие только один нулевой элемент.
2. Если выбрана строка, прямая проводится через столбец, в котором находится данный нулевой элемент.
3. Если выбран столбец, прямая проводится через строку, содержащую данный нулевой элемент.
4. Пункты 1-3 повторяются до тех пор, пока не будут учтены все входящие в таблицу нули.

5.6.2 Задача о назначениях (решение в EXEL)

Пусть имеется n вакантных мест (должностей) и на них нужно распределить n кандидатов оптимальным образом, чтобы предприятие (организация) получило от этого наибольший выигрыш. Необходимо как-то оценивать эффект от назначений. Это можно сделать, напр., следующим образом. Менеджер по кадрам оценивает по 10-балльной системе, насколько каждый кандидат подходит к каждой должности. Целевая функция – сумма выигрышей от распределения.

Задача о назначениях может иметь множество приложений. Напр., распределение спортсменов по парам в фигурном катании, в спортивных танцах, в теннисе и т.д. В военном деле: имеется n целей и n средств поражения (ракет), нужно так распределить средства поражения, чтобы нанести наибольший урон противнику.

В данной задаче переменные могут принимать только два значения: 1, если назначение состоялось, и 0, если не состоялось. Такие переменные называются булевыми (двоичными).

Обозначим:

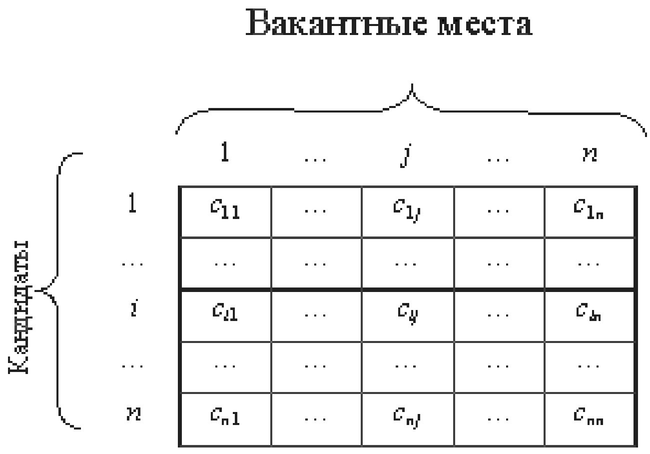
$i = 1,..,n$ – множество кандидатов;

$j = 1,\dots,n$ – множество вакантных мест;

c_{ij} – оценка распределения i-го кандидата на j-е место;

x_{ij} – переменная для назначения i-го кандидата на j-ое место, может принимать значения 0 или 1.

Условия задачи определяются матрицей.



Математическая модель:

Найти $\max \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$;

при ограничениях: $x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ – либо 0, либо 1;

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ – каждый кандидат должен получить назначение и только на одно место;

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$ – на каждое место должен быть назначен один и только один кандидат.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Должн 1	Должн 2	Должн 3	Должн 4	Должн 5		Итог	ЦФ
2	Канд 1	1	8	4	7	5			
3	Канд 2	5	6	2	9	7			
4	Канд 3	9	7	2	3	7			
5	Канд 4	7	3	8	6	8			
6	Канд 5	8	5	8	1	3			
7									
8	Канд 1								
9	Канд 2								
10	Канд 3								
11	Канд 4								
12	Канд 5								
13									
14	Итог								

Условия задачи показаны на рис. в виде таблицы EXCEL.
Содержание ячеек:
B1:F1 – имена должностей (мест);
A2:A6 = A8:A12 – имена кандидатов;
B2:F6 – оценки (c_{ij});
B8:F12 – переменные (x_{ij});

B14:F14 – итог по местам ($\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$);

H8:H12 – итог по кандидатам ($\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$);

I14 – целевая функция ($\max \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$).

Формулы для вычислений:
B14 = СУММ (B8:B12), C14:F14 – копируются из B14;
H8 = СУММ (B8:F8), H9:H12 – копируются из H8;
I14 = СУММПРОИЗВ(B2:F6;B8:F12).
Ограничения :
B8:F12 = булевы (двоичные);
B14:F14 = 1;
H8:H12 = 1.
Целевая функция = max I14.
Решение:
а) целевая функция = 42;
б) переменные в матрице.

	1	2	3	4	5	
1		1				1
2				1		1
3	1					1
4					1	1
5			1			1
	1	1	1	1	1	

x_{12}=1, x_{24}=1, x_{31}=1, x_{45}=1, x_{53}=1. Остальные переменные равны нулю.

5.6.3 РЕЗЮМЕ

Транспортная модель - это частный случай модели линейного программирования. Стандартная задача включает в себя некоторое множество пунктов производства, например, несколько торговых складов, которые осуществляют поставки в некоторое множество пунктов назначения, например, в несколько магазинов. Цель состоит в минимизации общей стоимости транспортировки в рамках ограничений на спрос и предложение. Решение этой задачи может быть найдено с помощью традиционных методов линейного программирования. Относительно простая структура задачи позволяет, однако, разработать специальные алгоритмы, применение которых оказывается более трудоемким, чем применение обычных методов решения задач линейного программирования со множеством переменных.

Первый шаг алгоритма состоит в построении транспортной таблицы, в которой содержится информация об издержках транспортировки. Строкам этой таблицы соответствуют пункты производства, а столбцам - пункты назначения.

Второй шаг алгоритма - это поиск начального распределения перевозок. Нами было описано два метода реализации данной процедуры. В методе минимальной стоимости перевозки распределяются в первую очередь по наиболее дешевым маршрутам. Метод Вогеля предполагает расчет значений штрафной стоимости и такое распределение перевозок, которое позволяет избежать получения высоких штрафов. Однако ни один из методов не гарантирует, что полученное начальное распределение перевозок окажется оптимальным.

Третий шаг состоит в проверке начального распределения перевозок на оптимальность. Мы изложили два метода проверки решения на оптимальность. Оба они основаны на вычислении значений теневых цен для незаполненных клеток. Если эти значения положительны или равны нулю для всех пустых клеток, то полученное распределение перевозок является оптимальным.

Реализация четвертого шага необходима только в случае, если полученное распределение перевозок является неоптимальным. Для осуществления перераспределения применяется ступенчатый цикл, соответствующий клетке с отрицательным значением теневой цены. Полученное решение вновь подвергается проверке на оптимальность.

Транспортная задача может иметь некоторые специфические особенности. Если предложение и спрос несбалансированны, то необходимо ввести в задачу фиктивные пункты производства или назначения. Оптимальное решение должно находиться в крайней точке допустимого множества, иными словами, должно быть базисным. Базисным называется решение, число переменных в котором равно числу строк в таблице плюс число столбцов минус единица. Если число переменных оказывается меньше указанной величины, то решение является вырожденным, и в этом случае следует использовать пустые клетки, размещая в них псевдоперевозки, объем которых равен нулю.

Недопустимые маршруты могут быть блокированы введением в соответствующие клетки таблицы достаточно больших значений стоимости транспортировки. Целевую функцию задачи можно не только минимизировать, но и максимизировать.

Еще более специфической задачей, для которой разработаны особые методы решения, является задача о назначениях. Число пунктов производства в этой задаче совпадает с числом пунктов назначения, причем каждой строке и каждому столбцу должно соответствовать только одно назначение. Для решения этой модифицированной транспортной задачи был разработан Венгерский метод.

5.7 Раскрой прутьев

В производстве железобетонных изделий (блоков) прутья арматуры стандартной длины режут на детали указанной в проекте длины, из которых вяжут арматурный каркас. Детали имеют различную длину. Необходимо так разрезать заготовки, чтобы, затратив наименьшее их количество, изготовить заданное количество комплектов арматуры, либо из заданного количества заготовок получить наибольшее количество комплектов.

Обозначим:

$i = 1,\ldots, m$ – номера деталей в комплекте;

k_i – количество i-х деталей в комплекте;

l – длина заготовки;

l_i – длина i-ой детали;

Q – количество заготовок;

N – количество комплектов.

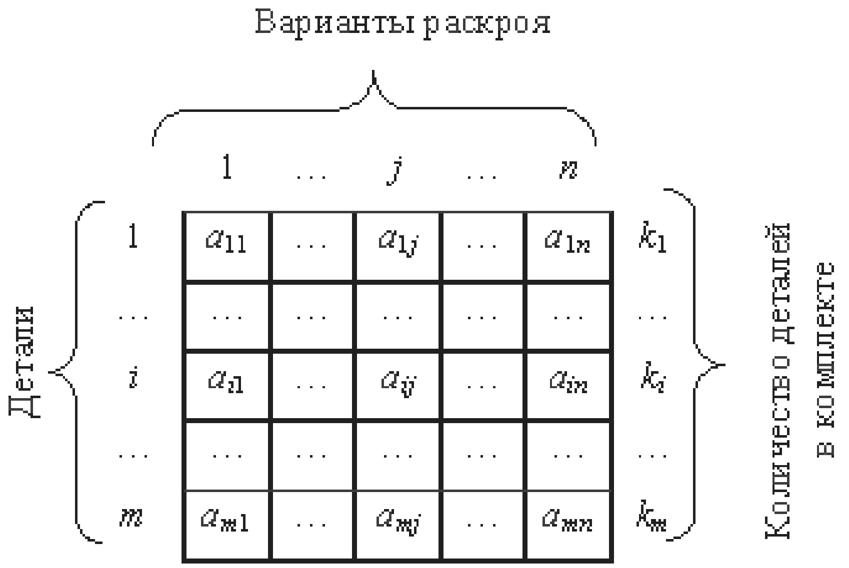
Каждую заготовку можно разрезать на различное количество деталей. Нужно составить всевозможные варианты раскроя.

$j = 1,\ldots, n$ – номера вариантов раскроя;

x_j – количество заготовок, раскраиваемых по j-му варианту;

a_{ij} – количество i-х деталей в j-м варианте раскроя.

Составим матрицу вариантов раскроя



Задача может решаться в двух вариантах.

Вариант 1. Задано количество заготовок Q, нужно максимизировать количество комплектов.

Целевая функция – max N.

Ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq k_i N;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \geq 0;$$

$x_j \geq 0$;

x_j – целое;

$N \geq 0$.

Анализируем смысл ограничений:

$a_{ij}x_j$ – количество i-х деталей, которые можно получить, раскроив x_j заготовок по j-му варианту;

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ – общее количество i-х деталей, получаемое по всем вариантам раскроя;

k_iN – количество i-х деталей, которое требуется для N комплектов;

$x_j \geq 0$ – по j-му варианту разрезается x_j заготовок, либо нисколько не разрезается;

x_j – целое; здесь появляется требование целочисленности решения, т.к. резать нужно целое количество заготовок.

Нельзя требовать, чтобы количество комплектов N было целым. Конечно же, можно использовать только целое число комплектов. Но пусть некоторое количество деталей будет лишним, только бы N было максимальным, пусть и дробным.

Вариант 2. Задано количество комплектов N. Нужно минимизировать количество разрезаемых заготовок. Составим математическую модель.

Целевая функция – $\min \sum_{j=1}^{n} x_j$.

Ограничения: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq k_i N$; $x_j \geq 0$; x_j – целое.

Экономический смысл модели очевиден.

Пример 9

Вариант 1. Имеется 882 заготовки длиной 7,15 м. Из них нужно нарезать детали длиной 2 и 1,4 м. В комплект входят 3 детали длиной 2 м. и 5 деталей длиной 1,4 м. Требуется максимизировать количество комплектов. Составим варианты раскроя.

Из заготовки можно нарезать 0, 1, 2 или 3 длинных деталей (2 м.). Если не резать ни одной длинной детали, то из заготовки можно нарезать 5 коротких (1,4 м). При одной длинной детали из остатка можно получить 3 коротких, при двух длинных – 2 коротких, при трех длинных – 0 коротких. Вот и все 4 варианта. Варианты раскроя запишем в виде таблицы:

Номер варианта (j)	1	2	3	4
Количество первых деталей (a_{1j})	0	1	2	3
Количество вторых деталей (a_{2j})	5	3	2	0

Составим математическую модель задачи.

Вариант 1.

Целевая функция: найти max N.

Ограничения:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 882; \\
0x_1 & + & 1x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \geq & 3N; \\
5x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 0x_4 & \geq & 5N; \\
x_1 & & & & & & & \geq & 0;
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll} & x_2 & & & & & & \geq & 0; \\ & & & x_3 & & & & \geq & 0; \\ & & & & & x_4 & & \geq & 0; \end{array}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 – целое.

Таблица EXCEL показана на рис.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Вар 1	Вар 2	Вар 3	Вар 4	*N*	*k*	*kN*	План
2	D1	0	1	2	3		3	1391,4	1394
3	D2	5	3	2	0		5	2319	2319
4									ЦФ
5	Перем								
6	Q	882							

Содержание ячеек:

B1:E1 – имена вариантов;

A2:A3 – имена деталей;

B2:E3 – матрица деталей по вариантам;

A5:E5 – переменные x_j;

F5 – переменная N (количество комплектов);

B6 = 882 – количество заготовок;

G2:G3 – количество деталей в комплекте;

H2:H3 – количество деталей в N комплектах (вычисляется);

H2 = F5*G2;

H3 = F5*G3

I2:I3 – количество нарезанных деталей по плану;

I5 = СУММ(B5:E5) – количество заготовок разрезанных по плану;

I2 = СУММПРОИЗВ(B$5:E$5;B2:E2);

I3 – скопировать из I2.

Ограничения:

B5:F5≥0 - неотрицательность переменных;

B5:E5 – целое;

I2:I3≥H2:H3;

I5≥B6.

Решение.

Значение целевой функции равно 463,8.

N=463 - округляем до меньшего целого;

x_1=185; x_2=0; x_3=697; x_4=0.

Проанализируем это решение.

По 1-му варианту нужно разрезать 185 прутьев, по 3-у 697, 2-й и 4-й варианты не используются. Будет получено 463 комплекта.

Вариант 2. Изготовить 300 комплектов с минимальным расходом заготовок.

Математическая модель.

Целевая функция

Найти $min\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ – минимизировать общий расход заготовок.

Ограничения:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 0x_1 & + & 1x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \geq & 3*300; \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 0x_4 & \geq & 5*1500; \\ x_1 & & & & & & & \geq & 0; \\ & & x_2 & & & & & \geq & 0; \\ & & & & x_3 & & & \geq & 0; \\ & & & & & & x_4 & \geq & 0; \end{array}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 – целое.

Таблица EXCEL показана на рис.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Вар 1	Вар 2	Вар 3	Вар 4	*N*	*k*	*kN*	План
2	D1	0	1	2	3		3	900	900
3	D2	5	3	2	0		5	1500	1500
4									ЦФ
5	Перем	120	0	450	0	300			570
6									

Содержание ячеек:
B1:E1 – имена вариантов;
A2:A3 – имена деталей;
B5:E5 – переменные;
F5 = 300 – количество комплектов;
G2:G3 – количество деталей в комплекте;
H2:H3 – количество деталей в заданном количестве комплектов;
H2 = F5*G2;
H3 = F5*G3
I2:I3 – количество деталей по плану;
I2 = СУММПРОИЗВ(B$5:E$5;B2:E2);
I3 – скопировать из I2;
I5 = СУММ(B5:E5) – целевая функция (количество разрезанных заготовок).
Ограничения:
B5:F5≥0 - неотрицательность переменных;
B5:E5 = целое;
I2:I3≥H2:H3;
Решение.

Целевая функция = 570, это значит, что нужно разрезать 570 заготовок, чтобы получить 300 комплектов.

Переменные: x_1=120; x_2=0; x_3=450; x_4=0. По 1-му варианту нужно разрезать 120 заготовок, по 3-му – 450 заготовок, 2-й и 4-й варианты не используются.

5.8 Раскрой листов

Во многих отраслях, напр., в швейном и мебельном производстве, механообработке, автомобилестроении и др., приходится решать задачи о раскрое листов. Имеется лист материала, который нужно раскроить на детали. Варианты раскроя составляют технологи, эта работа не относится к линейному программированию. Из деталей нужно сформировать комплекты, которые будут использоваться в производстве. Естественно стремление либо минимизировать издержки на производство заданного количества комплектов, либо получить наибольшее количество комплектов из заданного количества листов. Издержки могут измеряться либо количеством листов, либо денежными затратами на раскрой листов, включая стоимость самих листов.

Обозначим:
$i = 1,..,m$ – номера деталей;
k_i – количество i-х деталей в комплекте ;
$j = 1,\dots,n$ – номера вариантов раскроя ;
a_{ij} – количество i-х деталей в j-ом варианте раскроя;
c_j – издержки раскроя листа по j-му варианту ;
x_j – плановое количество листов, раскраиваемых по j-му варианту;

$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ – издержки раскроя всех листов;
$C_{\min}, C_{\max}$ – нижний и верхний пределы издержек ;
N – количество комплектов.
Условия задачи задаются матрицей
Математическая модель.

Вариант 1. Заданы издержки ($C_{\max}$), требуется максимизировать количество комплектов N.
Найти max N при ограничениях:

$C \le C_{\max}$; $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge k_i N$; $x_j \ge 0$; $N \ge 0$; x_j – целое.

Вариант 2. Задано количество комплектов N, требуется минимизировать издержки.
Найти min C при ограничениях:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge k_i N$; $x_j \ge 0$; x_j – целое.

Таблица EXCEL показана на рис.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Вар 1	Вар 2	Вар 3	Вар 4	Вар 5	*N*	*ki*	План	*kiN*
2	Дет 1	1	2	3	4	5		3		
3	Дет 2	5	4	4	3	2		5		
4	Дет 3	1	3	4	3	4		4		
5	Дет 4	6	5	3	3	3		1		
6										
7	Издер.	6,3	7,2	7	6,8	4,4				
8										
9	Перем.							0	99999	

Содержание ячеек:

B1:F1 – имена вариантов раскроя;

A2:A5 – имена деталей;

B2:F5 – количество деталей по вариантам раскроя (a_{ij});

B7:F7 – издержки раскроя листа по вариантам (c_j);

H2:H5 – количество деталей в комплекте (k_i);

B9:F9 – переменные (x_j);

G9 – переменная (N);

I2:I5 – плановое количество i–х деталей ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$);

J2:J5 – количество i – х деталей, требующихся для N комплектов ($k_i N$);

H9 – нижняя граница издержек ($C_{\min}$);

I9 – верхняя граница издержек ($C_{\max}$);

J9 – издержки (C).

Формулы для вычислений:

I2 = СУММПРОИЗВ($B$9:$F$9;B2:F2);

I3:I5 – копируются из I2;

J2 = H2*$G$9;

J3:J5 – копируются из J2;

H9 = 0;

I9 = 99999;

J9 = СУММПРОИЗВ(B9:F9;B7:F7);

Ограничения:

I2:I5 ≥ J2:J5 – по требуемому количеству деталей ;

J9 ≥ H9 – нижний предел издержек ($C \ge C_{\min}$);

J9 ≤ I9 – верхний предел издержек ($C \le C_{\max}$);

B9:G9 ≥ 0 – неотрицательность переменных ;

B9:F9 – целые.

Количество листов, раскраиваемых по каждому варианту, должно быть целой величиной. Нельзя этого требовать для количества комплектов N. По плану будет получено целое количество комплектов и еще некоторые детали сверх требуемого.

Вариант 1. Задан верхний предел издержек $C_{\max}$=10000, требуется максимизировать количество комплектов N. В ячейку I9 записать 10000. Целевой функцией объявить max G9, переменными B9:G9.

Решение:

а) целевая функция = 1270,75, т.е. будет получено 1270 комплектов и еще детали на 0,75 комплекта;

б) переменные x_1=847, x_2=0, x_3=1, x_4=0, x_5=1058;

в) издержки по плану = 9998,3 < 10000; израсходовано меньше 10000, т.к. режется целое количество листов;

Вариант 2. Задано количество комплектов N=100, требуется минимизировать издержки.

Переменными объявить клетки B9:F9 (теперь G9 – не переменная).

Ввести в G9 = 100, I9 = 99999. Целевой функцией объявить min J9.

Решение:

а) целевая функция C =788;

б) переменные x_1=66, x_2=0, x_3=1, x_4=0, x_5=83;

5.9 Планирование посевов

Имеется несколько участков сельскохозяйственной земли различного качества (плодородия) и несколько зерновых культур, которые нужно вырастить на этих участках. Введем обозначения.

Известные величины:

$i = 1,\dots, m$ – номера культур;

$j =1,\dots, n$ – номера участков;

s_j – площадь j-го участка в гектарах (га);

a_{ij} – урожайность i-й культуры на j-м участке в центнерах/га;

c_{ij} – издержки выращивания i-й культуры на j-м участке в тыс. руб./га;

p_i – цена i-й культуры в тыс. руб./ц.

Неизвестные (плановые) величины:

x_{ij} – площадь j-го участка, засеваемая i-ой культурой.

Вычисляемые величины:

A_i – объем производства i-й культуры на всех участках;

$A_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$;

P_i – цена всей произведенной i-й культуры (объем производства i-й культуры, выпуск, выручка),

$P_i= p_i A_i$;

C_i – издержки на производство i-ой культуры в тыс. руб./ц.,

$C_i= \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$;

R_i – прибыль от производства i-й культуры,

$R_i=P_i-C_i.$;

$P = \sum_{i=1}^{m} P_i$ - валовая продукция (выпуск);

$C = \sum_{j=1}^{n} C_i$ - валовые издержки;

$R = P – C$ – валовая прибыль.

Предельные величины.

$A_i^{\min}$, $A_i^{\max}$ – нижний и верхний пределы значений A_i; начальные значения $A_i^{\min}=0$, $A_i^{\max} = \infty$.

$P_{\min}$, $P_{\max}$, $C_{\min}$, $C_{\max}$,$R_{\min}$, $R_{\max}$ – нижние и верхние пределы объема производства, издержек и прибыли; начальные нижние значения – ноль, верхние – бесконечность.

Запишем математическую модель, включающую все возможные варианты.

Варианты целевой функции max P, min C, max R.

Ограничения:

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le s_j$ – по площади участков;

$x_{ij} \ge 0$ – неотрицательность переменных;

$A_i^{\min} \le A_i \le A_i^{\max}$ – по объемам производства культур;

$P_{min} \le P \le P_{max}$ – по валовому продукту;

$C_{min} \le C \le C_{max}$ – по валовым издержкам;

$R_{min} \le R \le R_{max}$ – по валовой прибыли.

Пример 10

Условия задачи показаны на рис в таблице EXCEL.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Уч 1	Уч 2	Уч 3	Уч 4		*pi*	min	max	Знач
2	Пшеница	30	25	22	15		15			
3	Рожь	23	20	20	16		10			
4	Овес	20	20	18	17		8			
5	Гречиха	18	20	22	18		20			
6	Соя	14	12	12	20		25			
7							*piAi*	*ci*	*Ri*	
8	Пшеница	240	240	240	250					
9	Рожь	190	195	200	200					
10	Овес	100	105	150	150					
11	Гречиха	200	230	240	250					
12	Соя	250	250	260	270					
13										
14	Пшеница						*P*			
15	Рожь						*C*			
16	Овес						*R*			
17	Гречиха									
18	Соя									
19										
20	Сумма *xij*									
21	Площадь	100	200	250	400					

Значения ячеек в таблице:
A2:A6 = A8:A12 = A14:A18 – имена культур;
B1:E1 – названия участков;
B2:E6 – урожайность культур по участкам;
B8:E12 – издержки обработки 1 га земли по участкам и культурам;
B14:E18 – переменные (x_{ij});
B20:E20 – плановые посевы на каждом участке ($\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$);
B21:E21 – площади участков (s_j);
G2:G6 – рыночные цены культур;
J2:J6 – плановые объемы производства культур (Ai = $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$);
J14:J16 – плановые величины выпуска, издержек, прибыли (P, C, R);
G8:G12 – плановый объем производства культур в денежном выражении ($p_i A_i$);
H8:H12 – плановые издержки производства культур (ci= $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$);
I8:I12 – плановая прибыль от производства культур ($R_i = A_i - C_i$).
Формулы для вычислений:
B20 = СУММ(B14:B18);
C20:E20 – копируются из B20;
J2 = СУММПРОИЗВ (B14:E14;B2:E2);
J3:J6 – копируется из J2;
G8 = J2*G2;
G9:G12 – копируются из G8;
H8 = СУММПРОИЗВ (B14:E14;B8:E8);
H9:H12 – копируются из H8;
I8 = G8 – H8;
I9:I12 – копируются из I8;
J14 = СУММ(G8:G12);
J15 = СУММ(H8:H12);
J16 = J14 - J15.
Ограничения:
B14:E18 ≥ 0 – неотрицательность переменных ($x_{ij} \geq 0$);
B20:E20 ≤ B21:E21 – посевы на каждом участке не превышают его площадь ($\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq s_j$);
Варианты задачи.

Вариант 1. Найти наибольший выпуск при ограничениях по площадям участков.

Целевая функция max J14 = 435000.

Значения переменных:

x_{11}= 100, x_{42}=200, x_{43}=250, x_{54}=400, остальные переменные равны нулю. Это значит, что пшеницей нужно засевать полностью первый участок, гречихой полностью второй и третий участки, соей полностью четвертый участок, рожь и овес сеять невыгодно.

Двойственные оценки ограничений по площадям участков:

v_1 = 450, v_2 = 400, v_3 = 440, v_4 = 500.

Это означает следующее: увеличение (уменьшение) площади первого участка увеличивает (уменьшает) объем производства на 450 тыс. руб; так оно и есть – на первом участке выгодно сеять пшеницу, ее урожайность равна 30 ц, а цена 15 тыс. руб/ц, т.е. 1 га увеличивает выручку на 450 тыс. руб. Аналогично 1 га второго , третьего и четвертого участков увеличивают выручку на 400, 440 и 500 тыс. руб. Двойственная оценка в данном случае – земельная рента.

Вариант 2. Максимизировать прибыль при ограничении общих издержек ($C \leq 50\,000$ тыс. руб.).

Привести систему в начальное состояние. Ввести I15 = 50000. Добавить ограничение J15 ≤ I15. Назначить целевой функцией max J16. Запустить решение.

Решение:

а) целевая функция = 43148,15 тыс. руб;

б) переменные: x_{11} = 100, x_{54} = 96,3 га; это значит, что нужно засеять пшеницей весь первый участок, соей 96,3 га четвертого участка, на остальные культуры и участки средств недостаточно;

в) двойственная оценка ограничения по издержкам v = 1,85 тыс. руб., значит, каждый дополнительный рубль издержек принесет 1,85 рубля прибыли. В данном случае двойственная оценка - предельная эффективность издержек.

Вариант 3. Минимизировать издержки при заданных объемах производства культур: пшеница = 2500 ц; рожь = 3000 ц; овес = 2000 ц; гречиха = 400 ц; соя = 5000 ц.

Привести систему в начальное состояние. Устранить ограничение J15 ≤ I15. Добавить ограничение на J2:J6 ≥ H2:H6. Ввести значения $A_i^{\min}$ в ячейки: H2=2500, H3=3000, H4 = 2000, H5=400, H6=5000. Назначить целевой функцией min J15.

Решение:

а) целевая функция = 131197 тыс. рублей;

б) переменные: x_{11}=83,33, x_{21}=16,67, x_{22}=100, x_{23}=30,83, x_{32}=100, x_{43}=18,18, x_{54}=250, остальные переменные равны нулю, – это значит, что на первом участке нужно засеять 83,33 га пшеницей и 16,67 га рожью, на втором участке 100 га засеять рожью и 100 га овсом, на третьем 30,83 га засеять рожью и 18,18 га гречихой, соей засеять 250 га на четвертом участке.

в) двойственные оценки ограничения по площадям участков:

v_1 = -40, v_2 = -5, v_3 = 0, v_4 = 0; это значит, что дополнительный гектар на первом участке снижает издержки производства заданных объемов продукции на 40 тыс. рублей, а дополнительный гектар на втором участке снижает издержки на 5 тыс. рублей, соответственно дополнительные гектары на остальных участках ничего не дают, т.к. их площади недоиспользуются.

г) двойственные оценки ограничений по продукции v_1 = 9,33, v_2 = 10, v_3 = 5,5, v_4 = 10,91, v_5 = 13,5 – это предельные издержки производства пшеницы, ржи, овса, гречихи и сои.

5.10 Использование оборудования

На предприятии имеется оборудование (например, для механической обработки деталей) различных видов (качества), выполняющее одни и те же операции. Качество оборудования проявляется в производительности и издержках. Предприятие предполагает расширять производство, для этого приобрести по лизингу еще один комплект оборудования. Проблема – из имеющихся на рынке видов оборудования выбрать самое эффективное.

Обозначим :

$i = 1,\ldots, m$ – номера обрабатываемых деталей;

$j = 1,\ldots, n$ – номера комплектов оборудования;

$j = 1,\ldots, k$ – номера имеющегося на предприятии оборудования;

$j = k+1,\ldots, n$ – номера видов оборудования, из которых нужно выбрать самый эффективный;

a_{ij} – сменная производительность j-го вида оборудования по i-й детали, т.е. сколько i-х деталей изготавливает за смену j-й вид оборудования;

c_{ij} – издержки обработки i-й детали на j-ом виде оборудования;

k_j – количество имеющихся комплектов j-го вида оборудования;

x_{ij} – плановая загрузка j-го вида оборудования обработкой i-й детали в сменах;

$x_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ – плановая загрузка j-го вида оборудования в смену;

$b_{ij} = a_{ij}x_{ij}$ – плановое производство i-й детали на j-м виде оборудования за смену;

$b_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}$ – плановое производство i-й детали на всех видах оборудования за смену;

$b_i^{\min}$, $b_i^{\max}$ – нижний и верхний пределы планового производства i-ой детали за смену;

$C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ – издержки на производство всех деталей на всех видах оборудования за смену.

Условия задачи запишем в виде матриц производительности и издержек.

Матрица производительности

Оборудование

Детали	1	…	j	…	n	Потребность в деталях
1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	$b_1^{\min}$, $b_1^{\max}$
…	…	…	…	…	…	… …
i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}	$b_i^{\min}$, $b_i^{\max}$
…	…	…	…	…	…	… …
m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	$b_m^{\min}$, $b_m^{\max}$

Матрица издержек

Оборудование

Детали	1	…	j	…	n
1	c_{11}	…	c_{1j}	…	c_{1n}
…	…	…	…	…	…
i	c_{i1}	…	c_{ij}	…	c_{in}
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1}	…	c_{mj}	…	c_{mn}

Математическая модель.

Найти min C при ограничениях:

$b_i \geq b_i^{\min}$ – произвести не меньше $b_i^{\min}$;

$b_i \leq b_i^{\max}$ – произвести не больше $b_i^{\max}$;

$x_j \leq k_j$ – плановая загрузка не может превышать имеющуюся мощность оборудования;

$x_j \geq 0$ – неотрицательность переменных.

Пример 11

Запись условий задачи показана на рис.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Обор 1	Обор 2	Обор 3	Обор 4		min		Произв
2	Дет 1	120	216	350	450		250		
3	Дет 2	130	240	380	470		280		
4	Дет 3	80	150	310	390		210		
5			Издержки						
6	Дет 1	510	260	180	105				
7	Дет 2	470	232	165	94				
8	Дет 3	502	285	130	120				
9			Переменные						
10	Дет 1								
11	Дет 2								
12	Дет 3								
13									
14	Загрузка								
15	Наличие	99999	1	0	0				
16			Произведено						
17	Дет 1								
18	Дет 2								
19	Дет 3								

На предприятии имеется два вида оборудования: первое (j=1) – в неограниченном количестве, второе (j=2) – один комплект. Предполагается закупить или взять в аренду (лизинг) один из двух видов оборудования (j=3 или j=4).

Содержание таблицы EXCEL

B1:E1 – имена оборудования;
A2:A4 = A6:A8 =A10:A12 = A17:A19 – имена деталей;
B2:E4 – производительность оборудования – штук в смену (a_{ij});
B6:E8 – издержки производства каждой детали на каждом виде оборудовании (c_{ij});
B10:E12 – переменные (x_{ij});

B14:E14 – загрузка каждого оборудования в сменах ($\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$);
B15:E15 – наличие каждого оборудования (k_j);
B17:E19 – плановое производство каждой детали на каждом оборудовании ($a_{ij}x_{ij}$);

G2:G4 – минимальная потребность деталей в смену ($b_i^{\min}$);
I2:I4 – плановое производство деталей в смену (b_i);

I6:I8 – плановые издержки производства каждой детали ($\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$);

I9 – плановые издержки производства всех деталей ($\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$) – целевая функция.
Вычисляемые величины:
B14 = СУММ (B10:B12), C14:E14 копируются из B14;
B17 = B10*B2; B17:E17 (кроме B17) копируются из B17;
I2 = СУММПРОИЗВ(B2:E2; B10:E10); I3:I4 копируются из I2;
I6 = СУММПРОИЗВ(B10:E10;B6:E6); I7:I8 копируются из I6;
I9 = СУММ(I6:I8).
Ограничения:
B10:E12 ≥ 0 – неотрицательность переменных ;
B14:E14 ≤ B15:E15 – по наличию оборудования;
I2:I4 ≥ G2:G4 – по потребности в деталях;
Целевая функция = min I9.
Третьего и четвертого видов оборудования еще нет, т.е. $к_3 = к_4 = 0$.
Решение:

а) целевая функция = 2734,56;
б) переменные запишем в виде матрицы;
в) двойственные оценки:
по оборудованию v_1=0, v_2=-658, v_3=-1815,25, v_4=-2327,25.
по деталям v_1 = 4,25, v_2 = 3,62, v_3 = 6,28.

Проанализируем результаты решения. Второй вид оборудования нужно полностью загрузить производством первой детали, а вторую и третью детали и недостаток первой до нормы производить на первом, самом неэффективном виде оборудования. Может показаться странным, что в план включены третий и четвертый виды оборудования, которых у предприятия еще нет. Это сделано для того , чтобы получить двойственные оценки этого оборудования, которые равны соответственно v_3 = -1815,25 руб. и v_4 = -2327,25 руб. Двойственные оценки показывают какую экономию на издержках приносит каждый вид оборудования. Какой вид оборудования выгодно взять, зависит от арендной платы за смену. Если, например, за 3-е оборудование требуется 1000 руб. в смену, а за 4-е – 2000 руб. в смену, то выгоднее взять 3-е оборудование.

Двойственные оценки по деталям являются предельными издержками.

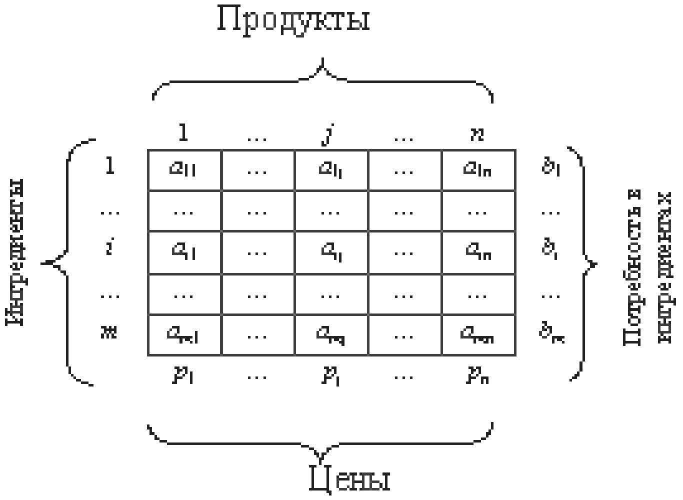
5.11 Задача о диете (о смесях)

Человек ежесуточно должен потреблять определенное количество калорий, белков, жиров и углеводов; назовем все это ингредиентами.

Известны:
а) набор доступных продуктов;
б) количество ингредиентов в единице каждого продукта;
в) суточная потребность в ингредиентах;
г) цена продуктов.

Определить диету (набор продуктов), обеспечивающую человека необходимыми ингредиентами, с минимальными издержками.

Условия задачи задаются матрицей.



i=1,…,m – номера ингредиентов;

j=1,…,n – номера продуктов;

a_{ij} – содержание i-го ингредиента в единице j-й продукции;

x_j – плановый объем суточного потребления j-го продукта;

$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ – плановое содержание i-го ингредиента в диете (суточном наборе продуктов);

$b_i^{\min}$, $b_i^{\max}$ – нижняя и верхняя границы для b_i;

p_j – цена единицы j-го продукта;

$P = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$ – цена суточного набора продуктов, целевая функция;

$x_j^{\min}$, $x_j^{\max}$ – ограничения на количество j-го продукта в диете .

Математическая модель задачи:

Найти min P, при ограничениях: $b_i^{\min} \le b_i \le b_i^{\max}$; $x_j^{\min} \le x_j \le x_j^{\max}$;

Пример 12

По медицинским данным содержание ингредиентов в некоторых продуктах задается следующей таблицей, где потребность в ингредиентах дана для человека в возрасте 30 – 39 л. (в числителе для женщины, в знаменателе – для мужчины); содержание и потребность ингредиентов (кроме калорий) даны в граммах на 1 кг. продукта.

	Рыба камбала	Сахар	Мясо говядина	Молоко	Масло сливочное	Макароны	Хлеб ржаной	Картофель	Крупа рисовая	потребность
Калории	900	3740	2030	580	7480	3330	1900	830	3230	2300/2700
Белки	157	-	163	28	6	103	56	20	70	75/88
Жиры	30	-	153	32	825	13	11	1	6	84/99
Углеводы	-	998	-	47	9	742	433	197	773	310/ 365

Содержание ячеек в таблице EXCEL:

B1:J1 – имена продуктов;

A2:A5 – имена ингредиентов;

B2:J5 – содержание ингредиентов в продуктах (a_{ij});

B7:J7 – цены продуктов (p_j) в руб. за кг.;

B9:J9 – переменные (x_j);

B11:J11 – максимально допустимое количество j-го продукта ($x_j^{\max}$);

B12:J12 – минимально допустимое количество j-го продукта ($x_j^{\min}$);

L2:L5 – минимально допустимое количество i-го ингредиента ($b_i^{\min}$);

M2:M5 – максимально допустимое количество j-го ингредиента ($b_i^{\max}$);

N2:N5 – количество i-го ингредиента в диете;

N7 – цена суточной диеты по плану.

Запись условий задачи в таблице EXCEL показана на рис.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		Рыба	Сахар	Говядина	Молоко	Масло	Макароны	Хлеб	Картофель	Рис		*min*	*max*	Количество
2	Калории	900	3740	2030	580	7480	3330	1900	830	3230		2700	99999	
3	Белки	157		163	28	6	103	56	2	7		88	99999	
4	Жиры	30		153	32	825	13	11	1	6		99	99999	
5	Углеводы		998		47	9	742	433	197	773		365	99999	
6														
7	Цена	25	5	50	10	70	12	6	6	16				
8														
9	Перем													
10														
11	*max*	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999				
12	*min*	0	0	0	0	0	0	0	0	0				

Формулы для вычислений:
N2=СУММПРОИЗВ($B$9:$J$9,B2:J2), N3:N5 получаются копированием из N2;
N7 = СУММПРОИЗВ(B9:J9;B7:J7).
Ограничения:
B9:J9 ≥ B12:J12 – по нижнему пределу потребления продуктов;
B9:J9 ≤ B11:J11 – по верхнему пределу потребления продуктов;
N2:N5 ≥ L2:L5 – по нижнему пределу потребления ингредиентов;
N2:N5 ≤ M2:M5 – по верхнему пределу потребления ингредиентов;
Целевая функция = min N7.

Вариант 1. Минимизация издержек при обеспечении минимальной потребности в ингредиентах для мужчины. Модель сформирована, запустить решение.

Решение:
а) целевая функция = 16,31;
б) x_5=0,099 (масло); x_7=1,561 (хлеб); остальные переменные равны нулю;
в) при этом будут получены следующие результаты (табл.).

Ингредиенты	**Количество**	**Двойственные оценки**
Калории	3707,5	0
Белки	88	0,091
Жиры	99	0,084
Углеводы	676,7	0

По плану можно прожить сутки на 16 руб. 31 коп., если съедать 1,5 кг. хлеба и 100 г. сливочного масла. При этом белки и жиры будут получены в норме, а калории и углеводы – с избытком. Двойственные оценки показывают во сколько обойдется дополнительная (сверх нормы) единица ингредиентов. Естественно, что двойственные оценки калорий и углеводов равны нулю, т.к. эти ингредиенты получены в избытке, дополнительный грамм белков и жиров обойдется соответственно в 9,1 коп. и 8,4 коп.

Вариант 2. В жизни требуется иногда не только обеспечивать минимум, но и не превышать максимум ингредиентов. Люди, склонные к полноте, вынуждены ограничивать диету в калориях, а при некоторых заболеваниях – также в жирах и углеводах. В первом варианте углеводов получено почти в два раза больше нормы. Поставим условие: чтобы углеводов было получено не более 500 г., для чего введем в ячейку M5 число 500.

Решение:
а) целевая функция = 17,74 руб. вместо 16,31 в варианте 1; это естественно – ужесточение ограничений всегда ухудшает значение целевой функции;
б) x_1=0,15 (камбала); x_5=0,099 (масло); x_7=1,15; как видно, уменьшено количество хлеба, но добавилось в набор 150 г. рыбы, как содержащей существенно меньше углеводов, чем хлеб;
в) другие данные приведены в таблице.

Ингредиенты	**Количество**	**Двойственные оценки**
Калории	3066	0
Белки	88	0,143
Жиры	99	0,083
Углеводы	500	-0,007

Отрицательное значение двойственной оценки по углеводам говорит о том, что допущение большего количества углеводов, чем 500 г., позволит снизить суточные издержки на питание.

Вариант 3. Полученный набор отвечает медицинским требованиям, но вряд ли покажется вкусным человеку. В литературе рассказывается, что при первоначальном решении задачи о диете для американских студентов было получено самое дешевое меню: овсянка. В нашем наборе овсянки нет, она, скорее всего, стала бы лидером. Если человек не просто желает удовлетворить свои потребности в ингредиентах, но и получить вкусное меню, он должен расширить набор продуктов и ужесточить ограничения по потреблению тех продуктов, которые он желает или не желает видеть в наборе. В данном примере поставим условие, чтобы в меню было сахара не менее 20 г., а потребление хлеба не превышало 0,5 кг. Для этого назначим C12=0,02, H11=0,5. Получим решение:

а) целевая функция = 18,17 руб.;

б) переменные: x_1=0,146 кг (камбала); x_2=0,02 кг (сахар); x_5=0,102 кг (масло); x_6=0,364 кг (макароны); x_7=0,5 кг (хлеб);

в) количество ингредиентов и двойственные оценки показаны в таблице.

Ингредиенты	**Количество**	**Двойственные оценки**
Калории	3101	0
Белки	88	0
Жиры	99	0
Углеводы	500	-0,005

Можно составить различное меню на каждый день недели или месяца.

Общие замечания по задаче.

1. Трудно представить, чтобы человек подобным образом планировал свое питание. Это происходит потому, что в развитых государствах затраты на питание незначительны – от 16 до 20% семейного бюджета.

2. Задача о диете может использоваться и в других случаях:

а) рацион откорма скота, птиц, рыб, кормления животных в зоопарке;

б) смеси удобрений для выращивания зерновых культур в сельском хозяйстве;

в) смеси в металлургии и химическом производстве.

Можно найти и другие применения данной задачи.

6 ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

6.1 ВВЕДЕНИЕ

Чтобы формализовать ситуации, связанные с хранением и управлением запасами, используются математические модели. Рассмотренные проблемы были достаточно просты и удовлетворяют всем основным предпосылкам, введенным в модели. Однако иногда возникают более сложные задачи, решение которых с помощью изложенных математических моделей не отвечает существу поставленной проблемы. Поэтому мы вынуждены обращаться к иной группе методов, которые можно использовать в ситуациях, выходящих за рамки системы предпосылок, на которых основаны простые модели.

Имитационное моделирование используется в случаях, когда применение математических аналитических моделей неадекватно или является слишком сложным. Хотя методы имитационного моделирования не слишком элегантны, они являются очень гибкими и мощными в применении. Они шаг за шагом воспроизводят процесс функционирования системы. Эта система может включать ряд стохастических переменных. В системе управления запасами, например, неопределенности могут быть подвержены как ежегодный спрос, так и срок реализации заказа.

Используя выборочные данные, можно моделировать поведение системы. Если имитационное моделирование применяется в течение достаточно длительного периода, появляется возможность создавать модели с периодическим циклом или рассчитывать математические ожидания для определенных параметров. Имитационное моделирование может помочь при составлении прогнозов относительно возможного поведения системы в будущем.

Более подробно мы остановимся на одном методе, который известен под названием **Метод Монте-Карло.** В данном методе всем переменным присваиваются дискретные значения, даже если на самом деле эти переменные являются непрерывными. Переменная времени, например, может подразделяться на интервалы в минутах, часах или днях в зависимости от моделируемой системы. Затем рассчитываются вероятности каждого значения, а в отборе значений переменных из распределения вероятности используются случайные числа. С помощью описанной процедуры генерируются ряды значений переменных, которые являются основой для построения имитационной модели.

В имитационном моделировании, как и в большинстве методов исследования операций, рассмотренных нами ранее, при построении моделей и их последующем анализе, как правило, широко используются компьютеры. В этой области применение компьютеров становится особенно важным, поскольку значимую и обоснованную информацию из имитационной модели можно получить только после проведения расчетов для различных случайных чисел. Если мы заинтересованы в нахождении стационарного состояния модели, необходимо сделать расчет за длительный период моделируемой переменной времени и таким образом получить средние значения соответствующих статистических характеристик. Если же моделируемый период слишком мал, то на средние значения переменных могут оказывать воздействие начальные (стартовые) колебания.

Конечно, весь спектр применения имитационных методов и моделей продемонстрировать невозможно, однако, принципы, лежащие в их основе, одинаковы.

6.1.1 ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

В основу исследований рынка положена предпосылка о том, что клиент пытается выработать оценку общественного мнения по интересующему его вопросу. Клиент желает знать, какова продолжительность определенной работы и ее стоимость. Первый этап заключается в организации выборочного обследования и разработке анкеты. Вторым этапом является сбор исходных данных. Предположим, что подготовлена соответствующая анкета и выработан план проведения выборочного обследования. Пусть принято решение, что сбор информации будет проводиться интервьюерами путем опроса прохожих на улицах крупного города. Длительность проведения обследования и соответствующие затраты зависят от того, сколько времени понадобится интервьюеру для сбора исходных данных. Каким образом ответственная за проведение обследования организация может оценить, сколько времени потребуется для его проведения?

Необходимо провести анализ ситуации. Интервьюеру придется останавливать прохожих, спрашивать об их желании или нежелании дать интервью и в случае, если они согласны, задать им соответствующие вопросы. Переменными в данной ситуации являются следующие величины:

1. Интервьюеру придется ожидать прохожего, которого можно остановить. Следовательно, нам необходимо знать величину интервала между последовательными моментами появления прохожих.

2. Желание прохожего дать интервью.

3. Продолжительность самого интервью.

Если нам удастся сгенерировать информацию, отражающую процесс остановки прохожего, и его возможное интервьюирование, то мы сможем построить имитационную модель для данной проблемы и оценить время, требующееся для того, чтобы набрать необходимое число интервью. Причем данные должны отражать стандартные характеристики переменных, которые были идентифицированы выше. Каждая из этих переменных является стохастической, т.е. подверженной неопределенности. Наиболее простой способ состоит в сборе определенных данных через проведение испытаний.

Если в качестве испытания выбрать поток из 100 прохожих, то можно зафиксировать временные интервалы между их последовательным появлением, желание или нежелание быть проинтервьюированным и, если они дадут согласие, продолжительность интервью. Степень точности этих данных зависит от специфики проблемы. В данном случае совершенно неважно, чтобы время было зафиксировано с высокой степенью точности. Кстати, именно на этой стадии принимается решение о том, какие дискретные значения времени следует использовать. Например, между последовательным появлением двух прохожих проходит приблизительно 1 мин., а каждое интервью занимает примерно 2 мин.

После того, как собраны данные для потока из 100 прохожих, для каждой переменной можно построить распределение частот и рассчитать соответствующее значение вероятности. Предположим, что по результатам испытания были зафиксированы следующие данные:

Модель появления прохожих - интервалы между моментами появления

Время между появлениями прохожих около интервьюера, мин.	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Число появлений, f	25	35	18	10	8	4
Вероятность (f - 100)	0,25	0,35	0,18	0,10	0,08	0,04

Из общего числа опрошенных 75 человек выразили желание дать интервью. Следовательно, вероятность того, что некоторый прохожий будет согласен на интервью, можно оценить как 0,75.

Продолжительность интервью

Продолжительность интервью, мин	**2**	**4**	**6**
Количество интервью, f	40	45	15
Вероятность (f - 100)	0,40	0,45	0,15

Как эти данные можно использовать для того, чтобы сгенерировать процесс появления прохожих? Один из методов генерирования - это использование таблицы случайных чисел. Таблица случайных чисел заключает в себе цифры от 0 до 9, выбранные случайным образом. Группировки в таблицах применяются исключительно для удобства чтения. При пользовании таблицей в качестве точки отсчета может быть выбрана любая позиция. В зависимости от требований цифры можно выбирать по одной, по две или по три, двигаясь по таблицам вправо или вниз. Случайные числа используются для того, чтобы множеству значений переменной поставить в соответствие множество случайных чисел (например, 0-9, 00-99). Случайные числа ставятся в соответствие значениям переменной пропорционально значениям вероятностей.

Таким образом, из указанных таблиц выбирается случайное число, и переменной присваивается соответствующее значение. Так как в данной задаче значения вероятностей указаны с точностью до двух десятичных знаков, мы будем пользоваться случайными числами, содержащими две цифры. Распределение интервала случайных чисел 00-99 показано в таблице.

Распределение случайных чисел для интервалов между моментами появления прохожих

Интервал между появлениями, мин.	**Вероятности**	**Кумулятивные вероятности**	**Случайные числа**
0	0,25	0,25	00-24
1	0,35	0,60	25-59
2	0,18	0,78	60-77
3	0,10	0,88	78-87
4	0,08	0,96	88-95
5	0,04	1,00	96-99

Если выбирается случайное число 03, то оно принадлежит промежутку (00-24) и характеризует интервал между появлениями прохожих в ноль минут. Случайное число 47 принадлежит промежутку (25-59) и соответствует в одну минуту. Используя последовательные случайные числа и двигаясь вдоль по строке или вниз по столбцу таблицы, а также с помощью приведенных выше данных мы можем поставить в соответствие каждому человеку интервал его появления около интервьюера. Полученные значения накапливаются, начиная с нулевого значения, и в результате позволяют найти время появления каждого прохожего.

Распределение интервалов случайных чисел для желающих дать интервью

Согласие прохожего дать интервью	**Вероятность**	**Кумулятивная вероятность**	**Случайные числа**
Да	0,75	0,75	00-74
Нет	0,25	1,00	75-99

Чтобы установить, согласится ли моделируемый прохожий дать интервью, выбираем случайное число из другого столбца или строки таблицы. Пусть выбрано число 35. Оно находится в промежутке (00-74). Данный прохожий согласен дать интервью. Если следующее число равно 64, то, поскольку оно принадлежит тому же промежутку, следующий прохожий также даст согласие на интервью.

Распределение интервалов случайных чисел для продолжительности интервью

Продолжительность интервью, мин	**Вероятность**	**Кумулятивная вероятность**	**Случайные числа**
2	0,40	0,40	00-39
4	0,45	0,85	40-84
6	0,15	1,00	85-99

Продолжительность интервью устанавливается аналогично, но с использованием отличного от двух предыдущих множества случайных чисел.

Теперь все готово к тому, чтобы начать процесс моделирования. Мы будем продолжать его до тех пор, пока не будет получено 10 интервью. Для каждой переменной выбираются случайные числа, а затем генерируются значения переменных, необходимых для продолжения процесса моделирования (время появления прохожего), а также переменных, необходимых дли описания поведения системы (согласие дать интервью и его продолжительность).

Ниже приведены данные из таблиц случайных чисел, которые помогут вам проследить за ходом процесса моделирования.

03 47 43 73 86 97 74 24 67 62 16 76 62 27 66 12 56 85 99 26 55 59 56 35 64 16 22 77 94 39 84
42 17 53 31 63 01 63 78 59 33 21 12 34 29 57

Для интервалов появления прохожего выберем случайные числа с начала списка и будем продвигаться вдоль строки. Данный ряд начинается с чисел: 03, 47, 43. Для согласия дать интервью выберем случайные числа второй строки, которая начинается с чисел: 35, 64, 16. Для продолжительности интервью также выберем числа второй строки, но начнем с конца и будем двигаться справа налево:

57, 29, 34. Предположим, что моделируемый счетчик времени начинается с нулевого момента. Тогда первый прохожий появится в момент времени, равный (0 + первый интервал появления прохожего). Предположим также, что каждое следующее интервью может начаться сразу же после окончания предыдущего.

Десятое интервью завершится через 36 мин. после начала процедуры. Использование иного множества случайных чисел приведет к другому результату. Если потребуется определить время, необходимое для десяти интервью, мы должны будем сделать по имитационной модели расчеты для большего числа интервью -например, для 100 или 200. И только после этого можно будет рассчитать среднее время, требуемое для завершения 10 интервью.

Одна из проблем, возникающих при построении имитационных моделей, состоит в том, что необходимо точно знать, какого рода информацию следует собирать, чтобы процесс моделирования можно было продолжить. В данной ситуации небольшой размерности существует возможность идентифицировать каждый шаг и при необходимости вернуться на предыдущий этап, если возникла потребность в дополнительной информации. В ситуациях большего масштаба, моделирование которых осуществляется с помощью компьютеров, очень важно, чтобы решение о том, какие данные необходимы, и о способах их сбора и представления было принято еще на начальном этапе.

Моделирование процесса проведения 10 интервью одним интервьюером

Номер прохожего	*Модель появления*			*Согласие дать интервью*		*Модель интервью*			
	Случайное число	*IAT. мин*	*Время появления, мин*	*Случайное число*	*Да/нет*	*Случайное число*	*Продолжительность, мин*	*Время*	
								Начало	*Окончание*
1	03	0	*0*	35	Да	57	4	*0*	4
2	47	1	1	Интервьюер занят					
3	43	1	2	Интервьюер занят					
4	73	2	4	64	Да	29	2	4	6
5	86	3	7	16	Да	34	2	7	9
6	97	5	12	22	Да	12	2	12	14
7	74	2	14	77	Нет		Отказ		
8	24	0	14	94	Нет		Отказ		
9	67	2	16	39	Да	21	2	16	18
10	62	2	18	84	Нет		Отказ		
11	16	0	18	42	Да	33	2	18	20
12	76	2	20	17	Да	59	4	20	24
13	62	2	22	Интервьюер занят					
14	27	1	23	Интервьюер занят					
15	66	2	25	53	Да	78	4	25	29
16	12	0	25	Интервьюер занят					
17	56	1	26	Интервьюер занят					
18	85	3	29	31	Да	63	4	29	33
19	99	5	34	63	Да	01	2	34	36
10 интервью набрано									

Сбор данных преследует две основные цели. Во-первых, их можно использовать при проверке положения о том, что модель функционирует именно так, как и предполагалось при ее составлении. Эта процедура является составной частью обоснования модели. Например, по данным исходного распределения, математическое ожидание продолжительности интервью составит:

E (продолжительность интервью) = 2 x 0,4 + 4 x 0,45 + 6 x 0,15 = 3,5 мин.

По данным нашей небольшой имитационной модели, на проведение 10 интервью интервьюер затрачивает 28 мин., таким образом, среднее значение продолжительности одного интервью составляет 2,8 мин., что несколько меньше, чем предполагалось изначально. Для выборки такого небольшого размера эта изменчивость неудивительна. Однако если бы мы получили эти же результаты для первых 100 интервью, они означали бы, что модель является некорректной и требует тщательной проверки.

Во-вторых, данные можно использовать для получения некоторой информации непосредственно из модели. Например, сколько времени потребуется, чтобы получить 10 интервью? - 36 мин. Какую часть времени интервьюер бездействует? - 8 мин из 36. Сколько человек прошло мимо интервьюера, пока он получал 10 интервью? - 19: 6 человек прошли, пока интервьюер был занят; 3 человека отказались дать интервью; 10 человек были проинтервьюированы.

Данное исследование можно расширить, если, например, ввести в модель второго интервьюера. Затраты на оплату его работы могут быть компенсированы сокращением времени, необходимого для получения 10 интервью.

Введение в модель второго интервьюера требует принятия дополнительных правил, определяющих функционирование модели. Что произойдет, если оба интервьюера будут свободны? Кто из них подойдет к ближайшему следующему прохожему? Примем предпосылку о том, что первого прохожего всегда берет на себя интервьюер 1. Подобные правила необходимо вводить на начальном этапе формулировки любой модели. В данном случае неважно, какой из интервьюеров будет выбран, но при построении всех имитационных моделей нужно быть последовательным и уметь четко сформулировать правила функционирования моделируемой системы.

Итак, мы установили, что в данном случае получение 10 интервью займет 27 мин. Между тем на практике средние значения вычисляются на основе гораздо более длительного процесса моделирования. Для того, чтобы принять решение о том, пользоваться услугами второго интервьюера или нет, потребуются и другие данные, например, о промежутках времени, когда оба интервьюера свободны.

Моделирование процесса проведения 10 интервью двумя интервьюерами

Номер Прохожего	*Модель появления*			*Согласие дать интервью*		*Модель интервью*			
	Случайное	*IAT, мин*	*Время появле*	*Случайное число*	*Да/нет*	*Случайное*	*Продолжи-*	*Интервьювер 1*	*Интервьювер 2*

	число		*ния, мин*			*число*	*тель-ность, мин*	*Начало*	*Окончание*	*Начало*	*Окончание*
1	03	0	0	35	Да	*57*	4	0	4		
2	47	1	1	64	Да	29	2			1	3
3	43	1	2	Оба интервьюера заняты							
4	73	2	4	16	Да	34	2	4	6		
5	86	3	7	22	Да	12	2	7	9		
6	97	5	12	77	Нет	Отказ					
7	74	2	14	94	Нет	Отказ					
8	24	0	14	39	Да	21	2	14	16		
9	67	2	16	84	Нет	Отказ					
10	62	2	18	42	Да	33	2	18	20		
11	16	0	18	17	Да	59	4			18	22
12	76	2	20	53	Да	78	4	20	24		
13	62	2	22	31	Да	63	4			22	26
14	27	1	23	Оба интервьюера заняты							
15	66	2	25	63	Да	01	2	25	27		
10 интервью набрано											

После того, как имитационная модель построена, необходимо оценить ее надежность. Мы должны быть уверены в том, что модель воспроизводит формализуемую ситуацию с достаточной степенью точности. Простейший способ оценки надежности состоит в использовании ретроспективных данных и сравнении результатов расчетов, полученных для этих данных по модели, с действительным поведением системы во времени. В приведенном выше примере ретроспективные данные можно не использовать, а оценку надежности модели следует основывать на тщательной проверке и оценке используемых распределений вероятности. Этот момент является очень важным для имитационного моделирования, хотя иногда им пренебрегают.

6.2 ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Особенности формулировки любой имитационной модели зависят от специфики рассматриваемой проблемы. Для иллюстрации общего алгоритма рассмотрим два типа систем массового обслуживания.

Пример 13

Доктор Иванов и доктор Сидоров имеют в совместной собственности кабинет, в котором начиная с 9.00 ведут утренний прием больных. Приемная открывается в 8.30, а закрывается в 10.00 утра. Секретарь сохраняет записи об обращениях пациентов за последние десять недель, кроме того, сами врачи ведут учет пациентов, принятых ими в часы консультаций. Входной поток имеет следующую структуру:

Модель входного потока пациентов

Промежуток между моментами появления пациентов, мин	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
	5	**5**	**10**	**20**	**40**	**10**	**5**	**5**
Вероятность	0,05	0,05	0,10	0,20	0,40	0,10	0,05	0,05

Одна половина пациентов регистрируется у доктора Иванова, другая - у доктора Сидорова, причем они образуют две отдельные очереди, которые движутся по принципу "обслуживания в порядке прибытия" (FIFO). Однако если свободен другой доктор, то 90% пациентов высказывают желание обратиться к нему, когда подошла их очередь, а их доктор занят. Распределение времени консультаций обоих докторов имеет следующий вид:

Распределение времени консультаций - модель обслуживания

Продолжительность консультаций, мин.	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**
Вероятность	0,10	0,20	0,50	0,10	0,10

Для каждого пациента отводится одинаковое время на консультацию независимо от того, какой из докторов его обслуживает. Однако в зависимости от конкретной ситуации можно ввести в модель и два типа распределений времени консультаций отдельно для каждого из врачей.

Используя имитационную модель, оценить входной поток пациентов в часы утреннего приема и ответить на следующие вопросы:

1. Какое число пациентов ожидает в приемной в 9.00 утра?
2. Чему равно среднее время ожидания пациентом приема в очереди?
3. В котором часу каждого из докторов покидает последний пациент?

Решение. Данная задача включает в себя следующие стохастические переменные:

а) интервалы между последовательными появлениями пациентов, на основе которых рассчитывается время прибытия каждого пациента;

б) доктор, к которому попадает пациент;

в) согласие пациента пойти на прием к другому доктору, если последний свободен;

г) продолжительность консультации, которая, как предполагается, зависит от самого пациента, а не от доктора, к которому он попадает. Каждому значению переменных поставим в соответствие случайное число.

Интервалы появления пациентов, мин.

Количество мин.	**Вероятность**	**Кумулятивная вероятность**	**Случайные числа**
1	0,05	0,05	00-04
2	0,05	0,10	05-09
3	0,10	0,20	10-19
4	0,20	0,40	20-39
5	0,40	0,80	40-79
6	0,10	0,90	80-89
7	0,05	0,95	90-94
8	0,05	1,00	95-99

Продолжительность консультации, мин.

Продолжит. мин.	**Вероятность**	**Кумулятивная вероятность**	**Случайные числа**
6	0,10	0,10	00-09
8	0,20	0,30	10-29
10	0,50	0,80	30-79
12	0,10	0,90	80-89
14	0,10	1,00	90-99

Доктор, принимающий пациента

Доктор	**Вероятность**	**Случайные числа**
А	0,5	0-4
В	0,5	5-9

Согласие пойти к другому доктору

	Вероятность	**Случайные числа**
Да	0,9	0-8
Нет	0,1	9

Теперь предварительная работа закончена, и можно начинать непосредственно процесс моделирования. Моделируемый счетчик времени устанавливается на 8.30 утра. Первый пациент приходит в 8.30 + первый интервал появления пациента.

1. К 9.00 в приемной находятся пять человек.
2. Среднее время ожидания пациентами в очереди составляет:

У доктора Иванова	38,9 мин. для 11 пациентов;
У доктора Сидорова	24,9 мин. для 11 пациентов;
Итого	31,9 мин., причем минимальное время ожидания составляет 4 мин., максимальное - 54 мин.

3. Последний пациент уйдет от доктора Иванова в 10 ч 56 мин., а от доктора Сидорова - в 10 ч 46 мин.

Прежде чем использовать полученную информацию, докторам следует смоделировать несколько утренних приемов больных и рассчитать средние значения всех статистических характеристик. Начать им следует с того, чтобы задать вопросы о том, как улучшить обслуживание клиентов. Почему приемная открывается именно за 30 мин. до начала приема? Следует ли ввести систему предварительной записи? Нужно ли организовывать отдельную очередь для пациентов, которые хотели бы попасть на прием к любому врачу? Следует провести моделирование каждого из указанных альтернативных вариантов и определить его теоретический эффект прежде, чем ввести его в практику обслуживания.

Имитационная модель утреннего приема пациентов двумя врачами

Приход пациента			*Доктор, обслуживающий пациента*		*Пойдете к другому врачу?*		*Консультация*						*Время ожидания в очереди.*
1АТ							*Время*		*Доктор Иванов*		*Доктор Сидоров*		
Случайное число	*Минут*	*Время*	*Случайное число*	*Врач*	*Случайное число*	*ta/Не»*	*Случайное число*	*Минут*	*Начало*	*Окончание*	*Начало*	*Окончание*	*мин.*
63	5	8:35	5	B	6	Да	69	10			9:00	9:10	25
27	4	8:39	4	A	2	Да	39	10	9:00	9:10			21
15	3	8:42	2	A	0	Да	39	10	9:10	9:20			28
99	8	8:50	2	A	4	Да	27	8			9:10	9:18	20
86	6	8:56	3	A	8	Да	85	12	9:20	9:32			24
71	5	9:01	1	A	3	Да	49	10	9:32	9:42			31
74	5	9:06	3	A	3	Да	90	14	9:42	9:56			36
45	5	9:11	3	A	7	Да	25	8	9:56	10:04			45
11	3	9:14	5	B	1	Да	84	12			9:18	9:30	4
02	1	9:15	7	B	1	Да	47	10			9:30	9:40	15
15	3	9:18	5	B	2	Да	42	10			9:40	9:50	22
14	3	9:21	5	B	5	Да	04	6			9:50	9:56	29
18	3	9:24	3	A	2	Да	83	12	10:04	10:16			40
07	2	9:26	1	A	9	Нет	03	6	10:16	10:22			50
14	3	9:29	7	B	0	Да	78	10			9:56	10:06	27
58	5	9:34	2	A	2	Да	87	12	10:22	10:34			48
68	5	9:39	7	B	1	Да	61	10			10:06	10:16	27
39	4	9:43	3	A	5	Да	82	12	10:34	10:46			51
31	4	9:47	8	B	2	Да	69	10			10:16	10:26	29
08	2	9:49	2	A	6	Да	33	10			10:36	10:46	47
13	3	9:52	4	A	0	Да	40	10	10:46	10:56			54
55	5	9:57	7	B	2	Да	64	10			10:26	10:36	29
Приемная закрыта													

6.3 ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ В УПРАВЛЕНИИ ЗАПАСАМИ

Алгоритмы, аналогичные описанным выше, могут быть использованы в имитационном моделировании сложных проблем, возникающих в управлении запасами. Они позволяют учитывать неопределенность как спроса, так и срока поставки заказа. В таких случаях должна быть собрана информация, на основе которой можно построить распределения вероятностей для соответствующих переменных.

Пример 14

Корпорация «ЗАЗ» занимается производством легковых автомобилей. Аккумуляторы для модели "Таврия" компания закупает на стороне, у внешнего поставщика. На основе прошлого опыта специалисты «ЗАЗ» оценили, что спрос на аккумуляторы, за неделю можно аппроксимировать нормальным распределением со средним значением 500 и стандартным отклонением 10 для промежутка от 470 до 530.

Начальный запас аккумуляторов составляет 2000 шт., причем администрация компании приняла решение о подачах заказов на партии аккумуляторов размером в 2500 шт. каждый раз, когда их запас опускается ниже уровня в 1500 шт. Кроме того, прошлый опыт показывает, что интервалы времени между подачей заказа и осуществлением поставок изменяются следующим образом:

Распределение времени поставки заказа, корпорации «ЗАЗ»

Время поставки заказа, недель	**1**	**2**	**3**	**4**
Вероятность	0,20	0,50	0,25	0,05

Единичная стоимость хранения запасов равна 0,50 у.е. в неделю и рассчитывается для общего размера запаса, оставшегося на конец недели. Стоимость заказа - 50 у.е., а отсутствие аккумуляторов на складе оценивается в 20 у.е. в неделю.

Используя имитационную модель для периода в 20 недель, оценим среднюю стоимость проведения изложенной выше политики в неделю. Принимается предпосылка о том, что все расчеты производятся в конце недели, а подачи заказов и поставки по ним - в начале недели.

Решение.

Переменными являются спрос и время поставки заказа. Так как спрос аппроксимируется непрерывным нормальным распределением, будем моделировать переменную спроса с шагом в 5 аккумуляторов. Например, вероятность спроса, равного 510 аккумуляторам, будет оцениваться с помощью соотношения P(507,5 < спрос < 512,5).

Среднее значение спроса - 10,050/20 = 502,5 аккумуляторов в неделю. Средний размер запаса на конец недели - 22,865/20 = 1143,25 аккумуляторов в неделю.

Средний размер дефицита - 1020/20 = 51,0 аккумуляторов в неделю. Число заказов, поданных в течение 20 недель, равно, 4, следовательно,

среднее число заказов в неделю - 4/20 = 0,2.

Ожидаемая стоимость в неделю = 1143,25 x 0,50 +51 x 20 + 0,2 x 50 = 1602 у.е.

Как и в предыдущих примерах, процесс моделирования следует продолжить, чтобы убедиться, что достигнутые условия действительно характеризуют стационарное состояние модели.

Имитационные модели можно также применять при исследовании поведения системы управления запасами в условиях альтернативных вариантов политики подачи заказов. Это позволит администрации выбрать тот вариант, который наилучшим образом отвечает поставленным целям.

Распределение интервалов случайных чисел для времени поставки заказа

Время поставки, недель	**Вероятность**	**Кумулятивная вероятность**	**Случайные числа**
1	0,20	0,20	00-19
2	0,50	0,70	20-69
3	0,25	0,95	70-94
4	0,05	1,00	95-99

Распределение интервалов случайных чисел для спроса за неделю

Спрос за неделю	**Вероятность**	**Кумулятивная вероятность**	**Случайные числа**
470	0,003	0,003	00-002
475	0,009	0,012	003-011
480	0,028	0,040	012-039
485	0,066	0,106	040-105
490	0,121	0,227	106-226
495	0,175	0,402	227-401
500	0,197	0,599	402-598
505	0,175	0,774	599-773
510	0,121	0,895	774-894
515	0,066	0,961	895-960
520	0,028	0,989	961-988
525	0,009	0,998	989-997
530	* 0,003	1,000	998-999*

Теперь можно осуществить моделирование.

Моделирование управления запасами

Неделя	*Запас на начало недели*	*Спрос*		*Запас на конец недели*	*Повторный заказ, Да/нет*	*Время поставки*		*Дефицит*
		Случайное число	*Объем*			*Случайное число*	*Недели*	
1	2000	034	480	1520				
2	1520	743	505	1015				
3	1015	738	505	510	Да	95	4	
4	510	636	505	5				
5	5	964	520	0				515
6	0	736	505	0				505
7	2500	614	505	1995				
8	1995	698	505	1490				
9	1490	637	505	985	Да	73	3	
10	985	162	490	495				
11	495	332	495	0				
12	2500	616	505	1995				
13	1995	804	510	1485				
14	1485	560	500	985	Да	10	1	
15	3485	111	490	2995				
16	2995	410	500	2495				

17	2595	959	515	1980				
18	1980	774	510	1470				
19	1470	246	495	975	Да	76	3	
20	975	762	505	470				
		Итого	10050	22865				1020

6.4 РЕЗЮМЕ

Имитационное моделирование является одним из методов, который применяется специалистами в случаях, когда использование математических моделей вызывает определенные трудности или когда лежащие в их основе предпосылки неадекватны реальным условиям. Метод имитационного моделирования можно применять в сложных ситуациях, не принимая никаких предпосылок об исходных данных.

Мы рассмотрели метод Монте-Карло, в котором всем переменным модели ставится в соответствие определенное множество дискретных значений. Данный метод позволяет на основе собранной исходной информации сгенерировать для каждой переменной соответствующее распределение вероятностей. Из этих распределений с помощью случайных чисел получают значения переменных модели, которые используют затем в процессе моделирования. Построение каждой модели начинают с определения входящих в нее переменных и формулирования правил их функционирования. Результаты расчетов по имитационным моделям небольшой размерности обычно представляют в виде таблиц, легко поддающихся количественному анализу.

Существует возможность модификации имитационной модели, по которой вновь производятся расчеты, а затем проводится сравнительный анализ новых результатов с полученными ранее. Методы имитационного моделирования, хотя и не приводят к получению оптимальных решений, как, например, методы линейного программирования, однако, позволяют выработать направления политики, приводящей к лучшим результатам. Но прежде, чем внедрять какой-либо из результатов, полученных по имитационной модели, в практику, необходимо произвести оценку ее надежности и, осуществив расчеты на более длительный период, получить репрезентативные характеристики. Обычно расчеты по имитационным моделям проводятся с помощью пакетов прикладных программ.

7 Элементы теории игр

Теория игр является разделом математики, применяемым в области исследования операции. Теория игр изучает абстрактную модель конфликтной ситуации, т. е. ситуации, в которой участвуют по крайней мере две стороны, представляемые лицами, коллективами или управляющими системами, деятельность которых целеустремленно направлена, причем интересы сторон оказываются частично или полностью противоположными. Обилие таких ситуаций в реальной действительности делает теорию игр весьма актуальной. Не будет преувеличением сказать, что теория игр является математической основой - военного искусства.

Но, кроме военных, имеется много других операций, в которых отдельные виды деятельности, отдельные части коллектива имеют различные цели, что часто приводит к типично конфликтным ситуациям. Раздел теории игр, рассматривающий «игры с природой», непосредственно смыкается с теорией статистических решений и математической статистикой. Этот раздел теории имеет дело с выработкой наилучшего поведения в ситуации, когда человеку противостоит обстановка, известная ему лишь отчасти, изучаемая им и требующая от него некоторой реакции. Теория игр, таким образом, имеет дело со всякого рода борьбой интересов.

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, в которых необходимо принимать решения в условиях неопределенности, т.е. возникают ситуации, в которых две (или более) стороны преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон зависят от мероприятий партнера. Такие ситуации, возникающие при игре в шахматы, шашки, домино и т.д., относятся к конфликтным: результат каждого хода игрока зависит от ответного хода противника, цель игры - выигрыш одного из партнеров. В экономике конфликтные ситуации встречаются очень часто и имеют многообразный характер. К ним относятся, например, взаимоотношения между поставщиком и потребителем, покупателем и продавцом, банком и клиентом. Во всех этих примерах конфликтная ситуация порождается различием интересов партнеров и стремлением каждого из них принимать оптимальные решения, которые реализуют поставленные цели в наибольшей степени. При этом каждому приходится считаться не только со своими целями, но и с целями партнера, и учитывать неизвестные заранее решения, которые эти партнеры будут принимать.

Для грамотного решения задач с конфликтными ситуациями необходимы научно обоснованные методы. Такие методы разработаны математической теорией конфликтных ситуаций, которая носит название ***теория игр.***

Ознакомимся с основными понятиями теории игр. Математическая модель конфликтной ситуации называется *игрой,* стороны, участвующие в конфликте, - *игроками,* а исход конфликта - *выигрышем.* Для каждой формализованной игры вводятся *правила,* т.е. система условий, определяющая: 1) варианты действий игроков; 2) объем информации каждого игрока о поведении партнеров; 3) выигрыш, к которому приводит каждая совокупность действий. Как правило, выигрыш (или проигрыш) может быть задан количественно; например, можно оценить проигрыш нулем, выигрыш - единицей, а ничью - 1/2.

Игра называется *парной,* если в ней участвуют два игрока, и *множественной,* если число игроков больше двух. Мы будем рассматривать только парные игры. В них участвуют два игрока A и B, интересы которых противоположны, а под игрой будем понимать ряд действий со стороны A и B.

Игра называется *игрой с нулевой суммой,* или *антагонистической,* если выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, т.е. для полного задания игры достаточно указать величину одного из них. Если обозначить a - выигрыш одного из игроков, b - выигрыш другого, то для игры с нулевой суммой $b = -a$, поэтому достаточно рассматривать, например a.

Выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами действий называется *ходом* игрока. Ходы могут быть личными и случайными. *Личный ход* - это сознательный выбор игроком одного из возможных действий (например, ход в шахматной игре). *Случайный ход* - это случайно выбранное действие (например, выбор карты из перетасованной колоды). В дальнейшем мы будем рассматривать только личные ходы игроков.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Обычно в процессе игры при каждом личном ходе игрок делает выбор в зависимости от конкретной ситуации. Однако в принципе возможно, что все решения приняты игроком заранее (в ответ на любую сложившуюся ситуацию). Это означает, что игрок выбрал определенную стратегию, которая может быть задана в виде списка правил или программы. (Так можно осуществить игру с помощью ЭВМ). Игра называется *конечной,* если у каждого игрока имеется конечное число стратегий, и *бесконечной* - в противном случае.

Для того чтобы *решить* игру, или найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию *оптимальности,* т.е. один из игроков должен получать *максимальный выигрыш,* когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь *минимальный проигрыш,* если первый придерживается своей стратегии. Такие *стратегии* называются *оптимальными.* Оптимальные стратегии должны также удовлетворять условию *устойчивости,* т.е. любому из игроков должно быть невыгодно отказаться от своей стратегии в этой игре.

Если игра повторяется достаточно много раз, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а *средний выигрыш (проигрыш)* во всех партиях.

Целью *теории игр является определение оптимальной стратегии для каждого игрока.* При выборе оптимальной стратегии естественно предполагать, что оба игрока ведут себя разумно с точки зрения своих интересов. Важнейшее ограничение теории игр - единственность выигрыша, как показателя эффективности, в то время как в большинстве реальных экономических задач имеется более одного показателя эффективности. Кроме того, в экономике, как правило, возникают задачи, в которых интересы партнеров не обязательно антагонистические. Развитие аппарата теории игр для решения задач со многими участниками, имеющими непротиворечивые интересы, выходит за рамки настоящего пособия.

7.1 Игры с двумя стратегиями 2×2

Рассмотрим пример парной игры.

Молодой человек опаздывает на свидание с девушкой и вдруг вспоминает, что забыл купить цветы, кроме того, ему кажется, что у девушки сегодня день рождения. Если он вернется за цветами, то сильно опоздает, если придет без цветов, а у любимой день рождения, то жди неприятностей. Как быть?

Он мысленно просчитывает варианты и составляет нижеприведенную таблицу на основе следующих умозаключений. Если он придет вовремя и без цветов и нет дня рождения, то данную ситуацию можно оценить как нейтральную, т.е. 0. Если без цветов и день рождения, то это оценивается в –10. С цветами и не день рождения 1, а с цветами и день рождения 1,5. Он составляет платежную матрицу, где относительные частоты считаются, как разница между столбцами по модулю и сменой строк. В результате видно, что с цветами надо приходить в соотношении 0,5:10 или 1:20

Стратегии	нет дня рождения	день рождения	Относительные частоты
без цветов	0	-10	0,5
С цветами	1	1,5	10

Прямоугольная или квадратная таблица чисел, строки и столбцы которой соответствуют различным стратегиям доступным игрокам называется платежной матрицей.

7.2 Приведение матричной игры к задаче линейного программирования

Игра $m \times n$ в общем случае не имеет наглядной геометрической интерпретации. Ее решение достаточно трудоемко при больших m и n, однако принципиальных трудностей не имеет, поскольку может быть сведено к решению задачи линейного программирования. Покажем это. Пусть игра $m \times n$ задана платежной матрицей $p = (a_{i,j})$, $i =1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$. Игрок A обладает стратегиями $A_1, A_2, ..., A_m$, игрок B - стратегиями $B_1, B_2, ..., B_n$. Необходимо определить оптимальные стратегии $S_A=(p_1,p_2,,...,p_m)$ и $S_B=(q_1,q_2,...,q_n)$, где p_i,q_j, - вероятности применения соответствующих чистых стратегий A_i, B_j;

$$p_1 + p_2+.. .+p_m=1, \qquad q_1 + q_2+.. .+q_n=1.$$

Оптимальная стратегия S_A удовлетворяет следующему требованию. Она обеспечивает игроку A средний выигрыш, не меньший, чем цена игры v, при любой стратегии игрока B и выигрыш, равный цене игры v, при оптимальной стратегии игрока B. Без ограничения общности полагаем $v>0$; этого можно добиться, сделав все элементы $a_{i,}> 0$. Если игрок A применяет смешанную стратегию $S_A=(p_1,p_2,,...,p_m)$ против любой чистой стратегии B_J игрока B, то он получает *средний выигрыш,* или *математическое ожидание выигрыша* $a_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2+...+ a_{mj}p_m$, $j = 1, 2, ... n$ (т.е. элементы j-го столбца платежной матрицы почленно умножаются на соответствующие вероятности стратегий $A_1, A_2, ..., A_m$, и результаты складываются).

Для оптимальной стратегии S_A все средние выигрыши не меньше цены игры v, поэтому получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \ge v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m \ge v \\ .... \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m \ge v \end{cases}$$

Каждое из неравенств можно разделить на число $v > 0$. Введем новые переменные:

$x_1 = p_1 /v$, $x_2 = p_2 /v$, …, $x_m = p_m /v$.

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \ge 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \ge 1 \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \ge 1 \end{cases}$$

Цель игрока A - максимизировать свой гарантированный выигрыш, т.е. цену игры v.

Разделив на v≠0 равенство $p_1 + p_2 +.. .+p_m=1$, получаем, что переменные x_i (i=1,2,...,m) удовлетворяют условию: $x_1 + x_2+.. .+x_m=1/v$. Максимизация цены игры v эквивалентна минимизации величины 1/v, поэтому задача может быть сформулирована следующим образом: определить значения переменных $x_i \ge 0$, i=1,2,…, т, так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям и при этом линейная функция $Z = x_1 + x_2+.. .+x_m$ обращалась в минимум. Это задача линейного программирования. Решая задачу, получаем оптимальное решение $p_1 + p_2+.. .+p_m$ и оптимальную стратегию S_A.

Для определения оптимальной стратегии $S_B=(q_1,q_2,...,q_n)$, следует учесть, что игрок B стремится минимизировать гарантированный выигрыш, т.е. найти max(1/v). Переменные $q_1+q_2+...+q_n$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{21}q_2 + ... + a_{1n}q_n \le v \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + ... + a_{2n}q_n \le v \\ .... \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + ... + a_{mn}p_n \le v \end{cases}$$

которые следуют из того, что средний проигрыш игрока B не превосходит цены игры, какую бы чистую стратегию не применял игрок A.

Если обозначить $y_j = q_j /v$, j=1, 2, …, n, то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \le 1 \\ .... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le 1 \end{cases}$$

Переменные y_i, (j = 1, 2, ..., n) удовлетворяют условию $y_1 + y_2+.. .+y_n=1/v$

Игра свелась к следующей задаче. Определить значения переменных $y_j > 0$, j = 1, 2, ..., п, которые удовлетворяют системе неравенств и максимизируют линейную функцию

$$Z= y_1 + y_2+…+y_n$$

Решение задачи линейного программирования определяет оптимальную стратегию $S_B=(q_1,q_2,...,q_n)$. При этом цена игры v= 1/max Z = 1/min Z.

Приведем примеры экономических задач, которые описываются игровыми моделями т х п и могут быть решены методами линейного программирования.

Пример

Предприятие может выпускать три вида продукции *(A_1, A_2 и A_3)*, получая при этом прибыль, зависящую от спроса, который может быть в одном из четырех состояний *(B_1, B_2, B_3)*. Дана матрица (см. табл.), ее элементы a_{ij} характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске *i*-й продукции с *j*-м состоянием спроса.

Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, считая его неопределенным.

Решение. Задача сводится к игровой модели, в которой игра предприятия *A* против спроса *B* задана платежной матрицей. Определим нижнюю и верхнюю цены игры. Так как $\alpha \ne \beta$, то седловая точка отсутствует и оптимальное решение следует искать в смешанных стратегиях игроков: $S_A=(p_1,p_2,p_3)$ и $S_B=(q_1, q_2, q_3)$.

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	3	6	8	3
A_2	9	4	2	2
A_3	7	5	4	4
β_i	9	6	8	

Обозначив $x_i = p_i /v$, i = 1, 2, 3 и $y_j = q_j /v$, j=1, 2, …, n, составим две взаимно-двойственные задачи линейного программирования.

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \ge 1 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \ge 1 \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 \le 1 \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 1 \\ 7y_1 + 5y_2 + 4x_3 \le 1 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, i = 1,2,3 \qquad x_i \ge 0, i = 1,2,3$$

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min \qquad Z = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$$

Далее можно переходить к решению симплексным методом этих задач. После решения получаем S_A = (0,4; 0; 0,6). Следовательно, предприятие должно выпустить 40% продукции A_1 и 60% продукции A_3,, а продукцию A_2 не выпускать.

Оптимальная стратегия спроса S_B определяется аналогично: S_B = (0,2; 0; 0,8; 0) (здесь учтено, что второй столбец исходной матрицы был отброшен как невыгодный). Таким образом, оптимальный спрос в 20% находится в состоянии B_1 и в 80% - в состоянии B_3

Пример.

Фермер, имеющий ограниченный участок земельных угодий, может засадить его тремя различными культурами: *A1, A2, A3.* Урожай этих культур зависит главным образом от погоды, которая может находиться также в трех различных состояниях: *B1, B2, B3*.

Фермер имеет информацию об урожайности этих культур при трех различных состояниях погоды, которая отражена в табл.

Урожайность различных культур при различных состояниях погоды

Виды культур	Возможные состояния погоды			Цены С
	Засуха B_1	Нормальная B_2	Дождливая B_3	
A1	20	5	15	2
A2	7,5	12,5	5	4
A3	0	7,5	10	8

Матрица доходов:

Виды культур	Возможные состояния погоды		
	Засуха B_1	Нормальная B_2	Дождливая B_3
A1	40	10	30
A2	30	50	20
A3	0	60	80

В результате решения получаем: оптимальная стратегия – сажать культуры A1 - 0,56 части участка, A2 – 0,2, A3 – 0,24. В этом случае будет получен оптимальный доход при любой погоде не меньше 31,55 тыс.руб. с 1 га.

При решении произвольной конечной игры размера $m \times n$ рекомендуется придерживаться следующей схемы:

1. Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные стратегии по сравнению с другими стратегиями. Такими стратегиями для игрока *A* (игрока *B)* являются те, которым соответствуют строки (столбцы) с элементами, заведомо меньшими (большими) по сравнению с элементами других строк (столбцов).

2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку. Если седловая точка есть, то соответствующие ей стратегии игроков будут оптимальными, а цена совпадает с верхней (нижней) ценой.

3. Если седловая точка отсутствует, то решение следует искать в смешанных стратегиях. Для игр размера $m \times n$ рекомендуется симплексный метод, для игр размера $2\times2, 2\times n$, $n\times2$ возможно геометрическое решение.

На практике реализация оптимального решения в смешанных стратегиях может происходить несколькими путями. Первый состоит в физическом смешении чистых стратегий A_i, в пропорциях, заданных вероятностями p_i,.

Другой путь - при многократном повторении игры - в каждой партии чистые стратегии применяются в виде случайной последовательности, причем каждая из них - с частотой, равной ее вероятности в оптимальном решении.

8 ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ

8.1 ВВЕДЕНИЕ

Одно из последствий изменения экономической ситуации состоит в том, что промышленные компании вынуждены пересматривать свою политику хранения и управления запасами, включая и сырье, и конечную продукцию.

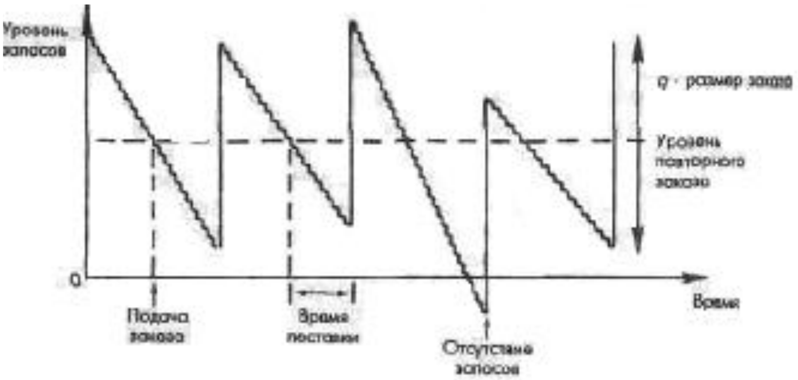
Если некоторая компания имеет товарные запасы, то капитал, овеществленный в этих товарах, замораживается. Этот капитал, который нельзя использовать, представляет для компании потерянную стоимость в форме невыплаченных процентов или неиспользуемых возможностей инвестирования. Кроме того, наличие запасов влечет за собой определенные издержки, поскольку для их хранения необходимо создать определенные условия и выделить определенные площади; необходимо оплачивать работу персонала, осуществляющего управление запасами; запасы должны быть застрахованы и т.п. В этой связи разумно предположить, что целью любой компании является хранение по возможности наименьшего запаса. Однако, следует принять во внимание и другие соображения. Спрос на продукцию чаще всего содержит долю неопределенности. Поэтому чем меньше уровень запаса, тем больше вероятность того, что возникнет дефицит продукции. Наличие дефицита тех или иных товаров уже само по себе является для компании источником определенных убытков либо в сфере производства, либо в связи с потерей клиентов.

Если компания создает товарный запас исходя из размера производственной партии деталей, то вероятнее всего экономически выгодным окажется производство крупных партий деталей, однако, такая политика подразумевает высокий уровень исходного запаса. В данной области существует множество проблем, которые предстоит решить. На сегодняшний день все более важной функцией администрации большинства компаний становится анализ эффективности и оценка политики управления запасами. В отдельных компаниях теория управления запасами находит все более широкое применение. Если в некоторой компании используются современные методы управления, такие, например, как метод "точно в срок", то особую важность приобретает знание менеджерами компании механизма функционирования системы управления запасами. Методы моделирования систем управления запасами были разработаны еще несколько лет назад. Диапазон этих моделей достаточно обширен - от базисных моделей простых детерминированных систем до более сложных моделей, учитывающих неопределенность спроса или сроков поставки заказа. Если система управления запасами является достаточно сложной, то для ее моделирования можно использовать имитационные методы. В любом случае цель процесса моделирования состоит в том, чтобы помочь лицу, принимающему решение, определить с учетом некоторого критерия принятия решения уровень заказа и срок его подачи.

Целью практически любого решения является минимизация общих издержек, связанных с хранением запасов. Не менее важен анализ последствий применения неоптимальной схемы запаса, что предполагает анализ модели на чувствительность.

В данной главе мы рассмотрим основную модель управления запасами, а также возможные способы ее адаптации к различным проблемам, возникающим в связи с наличием запасов, включая и проблему неопределенности. Базисные модели управления запасами часто подвергают критике, основанной на утверждении об отсутствии их связи с реальностью. Хотя такая критика отчасти оправдана, эти модели могут служить полезным введением в существо предмета и проблем, которые необходимо решить.

8.2 ОСНОВНАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ



Стандартная модель хранения запасов

Рассмотрим для начала проблемы управления запасами, связанные либо с заказом на партию деталей внешнему поставщику, либо с выпуском партии деталей Политика организации производства или подачи заказов в этой ситуации должна быть такой, чтобы общие издержки были минимальными.

В любой системе управления запасами уровень последних изменяется в соответствии с циклической моделью. Процесс снижения уровня запасов определяется соответствующей моделью спроса. В некоторой точке для по-

полнения запаса будет сделан новый заказ. По прошествии некоторого времени, называемого временем поставки, заказ будет получен, и уровень запасов возрастает. После этого начинается новый цикл запасов.

8.2.1 Система предпосылок основной модели управления запасами

Для упрощения процесса моделирования в модель вводится ряд предпосылок:

1. Спрос на продукцию является постоянным, или приблизительно постоянным. Если коэффициент использования запасов является постоянным, то уровень запасов также будет уменьшаться с постоянным коэффициентом.

2. Предполагается, что время поставки известно и является постоянной величиной. Это означает, что заказ можно осуществлять в точке с определенными значениями временного параметра и размера запаса (уровень повторного заказа), которые обеспечивают получение заказа в тот момент, когда уровень запасов равен нулю.

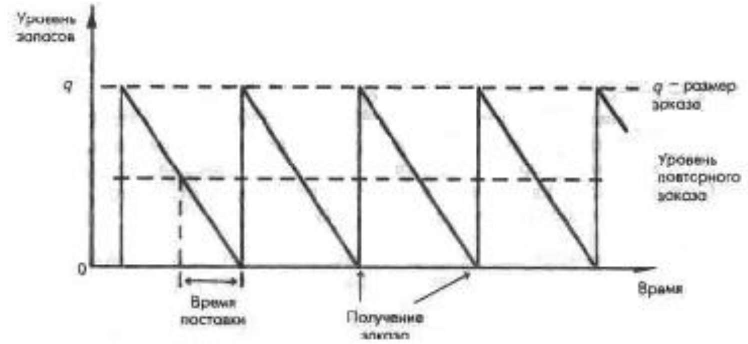


Схема управления запасами для основной модели

3. Отсутствие запасов является недопустимым.

4. В течение каждого цикла запасов делается заказ на постоянное количество продукции (q). Окончательный вид модели управления запасами является следующим:

Все циклы запасов являются одинаковыми. Максимальное количество продукции, которая находится в запасе, совпадает с размером заказа q.

8.2.2 Издержки хранения запасов

Если у внешнего поставщика заказывается партия продукции, процессы подачи и поставки заказа повлекут за собой определенного рода затраты. Необходимо создать соответствующие условия по хранению и управлению запасами. Поэтому в данной области также возникают определенные издержки. В отдельных случаях может возникнуть необходимость и в иных затратах, таких, например, как издержки вследствие нехватки запасов или хранения резервного запаса. Эти понятия будут введены нами по ходу изложения материала. Здесь мы рассмотрим только понятия стоимости подачи заказа, издержек хранения, или складирования, запасов, а также стоимости покупки продукции.

Если говорить о выпуске продукции в форме производственных партий, а не о покупке продукции извне, возникают аналогичные издержки. В данном случае стоимость подачи заказа эквивалентна стоимости организации технологического процесса по выпуску партии продукции, а стоимость покупки - издержкам производства продукции. Поэтому схема анализа останется неизменной. Каждый вид стоимости или издержек включает в себя постоянную и переменную компоненты. С точки зрения анализа основной модели управления запасами нас интересует только переменная ее часть. На этом этапе возникает необходимость введения в модель новой предпосылки: переменные издержки подачи заказа, или организации процесса выпуска партии продукции, известны, являются постоянными и не зависят от размера заказа.

8.2.3 Уравнение общей стоимости

Необходимо построить модель, которая описывает издержки, связанные с наличием запасов, за весь период их хранения. Длительность этого периода значения не имеет: это может быть один день, месяц, год и т.д. В данном случае мы выберем период, равный одному году. Введем следующую систему обозначений:

D - ежегодный спрос на запас продукции;

C_0 - переменная стоимость подачи одного заказа, у.е./ 1 заказ;

C_h - переменная стоимость хранения единицы продукции в запасе, у.е. на единицу продукции в год;

C - цена покупки единицы продукции в запасе, у.е. в год;

q - объем заказа, единиц продукции/заказ.

Общая стоимость запасов в год = Общая стоимость подачи заказа в год + Общая стоимость хранения запасов в год.

Рассмотрим каждую из составляющих данного уравнения в отдельности.

ЕЖЕГОДНАЯ СТОИМОСТЬ ПОДАЧИ ЗАКАЗА

Если потребность в продукции составляет D единиц в год, а каждый заказ подается на партию в q единиц, тогда ежегодное количество заказов составит (D/q).

Ежегодная стоимость подачи заказов = Стоимость подачи одного заказа × Число заказов, подаваемых ежегодно = $C_o \times (D/q)$ (у.е. в год).

ЕЖЕГОДНАЯ СТОИМОСТЬ ХРАНЕНИЯ ЗАПАСОВ

При расчете этой стоимости обычно исходят из среднего количества продукции, которая составляет запас в течение одного цикла. В простейшей ситуации, которую мы рассматриваем, уровень запасов изменяется линейно и принадлежит промежутку от q до нуля, следовательно, средний уровень запасов равен (q/2). В более сложных ситуациях для расчета среднего уровня запасов используются более сложные математические методы.

Стоимость хранения единицы продукции C_h определяется либо как фиксированная величина на весь год, либо как процент от общей стоимости единицы продукции за год. В различных компаниях применяются самые разнообразные методы расчета издержек в этой сфере, однако в целом C_h характеризует величину процентов с денежных ссуд, замороженных в форме запасов, стоимость повреждения или сохранности запасов, а также определенную часть общей стоимости системы хранения запасов.

Ежегодная стоимость хранения запасов = Стоимость хранения единицы продукции в год × Средний размер запаса = $C_h \times (q/2)$ (у.е. в год).

Из этого следует, что общая стоимость запаса единицы продукции в год определяется следующим образом:

$TC = C_0\ (D/q) + Ch\ (q/2)$ (у.е. в год).

Данное уравнение называется уравнением общей стоимости основной модели управления запасами. Теперь мы должны определить значение q, при котором значение общей стоимости наименьшее.

8.2.4 Оптимальный размер заказа

Для определения оптимального значения q используем операцию дифференцирования следующим образом:

$$TC = C_o\ (D/q) + C_h\ (q/2),$$

ТС принимает минимальное значение, когда и $\frac{d^2TC}{dq^2} \rangle 0$

$$\frac{dTC}{dq} = -C_0 \frac{D}{q^2} + C_h \frac{1}{2} \text{ и } \frac{d^2TC}{dq^2} = -2C_0 \frac{D}{q^3} + 0 \rangle 0 \quad \text{если } q > 0$$

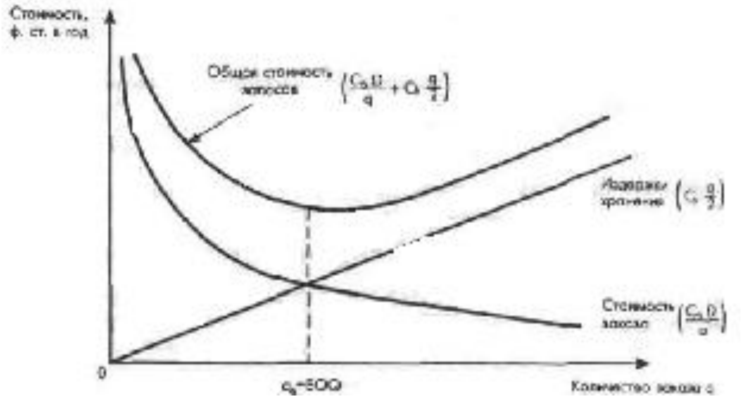
Положим $\frac{dTC}{dq} = 0$, тогда $-C_0 \frac{D}{q^2} + C_h \frac{1}{2} = 0$ следовательно

$$C_0 \frac{D}{q^2} = C_h \frac{1}{2}, \quad q^2 = \frac{2C_0D}{C_h}$$

$$q_0 = \pm\sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}}$$

Таким образом, ТС принимает минимальное значение. Полученный объем заказа называют **экономичным размером заказа**. Если в течение года с равными интервалами заказывать данное количество продукции, то стоимость хранения будет минимальной. В настоящее время стало уже традиционным непосредственное применение формулы модели EOQ, а не получение ее каждый раз из уравнения общей стоимости.

Полезно воспользоваться графическим представлением уравнения общей стоимости и его компонент. Издержки хранения пропорциональны размеру заказа, следовательно, их график представляет собой прямую, проходящую через начало координат. Стоимость подачи заказа пропорциональна величине 1/q. Ниже приводится графическое изображение указанных видов издержек и их суммы.



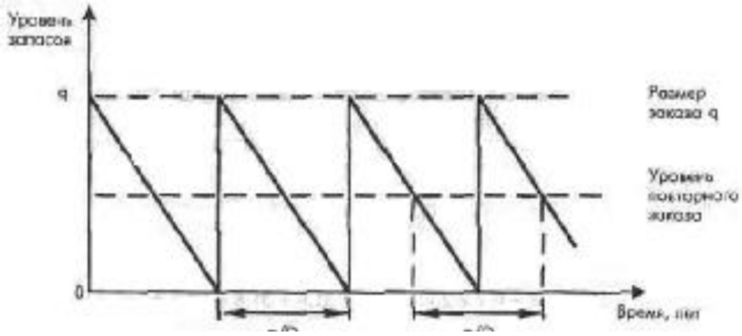
Графическое изображение стоимости подачи заказа, издержек хранения и общей стоимости запасов

Нетрудно заметить, что если размер заказа невелик, то стоимость подачи заказа является доминирующей - в этом случае заказы подаются часто, но на небольшое количество продукции. Если размер заказа является достаточно большим, основной компонентой становится стоимость хранения - делается небольшое число заказов, размер которьпс достаточно велик. Экстремальная точка на графике уравнения общей стоимости соответствует ситуации, когда оба вида издержек равны друг другу. Этот факт может оказаться полезным при проверке расчетов EOQ. Кроме того, можно отметить, что s критической точке кривая общей стоимости заметно выравнивается. Это означает, что в данной области общая стоимость не обладает высокой чувствительностью по отношению к изменениям в размере заказа. После того как получено значение EOQ, остается еще, как правило, несколько значений, поэтому можно выбрать необходимый размер заказа, не приводящий к значительному увеличению общей его стоимости.

8.2.5 Уровень и интервал повторного заказа

Итак, мы знаем, каким должен быть размер заказа, но нам по-прежнему неизвестно, когда следует осуществлять его подачу.

Если время поставки заказа от поставщика составляет L недель, то в течение поставки будет использоваться L x (D/52) единиц продукции, составляющей запас, в предположении, что в году 52 недели. Поскольку величина спроса постоянна, количество продукции, которое используется в течение поставки заказа, является одновременно и уровнем повторного заказа. Таким образом, новый заказ следует подавать, когда уровень запасов снижается до величины L x (D/52). В этом случае новый заказ будет получен в тот момент, когда уровень запасов станет равным нулю.



Уровень и интервал повторного заказа

В течение года потребуется D/q заказов с равными интервалами, следовательно, новый цикл заказа всегда начинается в точке

$$\frac{1\text{год}}{(D/q)\ \text{заказов}} = q/D \text{ лет.}$$

Так как все циклы заказов одинаковы, интервал повторного заказа также будет равен (q/D) лет.

Пример

Объем продажи некоторого магазина составляет 500 мешков цемента в год. Величина спроса равномерно распределяется в течение года. Цена покупки одного пакета равна 2 у.е. За один заказ владелец магазина должен заплатить 10 у.е. Время доставки заказа от поставщика составляет 12 рабочих дней (при 6-дневной рабочей неделе). По оценкам специалистов, издержки хранения составляют 20% среднегодовой стоимости запасов. Сколько пакетов должен заказывать владелец магазина каждый раз, если его цель состоит в минимизации общей стоимости запасов? Предположим, что магазин работает 300 дней в году, определим, с какой частотой следует осуществлять подачу заказов и уровень повторного заказа.

Решение.

Экономичный размер заказа равен:

$$q_0 = \pm\sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}}$$

где D = 500 пакетов в год;

C_0 = 10 у.е. за один заказ;

C_h = 20% в год от стоимости запаса размером в один мешок, или 0,2 x 2 у.е. в год за один мешок. Следовательно,

$$q_0 = \pm\sqrt{\frac{2\times10\times500}{0{,}2\times2}} = 158{,}11$$

Количество заказываемых мешков должно быть целым числом, поэтому выберем значение, равное 158 мешков. В дальнейшем мы можем попытаться определить размер заказа более точно. Минимальное значение общей стоимости заказа в год определяется по следующей формуле: $TC = C_o\,(D/q_0) + C_h\,(q_0/2)$

Следовательно, ТС = 10×(500/158)+0,2х2х(158/2)=63,2 у.е. в год.

Общая стоимость купленных владельцем магазина 500 мешков цемента в год составляет:

Стоимость запасов + *Стоимость покупки* = = 63,2 ф. ст.+ 2 ф. ст. х 500 = 1063,2 у.е. в год.

Таким образом, стоимость запасов составляет 6% общей стоимости покупки в год. Если бы владелец магазина подавал заказы на партии в 150 мешков, то величина общей стоимости запасов за год составила бы:

TC_{150} =10х500/150+0,2х2х150/2–33,33+30,0 = 63,33 у.е. в год.

По сравнению со стоимостью, соответствующей найденному значению EOQ, данное увеличение стоимости является небольшим и составляет 0,13 у.е в год.

Подачу нового заказа владелец магазина должен осуществлять каждый раз по истечении периода, равного 158/500. Поскольку в году 300 рабочих дней, интервал повторного заказа будет равен 158 х 300/500 = 95 рабочих дней.

Объем продажи мешков цемента за 12 дней поставки заказа составит:

(Спрос/Число дней) х Время поставки = (500/300) х 12 = 20 мешков.

Таким образом, подача нового заказа производится в тот момент, когда уровень запасов равен 20 мешкам.

8.3 АСПЕКТЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Большинство систем управления запасами, используемых на практике, включает в себя сотни и даже тысячи наименований продукции. Типичными примерами являются крупный универмаг или завод-изготовитель. Совершенно естественно, что в подобной ситуации различные виды продукции будут или должны использоваться по-разному. Поэтому целесообразно ограничить исследование теми товарами, которые обладают высокой годовой стоимостью, не принимая во внимание продукцию с низкой годовой стоимостью. Одним из способов практической реализации этого положения является составление списка всех видов продукции, представляющей собой запасы, в порядке убывания годовой стоимости ее продажи. Весьма вероятно, что в данном списке появится **эффект Парето,** т.е. около 20% товаров составят 80% общей стоимости. Именно этим 20% видов продукции следует уделить первоочередное внимание, поскольку, как ожидается, эти товары позволят получить наибольшую отдачу от исследований в области моделирования систем управления запасами. Внутри рассматриваемой группы товаров, имеющих высокую годовую стоимость, можно выделить различные виды продукции. Одни товары попадают в данную группу, поскольку они используются в достаточно больших количествах, другие - ввиду довольно высокой стоимости единицы продукции.

Например, при обслуживании авиалиний используется огромное количество топлива, один литр которого стоит всего несколько пенсов, однако годовой показатель стоимости топлива достаточно высок из-за большого объема его потребления. Кроме этого, имеются запасные двигатели, годовая стоимость которых также высока, поскольку каждый из двигателей является достаточно дорогим. И тот, и другой товар вероятнее всего окажутся в числе наименований продукции из списка, составляющих 20 % товаров с наиболее высокими показателями годовой стоимости, однако, способы моделирования задач управления запасами для каждого из указанных товаров будут различны.

Проблемы, связанные с наличием нескольких видов продукции, могут еще более осложняться при ограничении на складские мощности или финансовые ресурсы, отпущенные на создание запасов продукции. Практически любой магазин - это крупный склад. Наличие прилавков или свободной площади является лимитирующим фактором, строго определенным с точки зрения планировки каждого конкретного магазина. В этом случае администрация должна решить, какое пространство следует выделить для каждого вида продукции. Исследования по совершенствованию систем управления запасами и изучения спроса потребителя в крупных универмагах ведутся уже в течение многих лет. Например, полосные коды, автоматизированные контрольно-кассовые пункты, микрокалькуляторы - все это результаты усилий администрации магазинов по обеспечению наличия на своих местах необходимых товаров в определенные моменты времени. Мы рассматривали в основном модели, в которых минимизируется общая годовая переменная стоимость запасов, а между тем различные торговые предприятия чаще всего организуют работу своих магазинов таким образом, чтобы получать максимальную прибыль.

Большинство систем управления запасами включает в себя сразу несколько магазинов, например, центральный универмаг, осуществляющий поставки продукции в более мелкие, подчиненные ему магазины. В данной ситуации администрации приходится принимать решение о том, какие товары следует хранить и продавать только в центральном универмаге, какие

- только в мелких магазинах, а какие и в центральном, и в подчиненных ему магазинах. Кроме того, администрация центрального универмага должна решить, в каком объеме и с какой частотой следует заказывать каждый вид товаров. Необходимо сопоставить издержки хранения запасов на различных уровнях с административными и транспортными расходами, связанными с частой доставкой товаров от центрального универмага в подчиненные ему магазины. Математическую модель, описывающую подобного рода проблемы, можно построить только при условии принятия достаточно большего числа упрощающих предположений. Если система управления запасами является столь сложной, гораздо более полезными при ее моделировании могут оказаться не математические модели, рассмотренные в данной главе, а имитационные методы.

8.4 РЕЗЮМЕ

Простейшая модель управления запасами основывается на уравнении стоимости запасов для определенного периода времени:

TC = Стоимость подачи заказа + Издержки хранения (у.е. в единицу времени) = C_o (D/q) + C_h (q/2),

В данной модели предполагается полный контроль за всеми аспектами системы управления запасами. Экономичный размер заказа, которому соответствует минимальное значение TC, рассчитывается как: $q_0 = \pm\sqrt{\frac{2C_0 D}{C_h}}$

Существует множество способов модификации основной модели для применения ее в различных ситуациях. Включив в уравнение общую стоимость покупки, можно оценить влияние скидок на количество. Используя стоимость Cb, характеризующую затраты при нехватке единицы продукции на определенный момент времени, в модель можно ввести показатель плановой нехватки запасов. Нехватку можно исследовать либо с точки зрения потерянных заказов, либо с точки зрения удовлетворения заказов по мере получения новых поставок продукции.

Данная модель применима не только к описанию процесса получения заказов *I* внешнего поставщика, но и к описанию процесса серийного производства [редукции и создания запасов в рамках отдельного предприятия. В данном случае в качестве ЕОО выступает экономичный размер партии EBQ, а стоимость подачи заказа Со заменяется на стоимость организации производственного цикла Cs В некоторых случаях, после того как произведена партия продукции, часть ее остается на кладах, образуя тем самым запасы, а оставшаяся часть непосредственно используется производственном процессе. Основная модель управления запасами может быть адаптирована к данной ситуации. Введение в модель неопределенности (приближение ее к реальной действительности) усложняет процесс ее решения и исследования. При изучении неопределенности спроса и времени поставки заказа могут быть разработаны различные виды моделей, соответствующие различным целям создания систем управления запасами.

В уровневой системе повторного заказа определяется уровень запасов R, на котором производится заказ строго определенного количества продукции EOQ. В циклической системе повторного заказа определяется фиксированный интервал времени T, в течение которого при заказе различного количества продукции уровень запасов поднимается до величины M. В каждой из этих систем можно использовать один из двух критериев: либо достижение заранее заданного уровня обслуживания, либо минимизация общей стоимости подачи заказов, хранения и отсутствия (нехватки) запасов.

9 Использование корреляционно-регрессионного анализа для обработки экономических статистических данных

9.1 Введение

Обработка статистических данных уже давно применяется в самых разнообразных видах человеческой деятельности. Вообще говоря, трудно назвать ту сферу, в которой она бы не использовалась. Но, пожалуй, ни в одной области знаний и практической деятельности обработка статистических данных не играет такой исключительно большой роли, как в экономике, имеющей дело с обработкой и анализом огромных массивов информации о социально-экономических явлениях и процессах. Всесторонний и глубокий анализ этой информации, так называемых статистических данных, предполагает использование различных специальных методов, важное место среди которых занимает корреляционный и регрессионный анализы обработки статистических данных.

В экономических исследованиях часто решают задачу выявления факторов, определяющих уровень и динамику экономического процесса. Такая задача чаще всего решается методами корреляционного и регрессионного анализа. Для достоверного отображения объективно существующих в экономике процессов необходимо выявить существенные взаимосвязи и не только выявить, но и дать им количественную оценку. Этот подход требует вскрытия причинных зависимостей. Под причинной зависимостью понимается такая связь между процессами, когда изменение одного из них является следствием изменения другого.

Основными задачами корреляционного анализа являются оценка силы связи и проверка статистических гипотез о наличии и силе корреляционной связи. Не все факторы, влияющие на экономические процессы, являются случайными величинами, поэтому при анализе экономических явлений обычно рассматриваются связи между случайными и неслучайными величинами. Такие связи называются регрессионными, а метод математической статистики, их изучающий, называется регрессионным анализом.

Использование возможностей современной вычислительной техники, оснащенной пакетами программ машинной обработки статистической информации на ЭВМ, делает практически осуществимым оперативное решение задач изучения взаимосвязи показателей биржевых ставок методами корреляционно-регрессионного анализа.

При машинной обработке исходной информации на ЭВМ, оснащенных пакетами стандартных программ ведения анализов, вычисление параметров применяемых математических функций является быстро выполняемой счетной операцией.

Данная работа посвящена изучению возможности обработки статистических данных биржевых ставок методами корреляционного и регрессионного анализа с использованием пакета прикладных программ Microsoft Excel.

9.2 Роль корреляцонно-регрессионного анализа в обработке экономических данных

Корреляционный анализ и регрессионный анализ являются смежными разделами математической статистики, и предназначаются для изучения по выборочным данным статистической зависимости ряда величин; некоторые из которых являются случайными. При статистической зависимости величины не связаны функционально, но как случайные величины заданы совместным распределением вероятностей. Исследование взаимосвязи случайных величин биржевых ставок приводит к теории корреляции, как разделу теории вероятностей и корреляционному анализу, как разделу математической статистики. Исследование зависимости случайных величин приводит к моделям регрессии и регрессионному анализу на базе выборочных данных. Теория вероятностей и математическая статистика представляют лишь инструмент для изучения статистической зависимости, но не ставят своей целью установление причинной связи. Представления и гипотезы о причинной связи должны быть привнесены из некоторой другой теории, которая позволяет содержательно объяснить изучаемое явление.

Формально корреляционная модель взаимосвязи системы случайных величин $X' = (X_1, X_2, ..., X_k)$ может быть представлена в следующем виде: $X = f(X, Z)$, где Z – набор случайных величин, оказывающих влияние на изучаемые случайные величины.

Экономические данные почти всегда представлены в виде таблиц. Числовые данные, содержащиеся в таблицах, обычно имеют между собой явные (известные) или неявные (скрытые) связи.

Явно связаны показатели, которые получены методами прямого счета, т. е. вычислены по заранее известным формулам. Например, проценты выполнения плана, уровни, удельные веса, отклонения в сумме, отклонения в процентах, темпы роста, темпы прироста, индексы и т. д.

Связи же второго типа (неявные) заранее неизвестны. Однако необходимо уметь объяснять и предсказывать (прогнозировать) сложные явления для того, чтобы управлять ими. Поэтому специалисты с помощью наблюдений стремятся выявить скрытые зависимости и выразить их в виде формул, т. е. математически смоделировать явления или процессы. Одну из таких возможностей предоставляет корреляционно-регрессионный анализ.

Математические модели строятся и используются для трех обобщенных целей:

- для объяснения;
- для предсказания;
- для управления.

Представление экономических и других данных в электронных таблицах в наши дни стало простым и естественным. Оснащение же электронных таблиц средствами корреляционно-регрессионного анализа способствует тому, что из группы сложных, глубоко научных и потому редко используемых, почти экзотических методов, корреляционно-регрессионный анализ превращается для специалиста в повседневный, эффективный и оперативный аналитический инструмент. Однако, в силу его сложности, освоение его требует значительно больших знаний и усилий, чем освоение простых электронных таблиц.

Пользуясь методами корреляционно-регрессионного анализа, аналитики измеряют тесноту связей показателей с помощью коэффициента корреляции. При этом обнаруживаются связи, различные по силе (сильные, слабые, умеренные и др.) и различные по направлению (прямые, обратные). Если связи окажутся существенными, то целесообразно будет найти их математическое выражение в виде регрессионной модели и оценить статистическую значимость модели. В экономике значимое уравнение используется, как правило, для прогнозирования изучаемого явления или показателя.

Регрессионный анализ называют основным методом современной математической статистики для выявления неявных и завуалированных связей между данными наблюдений. Электронные таблицы делают такой анализ легко доступным. Таким образом, регрессионные вычисления и подбор хороших уравнений - это ценный, универсальный исследовательский инструмент в самых разнообразных отраслях деловой и научной деятельности (маркетинг, торговля, медицина и т. д.). Усвоив технологию использования этого инструмента, можно применять его по мере необходимости, получая знание о скрытых связях, улучшая аналитическую поддержку принятия решений и повышая их обоснованность.

Корреляционно-регрессионный анализ считается одним из главных методов в маркетинге, наряду с оптимизационными расчетами, а также математическим и графическим моделированием трендов (тенденций). Широко применяются как однофакторные, так и множественные регрессионные модели.

9.3 Корреляционно-регрессионный анализ и его возможности

Корреляционный анализ является одним из методов статистического анализа взаимосвязи нескольких признаков.

Он определяется как метод, применяемый тогда, когда данные наблюдения можно считать случайными и выбранными из генеральной совокупности, распределенной по многомерному нормальному закону. Основная задача корреляционного анализа (являющаяся основной и в регрессионном анализе) состоит в оценке уравнения регрессии.

Корреляция – это статистическая зависимость между случайными величинами, не имеющими строго функционального характера, при которой изменение одной из случайных величин приводит к изменению математического ожидания другой.

1. Парная корреляция – связь между двумя признаками (результативным и факторным или двумя факторными).
2. Частная корреляция – зависимость между результативным и одним факторным признаками при фиксированном значении других факторных признаков.
3. Множественная корреляция – зависимость результативного и двух или более факторных признаков, включенных в исследование.

Корреляционный анализ имеет своей задачей количественное определение тесноты связи между двумя признаками (при парной связи) и между результативным признаком и множеством факторных признаков (при многофакторной связи).

Теснота связи количественно выражается величиной коэффициентов корреляции. Коэффициенты корреляции, представляя количественную характеристику тесноты связи между признаками, дают возможность определить “полезность” факторных признаков при построении уравнений множественной регрессии. Величина коэффициентов корреляции служит также оценкой соответствия уравнению регрессии выявленным причинно-следственным связям.

Первоначально исследования корреляции проводились в биологии, а позднее распространились и на другие области, в том числе на социально-экономическую. Одновременно с корреляцией начала использоваться и регрессия. Корреляция и регрессия тесно связаны между собой: первая оценивает силу (тесноту) статистической связи, вторая исследует ее форму. И корреляция, и регрессия служат для установления соотношений между явлениями и для определения наличия или отсутствия связи между ними.

9.4 Предпосылки корреляционного и регрессионного анализа

Перед рассмотрением предпосылок корреляционного и регрессионного анализа, следует сказать, что общим условием, позволяющим получить более стабильные результаты при построении корреляционных и регрессионных моделей биржевых ставок, является требование однородности исходной информации. Эта информация должна быть обработана на предмет аномальных, т.е. резко выделяющихся из массива данных, наблюдений. Эта процедура выполняется за счет количественной оценки однородности совокупности по какому-либо одномерному или многомерному критерию (в зависимости от исходной информации) и имеет цель тех объектов наблюдения, у которых наилучшее (или наихудшее) условия функционирования по не зависящим или слабо зависящим причинам.

После обработки данных на предмет “аномальности” следует провести проверку, насколько оставшаяся информация удовлетворяет предпосылкам для использования статического аппарата при построении моделей, так как даже незначительные отступления от этих предпосылок часто сводят к нулю получаемый эффект. Следует иметь ввиду, что вероятностное или статистическое решение любой экономической задачи должно основываться на подробном осмыслении исходных математических понятий и предпосылок, корректности и объективности сбора исходной информации, в постоянном сочетании с теснотой связи экономического и математико-статистического анализа.

Для применения корреляционного анализа необходимо, чтобы все рассматриваемые переменные были случайными и имели нормальный закон распределения. Причем выполнение этих условий необходимо только при вероятностной оценке выявленной тесноты связи.

Рассмотрим простейшие случай выявления тесноты связи – двумерную модель корреляционного анализа.

Для характеристики тесноты связи между двумя переменными обычно пользуются парным коэффициентом корреляции ρ, если рассматривать генеральную совокупность, или его оценкой – выборочным парным коэффициентом r, если изучается выборочная совокупность. Парный коэффициент корреляции в случае линейной формы связи вычисляют по формуле

$$\rho = \frac{M\left[X - M(X)\right]\left[Y - M(Y)\right]}{\sigma_X \sigma_Y},$$

а его выборочное значение – по формуле $r = \dfrac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{S_X S_Y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{nS_X S_Y}$

При малом числе наблюдений выборочный коэффициент корреляции удобно вычислять по следующей формуле:

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} Y^2{}_i - \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2\right]}}$$

Величина коэффициента корреляции изменяется в интервале $-1 \le r \le 1$.

При $r = -1$ между двумя переменными существует функциональная связь, при $r = 1$ - прямая функциональная связь. Если $r = 0$, то значение X и У в выборке некоррелированы; в случае, если система случайных величин (XY) имеет двумерное нормальное распределение, то величины X и У будут и независимыми.

Если коэффициент корреляции находится в интервале $-1 \le r \le 0$, то между величинами X и У существует обратная корреляционная связь. Это находит подтверждение и при визуальном анализе исходной информации. В этом случае отклонение величины У от среднего значения взяты с обратным знаком.

Если каждая пара значений величин X и У чаще всего одновременно оказывается выше (ниже) соответствующих средних значений, то между величинами существует прямая корреляционная связь и коэффициент корреляции находится в интервале $0 \le r \le 1$.

Если же отклонение величины X от среднего значения одинаково часто вызывают отклонения величины У вниз от среднего значения и при этом отклонения оказываются все время различными, то можно предполагать, что значение коэффициента корреляции стремится к нулю.

Следует отметить, что значение коэффициента корреляции не зависит от единиц измерения и выбора начала отсчета. Это означает, что если переменные X и У уменьшить (увеличить) в К раз либо на одно и то же число С, то коэффициент корреляции не изменится.

9.5 **Пакет анализа** Microsoft Excel

В состав Microsoft Excel входит набор средств анализа данных (так называемый пакет анализа), предназначенный для решения сложных статистических и инженерных задач. Для проведения анализа данных с помощью этих инструментов следует указать входные данные и выбрать параметры; анализ будет проведен с помощью подходящей статистической или инженерной макрофункции, а результат будет помещен в выходной диапазон. Другие средства позволяют представить результаты анализа в графическом виде.

Графические изображения используются прежде всего для наглядного представления статистических данных, благодаря им существенно облегчается их восприятие и понимание. Существенна их роль и тогда, когда речь идет о контроле полноты и достоверности исходного статистического материала, используемого для обработки и анализа.

Статистические данные приводятся в виде длинных и сложных статистических таблиц (см., например, табл.1), поэтому бывает весьма трудно обнаружить в них имеющиеся неточности и ошибки.

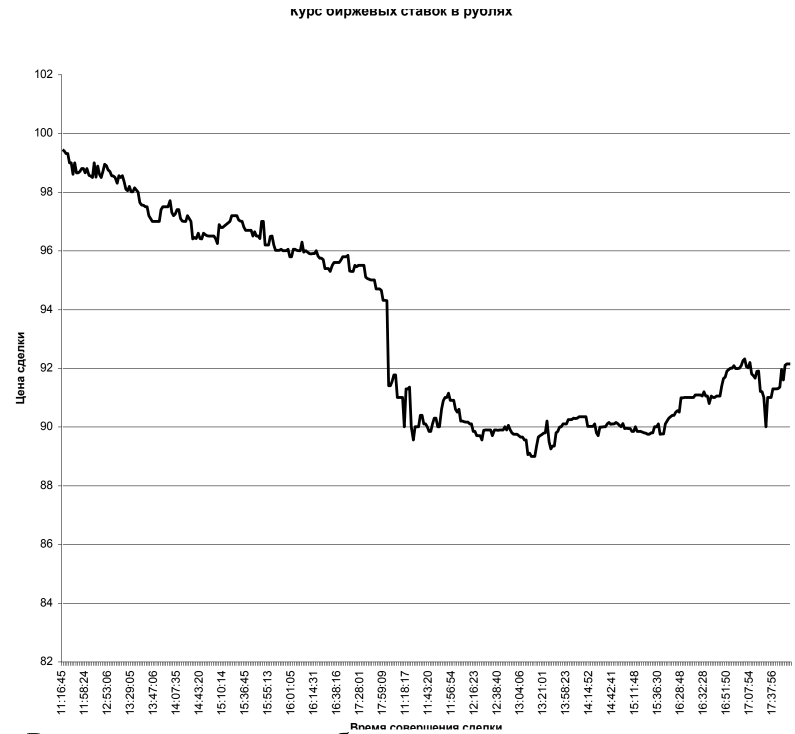
Графическое же представление статистических данных помогает легко и быстро выявить ничем не оправданные пики и впадины, явно не соответствующие изображаемым статистическим данным, аномалии и отклонения. На графике, построенном по данным таблицы 1, наглядно показано распределение курса биржевых ставок в зависимости от времени совершения сделки и цены сделки в рублях.

Графическое представление статистических данных является не только средством иллюстрации статистических данных и контроля их правильности и достоверности. Благодаря своим свойствам оно является важным средством толкования и анализа статистических данных, а в некоторых случаях - единственным и незаменимым способом их обобщения и познания. В частности, оно незаменимо при одновременном изучении нескольких взаимосвязанных экономических явлений, так как позволяет с первого взгляда установить существующие между ними соотношения и связи, различие и подобие, а также выявить особенности их изменений во времени.

Однако, чтобы эффективнее использовать графические изображения статистических данных, необходимо овладеть методикой и техникой их построения. К этому следует добавить, что построенное графическое изображение статистических данных биржевых ставок в наибольшей степени соответствует характеру и содержанию изображаемых данных и поставленной задаче их анализа.

Таблица 1. Выборка биржевых ставок относительно времени совершения сделки и цены сделки в рублях за один день работы биржи

Время	Цена сделки в рублях
11:16:45	99,45
11:21:53	99,4
11:23:09	99,31
11:23:37	99,31
11:24:49	99
11:24:57	99
11:48:40	98,61
11:49:45	98,99
11:53:51	98,66
11:55:05	98,65
11:55:24	98,7
11:58:18	98,8
11:58:18	98,8
11:58:24	98,65
11:58:35	98,8



Распределение курса биржевых ставок в зависимости от времени совершения сделки и цены сделки в рублях.

Корреляция - один из инструментов пакета анализа Microsoft Excel. Используется для количественной оценки взаимосвязи двух наборов данных, представленных в безразмерном виде. Коэффициент корреляции выборки представляет собой ковариацию двух наборов данных, деленную на произведение их стандартных отклонений.

Корреляционный анализ дает возможность установить ассоциированы ли наборы данных по величине, то есть: большие значения из одного набора данных связаны с большими значениями другого набора (положительная корреляция); или, наоборот, малые значения одного набора связаны с большими значениями другого (отрицательная корреляция); или данные двух диапазонов никак не связаны (корреляция близка к нулю).

Регрессия также является инструментом пакета анализа данных Microsoft Excel.. Линейный регрессионный анализ заключается в подборе графика для набора наблюдений с помощью метода наименьших квадратов. Регрессия используется для анализа воздействия на отдельную зависимую переменную значений одной или более независимых переменных. Например, на курс биржевых ставок влияют несколько факторов, включая такие, как время совершения сделки и ее цена. Регрессия пропорционально распределяет меру качества по этим двум факторам на основе данных функционирования курса биржевых ставок. Результаты регрессии могут быть использованы для предсказания качеств новых, не совершенных еще биржевых сделок. Например, используя результаты таблицы 1, можно с помощью регрессии предсказать цены следующих сделок.

Табл.2. Предсказанная цена сделки в рублях

Наблюдение	Предсказанная цена сделки в рублях	Остатки
1	72,22015	27,22985
2	72,76796	26,63204
3	72,90313	26,40687
4	72,95293	26,35707
5	73,08099	25,91901
6	73,09522	25,90478
7	75,62617	22,98383
8	75,74178	23,24822
9	76,17932	22,48068
10	76,31094	22,33906
11	76,34473	22,35527
12	76,65421	22,14579
13	76,65421	22,14579
14	76,66488	21,98512
15	76,68444	22,11556

9.6 Заключение

Наиболее сложным этапом, завершающим регрессионный анализ, является интерпретация полученных результатов, т.е. перевод их с языка статистики и математики на язык экономики.

Интерпретация моделей регрессии осуществляется методами той отрасли знаний, к которой относятся исследуемые явления. Всякая интерпретация начинается со статистической оценки уравнения регрессии в целом и оценки значимости входящих в модель факторных признаков, т.е. с изучения, как они влияют на величину результативного признака. Чем больше величина коэффициента регрессии, тем значительнее влияние данного признака на моделируемую обработку биржевых ставок. Особое значение при этом имеет знак перед коэффициентом регрессии. Знаки коэффициентов регрессии говорят о характере влияния на результативный признак статистической обработки биржевых ставок. Если факторный признак имеет плюс, то с увеличением данного фактора результативный признак возрастает; если факторный признак со знаком минус, то с его увеличением результативный признак уменьшается. Интерпретация этих знаков полностью определяется социально-экономическим содержанием моделируемого признака. Если его величина изменяется в сторону увеличения, то плюсовые знаки факторных признаков имеют положительное влияние. При изменении результативного признака в сторону снижения положительные значения имеют минусовые знаки факторных признаков. Если экономическая теория подсказывает, что факторный признак должен иметь положительное значение, а он со знаком минус, то необходимо проверить расчеты параметров уравнения регрессии.

Корреляционный и регрессионный анализ позволяет определить зависимость между факторами, а так же проследить влияние задействованных факторов. Эти показатели имеют широкое применение в обработке статистических данных для достижения наилучших показателей биржевых ставок.

Пример *Множественная линейная регрессия*

Предположим, что застройщик оценивает стоимость группы небольших офисных зданий в традиционном деловом районе.

Застройщик может использовать множественный регрессионный анализ для оценки цены офисного здания в заданном районе на основе следующих переменных.

Переменная	Смысл переменной
y	Оценочная цена здания под офис
x1	Общая площадь в квадратных метрах
x2	Количество офисов
x3	Количество входов
x4	Время эксплуатации здания в годах

В этом примере предполагается, что существует линейная зависимость между каждой независимой переменной (x1, x2, x3 и x4) и зависимой переменной (y), то есть ценой здания под офис в данном районе.

Застройщик наугад выбирает 11 зданий из имеющихся 1500 и получает следующие данные. "Пол-входа" (1/2) означает вход только для доставки корреспонденции.

	A	B	C	D	E
1	**Общая площадь (x1)**	**Количество офисов (x2)**	**Количество входов (x3)**	**Время эксплуатации (x4)**	**Оценочная цена (y)**
2	2310	2	2	20	142 000
3	2333	2	2	12	144 000
4	2356	3	1,5	33	151 000
5	2379	3	2	43	150 000
6	2402	2	3	53	139 000
7	2425	4	2	23	169 000
8	2448	2	1,5	99	126 000
9	2471	2	2	34	142 900
10	2494	3	3	23	163 000
11	2517	4	4	55	169 000
12	2540	2	3	22	149 000

Примечание. Для проведения расчетов в Exel используется меню Сервис>Анализ данных>Регрессия. Получаем:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ВЫВОД ИТОГОВ								
2									
3	*Регрессионная статистика*								
4	Множественный R	0,99837							
5	R-квадрат	0,99675							
6	Нормированный R-квадрат	0,99458							
7	Стандартная ошибка	970,57846							
8	Наблюдения	11							
9									
10	Дисперсионный анализ								
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*			
12	Регрессия	4	1732393319,23	433098329,81	459,75	0,00000014			
13	Остаток	6	5652135,32	942022,55					
14	Итого	10	1738045454,55						
15									
16		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние 95,0%*	*Верхние 95,0%*
17	Y-пересечение	52317,83051	12237,36160	4,27525	0,00523	22374,06348	82261,59754	22374,06348	82261,59754
18	Переменная X 1	27,64139	5,42937	5,09108	0,00224	14,35618	40,92660	14,35618	40,92660
19	Переменная X 2	12529,76817	400,06684	31,31919	0,00000	11550,83916	13508,69717	11550,83916	13508,69717
20	Переменная X 3	2553,21066	530,66915	4,81130	0,00297	1254,70907	3851,71225	1254,70907	3851,71225
21	Переменная X 4	-234,23716	13,26801	-17,65428	0,00000	-266,70284	-201,77149	-266,70284	-201,77149

Теперь может быть получено уравнение множественной регрессии

$$y = m1*x1 + m2*x2 + m3*x3 + m4*x4 + b$$

подставив коэффициенты получаем

$$y = 27,64*x1 + 12530*x2 + 2553*x3- 234,24*x4 + 52318$$

Теперь застройщик может определить оценочную стоимость здания под офис в том же районе, которое имеет площадь 2500 квадратных метров, три офиса, два входа, зданию 25 лет, используя следующее уравнение:

$$y = 27,64*2500 + 12530*3 + 2553*2 - 234,24*25 + 52318 = 158\ 261 \text{ р.}$$

Пример Использование статистик F и R2

В предыдущем примере коэффициент детерминированности r2 равен 0,99675, что указывает на сильную зависимость между независимыми переменными и продажной ценой. Можно использовать F-статистику, чтобы определить, является ли этот результат (с таким высоким значение r2) случайным.

Предположим, что на самом деле нет взаимосвязи между переменными, просто статистический анализ вывел сильную взаимозависимость по взятой равномерной выборке 11 зданий. Величина Альфа используется для обозначения вероятности ошибочного вывода о том, что имеется сильная взаимозависимость.

Если F-наблюдаемое больше, чем F-критическое, то взаимосвязь между переменными имеется. F-критическое можно получить из таблицы F-критических значений в любом справочнике по математической статистике. Для того, чтобы найти это значение, используя односторонний тест, положим величину Альфа равной 0,05, а для числа степеней свободы (обозначаемых обычно v1 и v2), положим v1 = k = 4 и v2 = n - (k + 1) = 11 - (4 + 1) = 6, где k

- это число переменных, а n - число точек данных. Из таблицы справочника F-критическое равно 4,53.

F-наблюдаемое равно 459,753674, что заметно больше чем F-критическое (4,53). Следовательно, полученное регрессионное уравнение полезно для предсказания оценочной стоимости зданий в данном районе.

Пример Вычисление T-статистики

Другой гипотетический эксперимент определит, полезен ли каждый коэффициент наклона для оценки стоимости здания под офис в примере. Ниже приводятся наблюдаемые t-значения для каждой из независимых переменных:

Переменная	**t-наблюдаемое значение**
Общая площадь	5,1
Количество офисов	31,3
Количество входов	4,8
Возраст	17,7

Все эти значения имеют абсолютную величину большую, чем 1,94; следовательно, все переменные, использованные в уравнении регрессии, полезны для предсказания оценочной стоимости здания под офис в данном районе.

10 Закон Парето (закон 80/20).

Чтобы преуспеть, выкладываться полностью вовсе не обязательно, 20% людей зарабатывают 80% всех денег, 20% товаров или клиентов определяют 80% доходов компании. Это закон, который доказывается практикой. Несмотря на то, что необъяснимая «несправедливость» в распределении затрат и результатов оказывает влияние - иногда драматическое - на повседневную жизнь каждого человека и на жизнь крупных корпораций, этой теме редко уделялось особое внимание. Понимание принципа «меньших затрат» может научить нас достигать большего, затрачивая меньше усилий и средств.

Закон 80/20 может и должен использоваться каждым умным человеком, каждой организацией, каждой социальной группой и формой общества в повседневной жизни. Понимание этого принципа позволяет достигать большего при меньшем усилии. Закон 80/20 помогает повысить продуктивность труда человека и его удовлетворенность жизнью. Он может во много раз увеличить прибыли корпораций и *эффективность* любой организации. Закон 80/20 дает ответ на вопрос, как, сокращая затраты, повысить качество и количество услуг.

Что такое закон 80/20?

Закон 80/20 утверждает: меньшая часть усилий, затрат, вложений и причин ведет к большей части результатов, прибыли и вознаграждений. На практике это означает, что, например, 80% полученных вами результатов достигнуто в течение 20% времени, потраченного на выполнение данной работы. Таким образом, 4/5 всех усилий (основная их часть) оказываются маловажными. Такой вывод является диаметрально противоположным общепринятому мнению, что, чем больше вы прилагаете усилий, тем больших результатов вы достигаете.

Закон утверждает, что существует изначальный дисбаланс между затратами и результатами, вложениями и отдачей и так далее. Согласно закону 80% результатов зависит от 20% затрат, 80% прибыли определяется 20% вложений...

В бизнесе можно найти множество примеров, подтверждающих реальность этого правила. Обычно 20% товаров (и 20% покупателей) обеспечивает 80% денежной прибыли от продаж; 20% товаров или клиентов также определяет 80% доходов организации.

В обществе 20% преступников совершают 80% всех преступлений; 20% автомобилистов приводят к 80% происшествий на дороге; 20% людей, вступающих в брак, ответственны за 80% разводов; люди носят 20% имеющейся у них одежды в течение 80% времени.

Отсутствие равномерного распределения

Принцип, лежащий в основе закона 80/20, был открыт более 100 лет назад в 1897 г. итальянским экономистом Вильфредо Парето (Vilfredo Pareto, 1848-1923 гг.). С тех пор это открытие фигурировало под разными названиями: «принцип Парето», «закон Парето», «правило 80/20» и так далее. Несмотря на то, что многие видные люди, добившиеся успеха, в том числе в бизнесе, области компьютерных технологий, инженерии, и не подозревали о действии закона 80/20, он во многом способствовал формированию современного мира. До сих пор большинство людей в лучшем случае имеют только интуитивное, смутное представление об изначальном дисбалансе усилий и результатов. Даже немногие обладатели «ноу-хау», которые знают и применяют этот закон, используют лишь малую часть его потенциала.

Какое же открытие совершил Вильфредо Парето? В свое время он изучал закономерности накопления материальных благ в Англии XIX в. В ходе своих исследований он обнаружил, что доходы и богатство получает меньшая часть людей. Этим трудно кого-нибудь удивить. Однако он также выявил два факта, которые показались ему весьма существенными. Первый заключался в том, что существовала последовательная математическая зависимость между процентом людей (процент от общего числа населения) и размером прибыли или богатства, которая эта группа получает. Это означает, что, если 20% населения получают 80% материальных благ, можно достаточно точно предсказать, что 10% населения получают 65% богатства и 5% населения - 50% богатства. Ключевым моментом в этом положении является то, что распределение богатства среди населения является предсказуемо неравномерным.

Другое открытие Парето заключалось в том, что модель этого неравномерного распределения постоянно повторяется, к какой бы информации, посвященной разным периодам времени и разным странам, он ни обращался. Когда он исследовал развитие Англии в разные эпохи, когда обращался к данным по другим странам, он всегда замечал закономерность повторения одной и той же модели с математической точностью.

Было ли это случайным совпадением или фактом, имеющим огромнейшее значение для экономики и общества? Стала бы работать эта модель, если ее применять не только в отношении богатства и доходов, но и в других сферах? Парето был настоящим новатором, так как до него никто не рассматривал два связанных между собой блока данных - в данном случае распределения доходов или богатства, с одной стороны, и числа получателей прибыли и владельцев собственности, с другой - и сравнительное процентное соотношение между двумя блоками данных. (В настоящее время этот способ широко распространен, он привел в свое время к основным крупным прорывам в бизнесе и экономике.)

К сожалению, хотя Парето осознавал важность и широкий спектр применения собственного открытия, ему с трудом удавалось объяснить смысл этого закона. Парето развил несколько интересных, но сумбурных и непоследовательных социологических теорий которые концентрировались на решающей роле элиты и которыми впоследствии стали активно злоупотреблять Муссолини и его приверженцы. Важность закона 80/20 оставалась скрытой для целого поколения. Хотя некоторые экономисты, особенно в США, осознавали значимость закона, только после Второй мировой войны несколько ученых занялись его изучением и сумели привлечь к нему внимание предпринимателей.

Правило «о решающем меньшинстве»

Одним из пионеров использования закона 80/20 был американский инженер Джозеф Мозес Джуран (Joseph Moses Juran, р. в 1904 г.) - человек, стоящий за «революцией качества» 1950-1990 гг. В поисках путей обеспечения высокого качества продукции он пришел к тому, что принцип Парето, как он его называл, и «правило решающего меньшинства» стали синонимами стремления к высокому качеству продукции.

В 1924 г. Джуран поступил на работу в Western Electric (производственное отделение Bell Telephone System) в качестве корпоративного инженера. Впоследствии он стал одним из первых в мире консультантов по качеству.

Его заветной мечтой было использовать принцип Парето вместе с другими статистическими методами, чтобы искоренить возникновение изъянов в качестве продукции и улучшить надежность и ценность промышленных товаров. Его новаторская книга «Пособие по контролю за качеством» (Quality Control Handbook), опубликованная в 1951 г., впервые трактовала закон 80/20 очень широко:

«Экономист Парето выяснил, что богатство распределяется неравномерно по такому же принципу, что и качество среди различных товаров. Можно найти множество других примеров - процентное распределение преступлений среди преступников, процент случаев со смертельным исходом в опасных для жизни ситуациях и так далее. Принцип Парето о неравномерном распределении применялся к распределению богатства и распределению потерь качества».

Ни один из крупных американских промышленников не заинтересовался теориями Джурана. В 1954 г. он был приглашен читать лекции в Японии, где его идеи были приняты с интересом. Он остался в стране, чтобы сотрудничать с несколькими японскими корпорациями с целью изменить ценность и качество их потребительских товаров. Только когда в 1970 г. США осознали угрозу растущего промышленного потенциала Японии, Запад стал серьезно относиться к идеям Джурана. Инженер вернулся в США, чтобы сделать для американских производителей то, что он сделал для японцев. В основе глобальной революции качества лежал закон 80/20.

От 1960-х к 1990-м

IBM была одной из первых и наиболее преуспевающих корпораций, начавших использовать закон 80/20. Большинство специалистов компьютерных систем, обучавшихся и начинавших работать в 60-70-х гг., были знакомы с этим принципом.

В 1963 г. инженеры IBM выяснили, что компьютер тратит около 80% своего времени на выполнение 20% всех заданных ему задач. Компания немедленно переписала свое программное обеспечение таким образом, чтобы сделать эти 20% наиболее часто используемых программ максимально доступными и удобными в применении. Так компьютеры IBM стали эффективнее и быстрее вычислительных машин конкурентов.

Те компании, которые в 1980-х гг. стали разрабатывать компьютеры и программное обеспечение нового поколения, а это прежде всего Apple, Lotus и Microsoft, применяли закон 80/20 с еще большим рвением, чтобы сделать свои машины более дешевыми и удобными в использовании для нового поколения покупателей. Графический интерфейс, то есть устройство экрана и других средств общения машины с пользователем, разработанный для компьютеров Macintosh, до сих пор считается наиболее доступным и «интуитивным».

Почему так важен закон 80/20

Причина важности закона 80/20 заключается в том, что он противоречит общепринятому мнению. Обычно люди считают, что все усилия приводят примерно к одинаковым результатам; что все покупатели одинаково значимы для производителя и продавца; что каждая единица продукции, каждая копейка из доходов с продаж обладает той же ценностью, что и любая другая копейка; что все сотрудники, работающие в данной области, имеют одинаковую ценность для компании; что каждый прожитый нами день, неделя или год имеют для нас одинаковую важность. Мы считаем, что все наши друзья примерно одинаково важны для нас. Наконец, мы считаем, что все проблемы имеют огромное количество причин, поэтому выделять несколько главных причин не стоит; что все возможности обладают для нас одинаковым потенциалом, поэтому мы и относимся к ним одинаково.

Мы склонны считать, что 50% затрат или вложений приведут к 50% результатов и отдач. Представление о том, что соотношение причин и последствий распределено равномерно, является вполне естественным и демократичным. Иногда это действительно случается - в виде исключения. Однако этот посыл о равномерном распределении (50/50) усилий и результатов является ошибочным и, пожалуй, самым опасным. Закон 80/20 утверждает, что, когда изучаются и анализируются два блока данных, относящихся к причинам и следствиям, наиболее вероятным результатом такого сравнения будет модель о неравномерном распределении. Оно может составлять пропорции 65/35, 70/30, 80/20, 95/5 или 99,9/0,1.

Когда люди узнают истинное соотношение между усилиями и результатами, они бывают поражены «несправедливостью природы». Каков бы ни был уровень дисбаланса, он обычно превышает наши ожидания. Например, менеджеры могут подозревать, что некоторые продукты и некоторые клиенты приносят больше прибыли, чем остальные, но когда они выясняют соотношение между этими некоторыми и остальными, цифры просто обескураживают их.

Почему стоит задуматься о законе 80/20?

Знаете вы о его существовании или нет, но этот принцип постоянно влияет на вашу жизнь - социальное положение, успехи, карьеру. Понимание действия принципа дисбаланса позволит вам лучше понять, что на самом деле происходит в мире вокруг вас.

Это не пустые знания. Использование закона 80/20 способно значительно улучшить нашу жизнь. Каждый человек может стать намного счастливее, каждая компания - более прибыльной... У каждого человека и каждого учреждения существует реальная возможность получить гораздо больше результатов и прибыли при вложении гораздо меньших средств, усилий, затрат.

В центре такого успешного роста лежит процесс замещения. Необходимо сокращать использование ресурсов, которые приводят к малым результатам. Ресурсы, приводящие к значительным результатам, должны применяться как можно чаще. Идеальное использование ресурсов - когда они применяются в той области, в которой из них можно извлечь максимальную пользу. Поэтому малоэффективные ресурсы надо направлять в те сферы, где они могли бы принести больше.

В бизнесе этот процесс успешно использовался на протяжении сотен лет. Французский экономист Жан-Батист Сэй (J.-B. Say) придумал слово «предприниматель» еще в 1800 г., говоря, что «предприниматель переводит экономические ресурсы из области малой эффективности в область большей эффективности». Несмотря на очевидность закона 80/20 в любой сфере бизнеса, удивительно, насколько далеки деловые предприятия от оптимальных решений. Например, закон 80/20 утверждает, что 20% продуктов, клиентов, сотрудников определяют 80% доходов. Если это так - исследования показывают, что такие модели неравномерного распределения действительно существуют, - положение дел в компаниях обстоит не лучшим образом. Получается, что 80% продуктов, клиентов и сотрудников определяют всего лишь 20% доходов. То есть большая часть ресурсов используется неэффективно, если не впустую. Большое количество неэффективных ресурсов тормозит работу небольшого количества эффективных ресурсов. Очевидно, что доходы компании резко увеличатся, если будет продаваться больше лучших продуктов, будет приниматься на работу больше высококвалифицированных сотрудников...

Напрашивается вопрос: зачем продолжать выпускать 80% товаров, которые приносят лишь 20% прибыли? Но компании редко задаются подобным вопросом. Видимо, потому, что ответ вынудит их принять слишком радикальные меры: прекратить выпускать 4/5 продукции.

Однако современные предприниматели не осознают, что лишь небольшая часть ресурсов ведет к большей прибыли, в то время как большинство затрат являются малоэффективными. Если бы мы могли видеть разницу между «решающим меньшинством» и «бесполезным большинством», мы могли бы в десятки раз увеличить те ценности, которые нам необходимы.

В Оксфорде студентам дается парадоксальный совет - поменьше ходить на лекции. «Книги можно читать намного быстрее, - говорят им - Но никогда не читай книгу от корки до корки, только ради удовольствия. Когда книга нужна тебе для работы, не читай ее полностью. Прочитай заключение, потом вступление, затем еще раз заключение. Пролистай ее в поисках мест, которые тебе действительно интересны, и читай только их». Смысл его слов сводился к тому, что самое ценное в каждом толстом томе можно извлечь, прочитав лишь небольшую ее часть, сэкономив при этом и время, и силы (скорее всего, 80% нужной информации находится в 20% объема книги).

В Оксфорде не существует системы оценки работы студентов в течение учебного года, все решают выпускные экзамены, которые сдаются в конце курса. Анализ экзаменационных работ многих лет показал, что на 80% (иногда даже 100%) экзаменационных вопросов можно дать правильные ответы, используя знание 20% или меньше предметов, которые охватывает экзамен. На экзаменаторов производят гораздо большее впечатление студенты, обладающие большим объемом знаний по небольшому числу вопросов, чем те, которые имеют разрозненные знания по многим вопросам. Такое наблюдение позволяет повысить эффективность учебы.

Важно, на кого вы работаете, а не что делаете

Например, 80% роста компаний приходится на фирмы, в которых работает менее 20% профессионалов этой области, 80% реальных возможностей сделать успешную карьеру существует только в 20% компаний. Талант при этом не имел никакого значения. Те немногие, кто действует по принципу 80/20 работают гораздо продуктивнее, чем другие, затрачивая при этом меньше усилий. Почему? Они поняли, что 80% прибыли поступает от 20% клиентов и что при работе с клиентами 80% результатов зависят от решения 20% наиболее важных вопросов. В результате такого подхода увеличивалась результативность работы при меньших затратах.

«Мышление 80/20» необходимо

Математический анализ ситуации с точки зрения 80/20 чрезвычайно полезен - он может дать реальную выгоду. Но большинство людей по природе своей не склонны к бухгалтерии. Самые важные решения редко принимаются на основе анализа. Чрезмерное увлечение анализом может застопорить работу компании. Поэтому, если мы хотим руководствоваться в нашей жизни законом Парето, необходимо прежде всего перестроить мышление в соответствии с принципом меньших затрат.

Итак, исходим из того, что соотношение между затратами и результатами неравномерно. Но вместо того чтобы собирать информацию и затем анализировать ее, мы должны оценить ее. Мышление 80/20 требует от нас и позволяет нам определить несколько по-настоящему важных вещей, которые происходят в бизнесе или жизни, и не обращать внимания на массу неважных деталей.

Чтобы перестроиться на «мышление 80/20», необходимо постоянно задаваться вопросом: что входит в те 20%, которые приводят к 80% результатам? Подходите к этому вопросу творчески. Какие вложения и усилия являются «решающим меньшинством», а какие - «бесполезным большинством » ?

«Мышление 80/20» используется, чтобы изменить собственные действия и сконцентрироваться на самых важных 20 %. Вы почувствуете, что мышление построенное по принципу меньших затрат, работает, когда продуктивность ваших усилий стремительно возрастет. Действия, обусловленные «мышлением 80/20», должны привести к тому, что вы будете получать гораздо больше при наименьших затратах.

Умейте отсекать лишнее

Успешное применение принципа наименьших затрат можно суммировать с помощью следующих положений:

- Концентрируйтесь на ресурсах, приносящих наибольшую прибыль, а не пытайтесь повысить эффективность всех ресурсов сразу.
- Осуществляйте контроль за своей жизнью, но старайтесь свести усилия в этом направлении к минимуму.
- Лучше быть избирательным, чем исчерпывающим.
- Пытайтесь достичь высоких результатов по нескольким направлениям, а не повышайте показатели по всем направлениям сразу.
- Вместо того чтобы выполнять повседневную или (с вашей точки зрения) рутинную работу самому, перепоручайте ее специалистам, которые могут ее сделать более профессионально (автомеханикам, декораторам и так далее).
- Выбирайте карьеру и работодателей с максимальной осторожностью и, как только это становится возможным, берите людей к себе в подчинение, а не нанимайтесь к кому-то другому.

- Делайте только то, что у вас получается лучше всего, и то, что вам нравится делать больше всего.

- «Копайте глубже», то есть обращайте внимание на странности и «иронию судьбы».

- В каждой важной для вас области старайтесь определять, какие 20% могут привести к 80% результатов.

- Успокойтесь, работайте меньше и ставьте перед собой только самые важные цели, при достижении которых закон 80/20 будет работать на вас, а не против вас; «всех денег не заработаешь».

- Максимально используйте те немногие удачные моменты, которые посылает нам жизнь, когда вы способны показать наивысшие результаты и когда звезды благосклонны к вам.

10.1 Выбор математического метода для решения экономической задачи

№ п/п	Экономический смысл задачи	Математический метод
1	Экономические расчеты, связанные с определением долей, процентов, пропорций материальных ресурсов, счетом денег, вычислением прибыли, налогов, рентабельности и т.п.	Арифметика (доли, проценты, пропорции), алгебра (уравнения, функции, графики)
2	Расчеты задач, содержащих последовательности взаимосвязанных экономических показателей и объектов (например, так называемые "пирамиды")	Арифметические и геометрические прогрессии
3	Вычисления, связанные с сочетанием различных экономических объектов, их перестановкой и размещением	Комбинаторика
4	Расчеты в области пространственных отношений и форм экономических объектов	Геометрия
5	Оценка экономических ситуаций, связанных с определением истинности или ложности информации, необходимостью найти выход из затруднительного положения	Логика
6	Выбор оптимального варианта решения экономической задачи для случая, когда условия описываются уравнениями 1-й степени	Линейное программирование
7	Выбор оптимального варианта решения экономической задачи для случая, когда условия описываются уравнениями 2-й и более степени	Нелинейное программирование
8	Выбор оптимального плана многоэтапной экономической операции, когда результаты каждого последующего этапа зависят от предыдущего	Динамическое программирование
9	Экономические расчеты, связанные с явлениями и величинами случайного характера	Теория вероятностей
10	Сбор, обработка и анализ статистических экономических материалов	Математическая статистика
11	Расчеты производственно-экономических показателей и выработка необходимых рекомендаций в массовых повторяющихся случайных явлениях	Теория массового обслуживания (теория очередей)
12	Экономические расчеты, связанные с явлениями и величинами случайного характера, на основе искусственно произведенных статистических материалов	Метод статистических испытаний (Монте-Карло)
13	Выработка экономических решений в условиях неопределенности ситуации, вызванной сознательными злонамеренными действиями конфликтующей стороны	Теория игр
14	Выработка экономических решений в условиях неопределенности ситуации, вызванной объективными обстоятельствами	Теория статистических решений
15	Составление и реализация рациональных планов проведения экономических операций, предусматривающих решение задачи в кратчайший срок и с наилучшими результатами	Сетевое планирование

11 Вопросы для самопроверки.

1. Чем вызвана необходимость разработки оптимизационных математических методов принятия решений?
2. Какой метод является один из основных методов принятия производственно-экономических решений?
3. Объясните в чем отличие статической и динамической задачи исследования операций?
4. Расскажите, что такое системный анализ.
5. Приведите примеры задач, решаемых с помощью методов исследования операций и математического программирования?
6. Обосновать, почему для решения оптимизационных задач необходимо разрабатывать соответствующие методы решения задач, а не использовать возможности ЭВМ по перебору всех возможных решений?
7. Расскажите последовательность процесс формирования математической задачи и алгоритма ее решения.
8. Виды задач математического программирования.
9. Сформулируйте в общем виде математическую задачу оптимизации.
10. В чем суть задач одномерной оптимизации.
11. Метод перебора.
12. Метод равномерного поиска.
13. Метод поразрядного поиска.
14. Метод деления пополам (дихотомии).
15. Метод золотого сечения.
16. Метод квадратичной интерполяции – экстраполяции.
17. Сравнить методы одномерной оптимизации.
18. В чем суть задач безусловной оптимизации.
19. Многомерный поиск без использования производных.
20. Метод циклического покоординатного спуска.
21. Метод спирального координатного спуска
22. Метод Хука и Дживса.
23. Метод Розенброка.
24. Метод минимизации по правильному симплексу.
25. Метод минимизации по деформируемому симплексу
26. Многомерный поиск, использующий производные.
27. Метод наискорейшего спуска
28. Методы, использующие сопряженные направления.
29. Метод Дэвидона - Флетчера - Пауэлла
30. Моделирование как метод научного познания.
31. Словесное и математическое описание задачи.
32. Ограничения, переменные, целевая функция.
33. Анализ результатов.
34. Статус и ценность ресурсов.
35. Примеры формулировки задач линейного программирования.
36. Рассказать в чем особенность решения транспортной задачи и задачи о назначениях.
37. Формулировка и алгоритм решения транспортной задачи.
38. Формулировка и алгоритм решения задачи о назначениях.
39. Цели и задачи решаемые имитационным моделированием.
40. Принципы построения дискретных имитационных моделей.
41. Применение имитационных моделей в системах массового обслуживания.
42. Применение имитационных моделей в системах управления запасами.
43. Практическое применение теории вероятностей.
44. Основные понятия теории вероятностей.
45. Свойства вероятности.
46. Действия с вероятностями.
47. Правило сложения вероятностей
48. Условная вероятность
49. Правило умножения вероятностей
50. Правило вычисления вероятностей для более чем двух событий
51. Задачи решаемые при планировании и управлении запасами.
52. Основная модель и система предпосылок основной модели управления запасами
53. Уравнение общей стоимости
54. Оптимальный размер заказа

12 Тестовые задачи.

Задача 1

Городская администрация Москвы контролирует услуги микроавтобусов, которые развозят туристов и покупателей с автобусов и железнодорожного вокзалов в различные районы города. О потоке пассажиров, прибывающих на автобусную остановку, находящуюся около железнодорожного вокзала, были собраны следующие данные:

Время между моментами прибытия пассажиров, мин	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Вероятность	0,04	0,16	0,24	0,28	0,16	0,10	0,02

По расписанию микроавтобусы должны прибывать каждые 10 мин, однако изменчивость транспортных условий приводит к следующему распределению их прибытия:

Интервал между последовательными прибытиями автобусов, мин	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**
Вероятность	0,10	0,38	0,28	0,15	0,09

Число мест в автобусе определяется следующим распределением:

Число свободных мест	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Вероятность	0,06	0,18	0,27	0,34	0,11	0,03	0,01

Требуется:

1. Построить имитационную модель потока из 30 пассажиров, прибывающих на автобусную остановку, в предположении, что моделируемый счетчик времени установлен на нулевой отметке.

2. Оценить среднее время ожидания автобуса пассажиром и среднюю длину очереди.

Задача 2

Мойщик машин, установил оборудование на автомобильной стоянке около оживленной транспортной магистрали. На автомобильной стоянке могут находиться одновременно максимум два автомобиля, включая автомобиль, обслуживание которого производится в данный момент, причем в соответствии с местными правилами движения стоянка на дороге запрещена. Следовательно, любой потенциальный клиент, подъезжающий к стоянке в тот момент, когда все места парковки заняты, является потерянным для мойщика машин. В нижеследующей таблице приведены распределение интервалов прибытия потенциальных клиентов и распределение времени их обслуживания.

Время, мин.	Интервалы между прибытиями, %	Длительность обслуживания, %
0-2	15	10
2-4	50	25
4-6	20	30
6-8	5	25
8-10	5	10
10-12	5	0
Итого	100	100

Требуется:

а) Оценить среднее число потенциальных клиентов в час.

б) Используя приведенные ниже случайные числа, построить имитационную модель работы мойщика машин по обслуживанию 10 потенциальных клиентов и таким образом оценить число потерянных клиентов за 1 ч, пояснив при этом, каким образом генерируются интервалы между прибытиями клиентов и длительность обслуживания.

Номер клиента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайные числа: для интервалов прибытия	87	69	19	21	62	07	31	30	60	88
для длительности обслуживания	90	67	83	32	65	18	74	8	18	38

Задача 3

Два торговых склада поставляют продукцию в четыре магазина. Издержки транспортировки продукции с торговых складов в магазины, наличие продукции на складах и потребности магазинов приведены в следующей таблице:

Торговый склад	Транспортные издержки, у.е. за единицу Магазин				Предложение продукции, ед.
	A	B	C	D	
1	4	3	5	6	100
2	8	2	4	7	200
Потребность в продукции, ед.	50	100	75	75	

Требуется найти распределение перевозок, позволяющее свести к минимуму общие транспортные издержки.

Задача 4

Три завода поставляют некоторую разновидность стали на пять торговых складов. Спрос каждого торгового склада в декабре, наличие стали на заводах, а также значения стоимости транспортировки 1 т стали приведены в нижеследующей таблице.

Завод	Транспортные издержки, у.е. за единицу Торговый склад					Предложение, т
	1	2	3	4	5	
A	20	27	33	25	34	200
B	22	36	34	28	26	250
C	26	29	27	26	28	300
Потребность, т	100	150	200	100	200	

Требуется определить минимальную стоимость транспортировки.

Задача 5

Три растворных узла осуществляют ежедневные поставки бетона для четырех строек. Ниже представлена информация о спросе на бетон, его наличии и транспортных издержках.

Растворный узел	Транспортные издержки, у.е./т Стройка				Общее предложение
	I	II	III	IV	
X	1,5	2,5	1,0	2,0	700
Y	2,0	3,0	2,0	1,5	650
Z	1,0	1,5	2,5	3,0	800
Общая потребность	400	500	350	1000	

Требуется найти распределение поставок с каждого растворного узла, минимизирующее общие транспортные издержки.

Задача 6

Строительная компания имеет четыре магазина универмага, расположенных в различных городах - P, Q, R, S. Поставки продукции в эти магазины осуществляются с двух торговых складов A и B, площади которых вмещают по 40 единиц продукции ежедневно.

Торговый склад	Транспортные издержки, у.е./ ед. Магазин			
	P	Q	R	S
A	70	85	55	120
B	110	90	75	110
Вариант 1	115	115	70	90
Вариант 2	135	95	80	75

В будущем планируется расширить площади магазинов, поэтому их потребности в продукции с торговых складов составят 27, 25, 30 и 35 единиц в день соответственно. Чтобы удовлетворить текущий и будущий спрос, планируется построить третий склад, площади которого позволят хранить в нем 60 единиц продукции ежедневно. Рассматриваются два варианта его размещения. Ниже приведены транспортные издержки, соответствующие перевозке продукции с двух существующих складов, и два варианта размещения нового склада.

Требуется оценить две транспортные модели и принять решение о том, какой вариант размещения нового склада лучше. Предполагается, что остальные издержки сохраняют существующие значения.

Задача 7

В распоряжении некоторой компании имеется 6 торговых точек и 6 продавцов. Из прошлого опыта известно, что эффективность работы продавцов в различных торговых точках неодинакова. Коммерческий директор компании произвел оценку деятельности каждого продавца в каждой торговой точке. Результаты этой оценки представлены в таблице.

Продавец	Объемы продаж, у.е./тыс. шт. Торговые точки					
	I	II	III	IV	V	VI
A	68	72	75	83	75	69
B	56	60	58	63	61	59
C	35	38	40	45	25	27
D	40	42	47	45	53	36
E	62	70	68	67	69	70
F	65	63	69	70	72	68

Объемы продаж в различных торговых точках для различных продавцов

Как коммерческий директор должен осуществить назначение продавцов по торговым точкам, чтобы достичь максимального объема продаж?

Задача 8

Завод по производству строительных материалов выпускает пять сходных друг с другом товаров - A, B, C, D, и E. В нижеследующей таблице представлены расходы ресурсов, необходимых для выпуска единицы каждого товара, а также недельные запасы каждого ресурса и цены продажи единицы каждого продукта.

Ресурсы	Товар					Недельный запас ресурсов
	A	B	C	D	E	
Сырье, кг	6,00	6,50	6,10	6,10	6,40	35000
Сборка, ч	1,00	0,75	1,25	1,00	1,00	6000
Обжиг, ч	3	4,50	6	6	4,50	30000
Упаковка,ч	0,50	0,50	0,50	0,75	1,00	4000
Цена продажи, ф.ст.	40	42	44	48	52	

Известны также издержки, связанные с использованием каждого вида ресурсов:

сырье	2,10 у.е. за 1 кг;
сборка	3,00 у.е. за 1 ч;
обжиг	1,30 у.е. за 1 ч;
упаковка	8,00 у.е. за 1 ч.

Требуется:

а) сформулировать задачу линейного программирования таким образом, чтобы в качестве переменных, как целевой функции, так и ограничении выступали ресурсы;

б) кратко сформулировать предпосылки применения модели. Для максимизации элементов, составляющих прибыль за неделю, следует использовать компьютерный пакет прикладных программ.

Задача 9

Компания "Радуга" - специализируется на производстве технических лаков. Представленная ниже таблица содержит информацию о ценах продажи и соответствующих издержках производства единицы полировочного и матового лаков.

Лак	Цена продажи 1 литра, у.е.	Издержки производства 1 литра, у.е.
Матовый	13,0	9,0
Полировочный	16,0	10,0

Для производства 1 литра матового лака необходимо затратить 6 мин трудозатрат, а для производства одного литра полировочного лака - 12 мин. Резерв фонда рабочего времени составляет 400 чел.-ч. в день. Размер ежедневного запаса необходимой химической смеси равен 100 грамм, тогда как ее расход на один литр матового и полировочного лаков составляет 0,05 и 0,02 грамм соответственно. Технологические возможности завода позволяют выпускать не более 3000 литров лака в день.

В соответствии с соглашением с основным оптовым покупателем компания должна поставлять ему 5000 литров матового лака и 2500 литров полировочного лака за каждую рабочую неделю (состоящую из 5 дней). Кроме того, существует профсоюзное соглашение, в котором оговаривается минимальный объем производства в день, равный 2000 литров. Администрации данной компании необходимо определить ежедневные объемы производства каждого вида лаков, которые позволяют получать максимальный общий доход.

Требуется:

а) Построить линейную модель для производственной проблемы, с которой столкнулась компания.

б) Используя графический метод, определить ежедневный оптимальный план производства и соответствующую ему величину дохода.

в) Профсоюз компании требует увеличения оплаты 1 ч. сверхурочных работ на 20 у.е.

Обосновать, сочтет ли администрация компании целесообразным такое предложение?

Если указанный размер оплаты сверхурочных работ является выгодным, какое количество часов сверхурочных работ в день целесообразно использовать?

г) Для исходной задачи (не учитывающей сверхурочные работы) определить промежуток изменений показателя единичного дохода за 1 литр полировочного лака, в котором исходное оптимальное решение остается прежним.

Задача 10

Компания занимается розничной продажей строительных материалов. Одним из видов продукции являются бетонные блоки. Спрос на них составляет 25 бетонных блоков в неделю, причем его величина равномерно распределяется в течение недели. Компания производит закупку бетонных блоков по 9 у.е. за единицу. Стоимость подачи одного заказа составляет 15 у.е., а издержки хранения – 0,5 у.е. за единицу среднего размера запаса в течение года плюс 15% среднегодовой стоимости запасов. Предполагается, что в году 50 недель.

Требуется:

1. Найти оптимальный размер заказа.

2. В настоящее время администрация заказывает бетонные блоки партиями в 300 штук. Какой будет величина экономии, если заказы будут подаваться в соответствии с размером, найденным в п.1?

3. Если бы стоимость подачи одного заказа снизилась до 5 у.е., каким образом администрация компании изменила бы решение, принятое в п.1?

Задача 11

Некоторой проектной фирме необходимо иметь в своем штате 1000 инженеров, темп увольнения которых с работы является постоянным и составляет 150 человек в год. Перед тем как приступить к работе, вновь принятые инженеры объединяются в группы и проходят обучение на специальных курсах, организуемых компанией. Проведение каждого цикла обучения обходится компании в 25000 у.е. Если нет возможности предоставить инженерам работу немедленно, то компания теряет 500 у.е. на человека в месяц. Требуется:

1. Определить, сколько инженеров следует принимать на каждый курс обучения?

2. С какой частотой следует организовывать подобные курсы? Каково годовое значение общей переменной стоимости обучения инженеров?

3. Как повлияет ограничение количества инженеров, обучающихся в течение одного цикла, до 25 человек на решение, полученное в п. **2?**

Задача 12

Компания "Systems" - занимается компьютерными системами в бизнесе. Фирме необходимо иметь диски под системные программы. Покупка дисков осуществляется у внешнего поставщика и, как было оценено, в ближайшем будущем использование дисков составит 20000 штук в год. Стоимость подачи одного заказа на партию дисков равна 32 у.е. По оценкам специалистов фирмы годовые издержки хранения одного диска составляют 1% его стоимости. Стоимость каждого диска равна 0,80 у.е. Предполагается, что коэффициент использования дисков является постоянным; отсутствие запасов недопустимо.

Требуется:

1. Определить оптимальный размер одного заказа и количество заказов, которое следует подавать в течение года.
2. Найти соответствующее значение годовой стоимости запасов.
3. Предположим, что оценка спроса оказалась заниженной, и фактическое значение спроса составило 24200 дисков в год. Как при этом условии повлияет сохранение размера заказа, найденного в п.1 и по-прежнему удовлетворяющего спрос, на решение задачи по сравнению с использованием нового оптимального значения уровня заказа?
4. Воспользовавшись результатами п.3, сформулируйте выводы о чувствительности данной модели к изменениям спроса.

Задача 13

Объем продаж демонстрационного зала строительных автомобилей составляет 200 автомашин в год. Стоимость подачи каждого заказа равна 500 у.е., а издержки хранения - 30% среднегодовой стоимости запасов. Если размер заказа меньше, чем 50 автомобилей, то цена покупки одного автомобиля составляет 6000 у.е. Для заказов, размер которых колеблется от 50 до 99 автомашин, предоставляется скидка на закупочную цену в 1,5%, а заказам, размер которых составляет 100 и более автомобилей, соответствует скидка, равная 3%. Требуется:

1. Определить размер заказа.
2. Как повлияет на ответ, полученный в п.1, тот факт, что поставщик увеличит размер скидки с 3 до 5%?

Задача 14

Небольшой магазин, специализирующийся на продаже слесарных станков, продает в среднем за неделю 3 станка определенного вида. Можно предположить, что значение спроса за неделю подчиняется распределению Пуассона. Время поставки заказа от поставщика является фиксированным и составляет 2 недели. Закупка каждого станка обходится магазину в 40 у.е. Стоимость подачи одного заказа - 50 у.е. Издержки хранения составляют 30% среднегодовой стоимости запасов, а расходы, связанные с нехваткой запасов, - 100 у.е. за каждый станок. Предполагается, что год состоит из 50 недель.

Определите, как должна действовать администрация магазина, если цель ее состоит в минимизации общей переменной стоимости запасов станков данного вида за весь год.

Задача 15

Служащие предприятия распределены в таблице по отделам и полу:

Подразделение	Женщины	Мужчины
Производственный отдел	6	20
Ремонтная мастерская	3	10
Склады	5	5
Автобаза	2	8
Отдел реализации	5	10

Наудачу выбран один служащий. Найти вероятность того, что это:

1. женщина;
2. работник ремонтной мастерской;
3. мужчина, работающий на складе;
4. женщина, работающая на складе или автобазе;
5. работник производственного отдела или отдела реализации?

В той же компании решено организовать консультационный комитет из двух человек. Какова вероятность того, что они будут:

1. женщины;
2. оба из производственного отдела;
3. один из магазина, а другой из автобазы;
4. женщина из ремонтной мастерской и мужчина, работающий на складе;
5. обе женщины, работающие на складе, или один человек из произведет венного отдела, а другой - мужчина, работающий в отдела реализации?

Задача 16

R, S, T - компоненты электронной системы. Вероятность бесперебойной работы каждого из компонентов в течение года 0,95; 0,9; 0,93 соответственно.

1. Какова вероятность безотказной работы всей системы на протяжении этого срока, если необходимо, чтобы работали все три компонента?
2. Допустим, достаточно, чтобы работали два из трех компонентов. Какова вероятность безотказной работы системы в этом случае?
3. Внесенные усовершенствования сделали эксплуатацию системы возможной, если работает хотя бы один из компонентов. Какова вероятность функционирования системы в течение всего года.

Задача 17

Магазин получает товар партиями по 100 штук. Если пять, взятых наугад, образцов соответствуют стандартам, партия товара поступает на реализацию. В очередной партии 8 единиц товара с дефектом. Какова вероятность того, что товар поступит на реализацию?

Задача 18

По вероятности попадания в дорожную аварию водители подразделяются страховой компанией на три группы - низкая, средняя, высокая. Среди застрахованных водители этих групп составили 25%, 60%, 15% соответственно. Ниже приведена таблица вероятностей попадания водителей каждой группы в аварии:

Риск водителя	Вероятность попадания в аварию		
	низкая	средняя	высокая
1 авария в год	0,10	0,01	0,03
2 аварии в год	0	0,01	0,05
3 аварии в год	0	0	0,01
4 аварии в год	0	0	0

Требуется найти:

1. Если А не попадал в аварию в течение года, какова вероятность того, что он принадлежит к группе водителей с высокой вероятностью попадания в дорожную аварию?
2. Если В не попадал в аварию в течение четырех лет, какова вероятность того, что он принадлежит к группе водителей с низкой вероятностью попадания в дорожную аварию?

Задача 19

Какова должна быть сумма страхового взноса за год за дом, оцененный в 60000 у.е., чтобы компания могла полностью возместить убытки, если установлено, что в течение года подвергаются разрушению два из каждых ста подобных домов? Из них 5% восстановлению не подлежат, для 25% - убытки составляют 8000 у.е.; для остальных - 4000 у.е.

Задача 20

Торговец фруктами и овощами закупает бананы у заготовителей большими партиями, но учитывая, что это товар скоропортящийся, он предполагает, что до 10% бананов будут подпорчены. Не имея возможности проверить всю закупаемую партию, он разработал следующую процедуру выборочной проверки качества.

Из поступившей партии наугад отбираются 30 гроздьев бананов, если подпорченные бананы имеются не более, чем в двух гроздях, то он покупает всю партию товара. Если подпорченные бананы имеются более чем в двух гроздях, сделка не состоится.

Какова вероятность того, что сделка не состоится, если в партии имеется 5% недоброкачественных бананов?

Задача 21

Число использовавшихся старых файлов	Число дней
0	10
1	30
2	27
3	17
4	6
5	5
6	4
7	1

В компьютере компании "Звезда" хранится вся использованная информация. Специалист, ответственный за компьютеры в этой фирме, предлагает сохранить все файлы пятилетней давности. Для изучения спроса на архивную информацию он запросил данные за последние 100 дней:

1. Вычислите среднее и число старых файлов, запрашиваемых в день, и стандартное отклонение.

2. Объясните, почему число старых файлов, запрашиваемых в день, подчиняется распределению Пуассона?

3. Предположим, число использовавшихся старых файлов подчиняется распределению Пуассона со средним значением, вычисленным в п. 1. Определите ожидаемые частоты этого распределения.

Задача 22

Для транспортировки апельсины упаковываются в специальные ящики по 250 шт. в каждом. При вскрытии обнаруживается, что в среднем 0,6% апельсинов испорчены. Какова вероятность, что во взятом для проверки ящике окажется не более двух испорченных плодов?

Задача 23

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	5	8
A_2	7	6	10
A_3	12	10	8

Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию, которую может сразу отправить потребителю (стратегия A_1), отправить на склад для хранения (стратегия A_2) или подвергнуть дополнительной обработке (стратегия A_3) для длительного хранения. Потребитель может приобрести продукцию: немедленно (стратегия B_1), в течение небольшого времени (B_2), после длительного периода времени (B_3). В случае стратегий A_2 и A_3, предприятие несет дополнительные затраты на хранение и обработку продукции, которые не требуются для A_1, однако при A_2 следует учесть возможные убытки из-за порчи продукции, если потребитель выберет стратегии B_2 или B_3. Определить оптимальные пропорции продукции для применения стратегии A_1, A_2, A_3, руководствуясь "минимаксным критерием" (гарантированный средний уровень убытка) при матрице затрат, представленной таблицей.

Задача 24

Фирма выпускает три продукта: А, В, С. На производство единицы продукта А требуется затратить 1,1 ч. труда ИТР, 12,3 ч. физического труда и 3,1 кг сырья. Для единицы продукта В соответствующие показатели равны 2,3 ч., 4,2 ч и 2,4 кг, для продукта С - 1,3 ч, 5,1 ч. и 1,2 кг. Ресурсы составляют 120 ч. труда ИТР, 640 ч. физического труда и 450 кг сырья. При оптовых закупках покупателю предоставляются скидки, так что прибыли от продажи продукции изменяются как показано в табл. 2.12. Например, если продается 120 ед. продукта А, то первые 40 ед. приносят по 63,2 руб. прибыли; следующие 60 - по 54,4 руб., а остальные 20 - по 48,3 руб. Сформулируйте задачу линейного программирования, решение которой определяет наиболее доходный производственный план.

Продукт А		**Продукт В**		**Продукт С**	
Прода-жа, ед.	Удельная прибыль, руб.	Прода-жа, ед.	Удельная прибыль, руб.	Прода-жа, ед.	Удельная прибыль, руб.
0-40	63,2	0-50	36,5	0-100	30,5
40-100	54,4	50-100	24,3	Более 100	24,8
100-150	48,3	Более 100	18,7	-	-
Более 150	42,1	-	-	-	-

Задача 25

Леспромхоз, имеющий лесопильный и фанерный цеха, столкнулся с проблемой наиболее рационального использования выделенной лесосеки. Чтобы получить 2,5 м^3 коммерчески реализуемых комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2,5 м^3 еловых и 7,5 м^3 пихтовой древесины. Для изготовления 100 м^2 фанеры требуется 5,1 м^3 еловых и 10,2 м^3 пихтовой древесины. Выделенная лесосека содержит 80 м^3 еловых и 180 м^3 пихтовой древесины. Согласно условиям поставок, в течении планируемого периода необходимо произвести по крайней мере 10 м^3 пиломатериалов и 1200 м^2 фанеры. Доход с 1 м^3 пиломатериалов составляет 80,2 руб., а со 100 м^2 фанеры - 302,5 руб. Оптимизировать использование лесосеки.

Задача 26

Мебельное предприятие выпускает три вида наборов мебели, книжные полки и тумбу под телевизоры. Характеристики каждого вида продукции приведены в табл. 2.13. При условии получения максимальной прибыли объем товарной пилопродукции должен составить не менее 459,31 тыс. руб. Ситуация со сбытом продукции сложилась следующая. Книжными полками рынок насыщен поэтому торговые организации уменьшили объем договоров до 10 тыс. шт. Тумбы для телевизоров могут быть реализованы в объемах от 4 до 7 тыс. шт., наборы мебели 2 - от 7 до 10 тыс. шт. Спрос на наборы мебели 1 и 3 неограничен и требуется не менее 10 тыс. шт. Предприятие имеет технологическое оборудование, число единиц которого и нормы затрат времени оборудования каждой группы на изготовление единицы каждого вида продукции приведены в табл. 2.13. Предприятие работает в две смены с эффективным временем работы каждой машины в 3945 ч. (коэффициент сменности 1,9). Оптимизировать производственную программу предприятия.

Показатель	Виды продукции				
	Набор мебели 1	Набор мебели 2	Набор мебели 3	Книжные полки	Тумба под телевизор
Оптовая цена единицы изделия, тыс. руб	7,2	14,3	32,5	0,182	1,5
Прибыль от реализации, тыс. руб	2,4	4,5	60,3	0,06	0,45

Наименование оборудования	Число, шт.	Виды продукции				
		Набор мебели 1	Набор мебели 2	Набор мебели 3	Книжные полки	Тумба под телевизор
Линия раскроя древесно-стружечных плит	2	0,068	0,096	0,207	0,018	0,042
Гильотинные ножницы	1	0,045	0,080	0,158	0,011	0,035
Линия облицовывания	2	0,132	0,184	0,428	0,020	0,060
Линия обрезания кромок	2	0,057	0,082	0,230	0,010	0,028
Лаконаливная машина	2	0,063	0,090	0,217	0,010	0,032
Полировальные станки	4	0,170	0,280	0,620	0,020	0,096

Задача 27

В леспромхозе производится раскряжевка хлыстов на сортаменты. Требуется получить сортаменты трех видов - длиной 6, 2,2 и 1,5 м. Длина среднего хлыста 31 м, средний диаметр 0,3 м. План поставки сортиментов, соответственно, 32,4 тыс. м^3, 86,3 тыс м^3 и 40,3 тыс. м^3. Используя карту раскроя хлыстов без учета толщины пропила (табл.) определить оптимальный план раскроя.

Сортамент, м	Варианты раскроя хлыстов										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6	5	4	4	3	3	2	2	1	1	0	0
2,2	0	2	1	5	0	4	1	9	2	10	1
1,5	0	1	3	1	8	6	11	3	13	6	19

Отходы	1	1,1	0,3	0,5	1,0	1,2	0,3	0,7	1,1	0	0,3

Задача 28

Строительный склад производит два вида продукции: обрезную доску и брус. Для изготовления 1 м^3 бруса требуется 2,5 м^3 сосны или 3,3 м^3 ели. Для изготовления 1 м^3 доски требуется 3,2 м^3 сосны или 3,5 м^3 ели. Максимальные суточные запасы сосны - 250 м^3, ели - 330 м^3. Суточный спрос на брус - 110 м^3, на доску - 150 м^3 при оптовых ценах за 1 м^3 бруса - 241 руб., за 1 м^3 доски - 352 руб. Определить оптимальные объемы выпуска бруса и доски.

Задача 29

Лесхоз для кормления животных использует два вида корма. В дневном рационе животного должно содержаться не менее 6 единиц вещества А и 12 единиц В. Какое количество корма надо расходовать ежедневно на одного животного, чтобы затраты были минимальны (по данным табл.).

Питательные вещества	Количество питательных веществ в 1 кг корма вида:	
	1	2
A B	2 2	1 4
Цена 1 кг корма, руб	2	3

Задача 30

В деревообрабатывающий цех завода поступил заказ вырезать из фанеры заготовки двух видов для 530 изделий. Известно, что на одно изделие идет две заготовки первого вида и 3 - второго. На складе имеется 800 листов. Существуют три способа раскроя: при первом способе из листа фанеры получается 3 заготовок 1 вида и 2 заготовки 2 вида, при втором: 1 заготовка первого вида и 2 заготовки второго и при третьем - соответственно 2 и 2. Сколько листов фанеры надо выкроить по каждому способу, чтобы выполнить заказ и расход фанеры был минимальным?

Задача 31

Строительная фирма имеет древесину трех видов в количествах: 1 - 1,12 тыс. м^3, 2 - 0,52 тыс. м^3, 3 - 0,73 тыс. м^3, для изготовления изделий A, B, C и D. Нормы расхода древесины в м^3 на изготовление единицы каждого изделия и прибыль от реализации единицы изделия даны в табл. 2.17. Определить, сколько изделий каждого вида должно произвести предприятие, чтобы общая прибыль от реализации всех изделий была максимальной?

Сырье	Нормы расхода сырья на единицу изделия			
	A	B	C	D
1 2 3	0,1 0,2 0,4	0,15 0,4 0,5	0,2 0,3 0,1	0,25 0,1 0,2
Прибыль, руб	13,4	24,2	33,7	11,1

Задача 32

Производство двух видов лесопродукции должно пройти три операции. Затраты времени на каждой операции на одно изделие, прибыль от реализации одного изделия в табл. Сколько изделий каждого вида должно произвести предприятие, чтобы получить максимум прибыли, причем число изделий А должно быть не менее 10, а В - не более 70 единиц.

Изделия	Затраты на одно изделие			Прибыль, руб
	1	2	3	
A B	11,3 6,1	7,2 8,3	16,1 9,5	25,5 38,3
Фонд времени на каждую операцию	600	700	1300	

Задача 33

Предприятие должно выпустить по плану продукции А - 545 единиц, В - 367 единиц, С - 457 единиц на двух машинах. Каждая из двух машин может выполнить операции по производству всех трех видов продукции. Затраты времени на производстве единицы изделия каждой из двух машин приведены в табл. Как распределить работу машин, при условии выпуска продукции пакетами по 100 шт. каждый, чтобы затраты времени на выполнение плана были минимальны?

Машины	Продукция		
	A	B	C
1 2	4,3 6,2	10,7 8,5	10,4 20,2

Задача 34

Предприятию задана программа по изготовлению четырех видов изделий в количествах: вида А - 495, В - 265, С - 378, D - 162. На предприятии имеется три группы станков с различной производительностью. Задается суммарное допустимое время работы за этот период для каждой группы станков: первой - 80 ч., второй - 100 ч., третьей - 150 ч. Нормы времени (в часах) на изготовление одного изделия на каждом станке и данные об издержках (в рублях) на изготовление каждого изделия на станках различных групп приводятся в табл. 2.20. Требуется так распределить изготовление изделий по группам станков, чтобы была обеспечена заданная программа по изготовлению изделий и чтобы общие издержки были минимальны?

Группы станков	Нормы времени на станках, час				Издержки на изготовление единицы изделия, руб			
	1	2	3	4	A	B	C	D
1	0,5	0,3	0,4	0,1	0,12	0,25	0,3	0,4
11	0,4	0,2	0,2	0,5	0,15	0,15	0,4	0,2
111	0,4	0,1	0,3	0,6	0,18	0,35	0,5	0,1

Задача 35

Механический цех может изготовить за смену 600 деталей №1 или 1200 деталей №2. Производственная мощность термического цеха, куда поступают на термообработку в тот же день, позволяет обработать за смену 1200 деталей №1 или 800 деталей №2. Цены на детали одинаковые.

Определить ежедневную производственную программу выпуска деталей, максимизирующую товарную продукцию предприятия, при следующих дополнительных условиях:

- оба цеха работают одну смену;
- механический цех работает три смены, а термический две смены;
- предприятие работает в две смены, при этом деталей №1 должно быть изготовлено не более 800шт. и деталей №2 – не более 1000 шт.

Построить модель максимизации прибыли.

Задача 36

Фирме предстоит решить, какое количество чистой стали и какое количество металлолома следует использовать для приготовления (из соответствующего сплава) литья для одного из своих заказчиков. Пусть производственные затраты в расчете на 1т чистой стали равняются 3 у.е., а затраты в расчете на 1т металлолома - 5 у.е.(последнее число больше предыдущего, т.к. использование металлолома сопряжено с его предварительной очисткой). Заказ предусматривает поставку не менее 5т литья; при этом заказчик готов купить большее количество литья, если фирма поставит перед ним такие условия.

Предположим, что запасы чистой стали, ограничены и не превышают 4т, а запасы металлолома не превышают 6т. Отношение веса металлолома к весу чистой стали в процессе получения сплава не должно превышать 7:8. Производственно-технологические условия таковы, что на процессы плавки и литья не может быть отведено более 18 часов, при этом на 1т стали уходит 3 часа, а на 1т металлолома -2 часа производственного времени.

Постройте для данной ситуации линейную оптимизационную модель.

На графике представьте допустимые варианты сплавов и укажите среди них оптимальный вариант (решение).

Задача 37

Фирма выпускает четыре вида пищевых полуфабрикатов: полуфабрикат 1, полуфабрикат 2 и т.д. Каждый полуфабрикат состоит из ряда ингредиентов (таких как крахмал, сахар, витамины и т.д.) пусть индекс i указывает на порядковый номер ингредиента ($i=1,2,...,l$). Обозначим через a_{ij} количество ингредиента i в одном килограмме полуфабриката $j (j=1,....,4)$. Предположим, что максимальное количество ингредиента i, которым фирма располагает в течение ближайшего месяца, равняется M_i.

Доход, получаемый с одного килограмма полуфабриката j, обозначим P_j. Через X_j обозначим число килограммов полуфабриката j, произведенного фирмой в течение ближайшего месяца. Пусть за этот период должно быть произведено не менее 100000 килограммов полуфабриката 1, 125000 килограммов полуфабриката 2, 30000 кг полуфабриката 3 и 500000 кг полуфабриката 4.

Построить линейную оптимизационную модель.

Задача 38

Фирмой "Супертранзистор" выпускаются радиоприемники трех различных моделей: модель А, модель В и модель С. Каждое изделие указанных моделей приносит доход в размере 8,15 и 25 соответственно (некоторых условных единиц). Необходимо, чтобы фирма выпускала за неделю не менее 100 приемников модели А, 150 приемников модели В и 75 приемников модели С.

Каждая модель характеризуется определенным временем, необходимым для изготовления соответствующих деталей, сборки изделия и его упаковки. Так в частности, в расчете на 10 приемников модели А требуется 3 часа для изготовления соответствующих деталей, 4 часа на сборку и 1 час на упаковку. Соответствующие показатели в расчете на 10 приемников модели В равняются 3,5 часам, 5 часам и 1,5 часа, а на 10 приемников модели С - 5 часам, 8 часа и 3 часам. В течение ближайшей недели фирма может израсходовать на производство радиодеталей 150 часов, на сборку 200 часов и на упаковку 60 часов.

Для решения задачи производственного планирования построить соответствующую модель линейного программирования.

Задача 39

Управляющий фирмы "Свежие нефтепродукты" пытается определить оптимальное распределение имеющейся в его распоряжении сырой нефти (различного сорта) по двум возможным технологическим процессам составления смесей. Техпроцесс 1 характеризуется следующими показателями: из одной единицы объема сырой нефти А и трех единиц объема сырой нефти В получается пять единиц объема бензина Х и две единицы объема бензина У . Техпроцесс 2 характеризуется другими показателями: из четырех единиц объема сырой нефти А и двух единиц объема сырой нефти В получается три единицы бензина Х и восемь единиц бензина У . Объемы продукции, выпускаемой при реализации техпроцессов 1 и 2,обозначим соответственно через X_1и X_2.

Максимальное количество запасов сырой нефти А равняется 100 единицам объема, а сырой нефти В -150 единицам объема. По условиям поставок требуется произвести не менее 200 единиц объема бензина Х и 75 единиц объема бензина У. Доходы с единицы объема продукции, получаемой с помощью техпроцессов 1 и 2, составляют P_1 и P_2соответственно.

Данную задачу составления горючих смесей требуется сформулировать в виде моделей линейного программирования.

Задача 40

Авиакомпания "Небесный грузовик", обслуживающая периферийные районы страны располагает 8 самолетами типа 1,15. самолетами типа 2, 12 самолетами типа 3, которые она может использовать для выполнения рейсов в течение ближайших суток. Грузоподъемность (в тысячах тонн) известна: 45 для самолетов типа 1,7 для самолетов типа 2, 4 для самолетов типа 3. Авиакомпания обслуживает города А и В. Городу А требуется тоннаж в 20000 т, а городу В - в 30000 т. Избыточный тоннаж не оплачивается, каждый самолет в течение дня может выполнить только один рейс. Расходы, связанные с перелетом самолетов по маршруту " центральный аэродром - пункт назначения", указаны в таблице:

	Тип 1	Тип 2	Тип3
Город А	23	5	1,4
Город В	58	10	3,8

Обозначим через X_i(i=1...3) число самолетов i-го типа отправленных в город А, а через Y_j(j=1...3) число самолетов j-го типа, отправленных в город В.

Для данной транспортной задачи построить модель линейного программирования.

Предлагается обсудить, является ли решение, полученное с помощью этой модели, оптимальным в реальных условиях.

Задача 41

Авиакомпании "Ночной полет" необходимо решить, какое количество топлива для реактивных самолетов следует закупить у фирм-поставщиков, если число последних равно трем и имеют место следующие требования и ограничения:

Заправка самолетов производится регулярно в четырех аэропортах.

Нефтяные компании констатируют следующие возможности поставки топлива в течение ближайшего месяца:

а) 2500000л.- нефтяная компания 1;
б) 5000000л. - нефтяная компания 2;
в) 6000000л. - нефтяная компания 3.

Авиакомпании требуется следующее количество топлива:

а) 1000000л. в аэропорту 1;
б) 2000000л. в аэропорту 2;
в) 3000000л. в аэропорту 3;
г) 4000000л. в аэропорту 4;

Стоимости 1 л. реактивного топлива с учетом расходов, вязанных с доставкой, имеют значения, приведенные в таблице:

	Компания 1	Компания 2	Компания 3
Аэропорт 1	12	9	10
Аэропорт 2	10	11	14
Аэропорт 3	8	11	13
Аэропорт 4	11	13	9

В связи с оптимизацией относящегося к данной ситуации управляющего решения построить модель линейного программирования.

Задача 42

Фирма "Нитроткань" производит определенного типа мелкие детали для промышленных изделий и продает их через своих посредников-оптовиков по фиксированной поставочной цене 2,5 р. за штуку. Число посредников равняется пяти. Коммерческие прогнозы указывают на то, что объем месячных поставок составит; посреднику 1 - 3000 штук, посреднику 2 - 3000 штук, 1 - посреднику 3 - 10000 штук, посреднику 4 - 5000 штук, посреднику 5 - 4000 штук.

Фирма располагает следующими производственными мощностями: завод 1 - 5000 деталей в месяц, завод 2 - 10000, завод 3-12500. Себестоимость одной детали, изготовленной на заводе 1, равняется 1 р., на заводе 2 - 0,90 р. на заводе 3 - 0,80 р.

Транспортные расходы (в р.), связанные с доставкой одной детали в точки оптовой продажи, приведены ниже:

	Клиент1	Клиент2	Клиент3	Клиент4	Клиент5
Завод	0,05	0,07	0,10	0,15	0,15
Завод	0,08	0,06	0,09	0,12	0,14
Завод	0,10	0,09	0,08	0,10	0,15

Построить модель линейного программирования с целью определения оптимальных объемов продукции, подлежащих выпуску на каждом заводе, и количества деталей, поставляемых фирмой своим посредникам-оптовикам.

Задача 43

Полицейская служба имеет следующие минимальные потребности в количестве полицейских в различное время суток:

Время суток часы	Порядковый номер периода	Минимальное число полицейских требуемое в указанный период
2-6	1	20
6-10	2	50
10-14	3	80
14-18	4	100
18-22	5	40
22-2	6	30

При этом нужно иметь в виду, что период 1 следует сразу же за периодом 6.

Каждый полицейский работает восемь часов без перерыва. Обозначим через $\boldsymbol{Xt}$ число полицейских, ежедневно приступающих к работе в период $\boldsymbol{t}$. Полицейская служба пытается составить служебное расписание таким образом, чтобы обойтись минимальным числом полицейских, не нарушая сформулированных выше требований.

Построить соответствующую модель линейного программирования.

Задача 44

Авиакомпании требуется определить, сколько стюардесс следует принять на работу в течение шести месяцев при условии, если каждая из них должна пройти стажировку. Потребности в количестве стюардесс-часов (с.-ч.) летнего времени известны: в январе требуется 8000 с.-ч., в феврале 9000, в марте - 8000, в апреле - 10000, в мае-9000, в июне 12000 с .-ч. Стажировка занимает один месяц. Следовательно, прием ее на работу должен по крайней мере на один месяц опережать ввод стюардессы в строй. Кроме того, каждая стюардесса за стажировку должна налетать 100 часов. Т.е. за счет каждой обучаемой стюардессы в течение месяца освобождается 100 час. рабочего времени, отведенного для уже обученных стюардесс.

Каждая обученная стюардесса может иметь налет до I5O час. в месяц. В вначале января уже имеется 60 опытных стюардесс. Если ресурсе летного времени (с.-ч.) превышают месячные потребности, то стюардессы работают в режиме налета не менее I5O час. в месяц. При этом не одну из них не снимают с работы. Установлено также, что примерно 10% обученных стюардесс увольняются по собственному желанию и другим причинам. Опытная стюардесса обходится авиакомпании 8OO р., а обучаемая - в 400 р. в месяц.

Построить модель линейного программирования для данной ситуации.

Приведенная выше формулировка ориентирована на шести месячное планирование. Изменится ли в общем случае решение, если учесть потребности авиакомпании в июле?

Задача 45

Цех мебельного комбината выпускает трельяжи, трюмо и тумбочки под телевизоры. Норма расхода материала в расчете на одно изделие, плановая себестоимость, оптовая цена предприятия, плановый (месячный) ассортимент и трудоемкость единицы продукции приведены в таблице:

Показатели	Трельяжи	Трюмо	Тумбочки
Норма расхода материала: $м^3$ древесностружные плиты	0,032	0,031	0,038
доски: еловые	0,020	0,020	0,008
березовые	0,005	0,005	0,006
Трудоемкость, чел-ч	10.2	7.5	5.8
Плановая себестоимость, р	88.81	63.98	29.60
Оптовая цена предприятия, р	93.00	67.00	30.00

Плановый ассортимент, шт	350	290	1200

Запас древесностружечных плит, досок еловых и березовых 90, 30 и 20 м^3 соответственно. Плановый фонд рабочего времени 16800 человеко-часов.

Исходя из необходимости выполнения плана по ассортименту и возможности его перевыполнения по отдельным (или даже всем) показателям построить модели, на основе которых можно сформулировать следующие экстремальные задачи:

задачу максимизации объема реализации;

задачу максимизации прибыли.

Задача 46

На заводе ежемесячно скапливается около 14 тон отходов металла, из которого можно штамповать большие или малые шайбы. Месячная потребность завода в больших шайбах 600тыс, шт. в малых - 1100 тыс. шт. (недостающее количество шайб закупается на специализированном предприятии). Оптовая цена больших шайб 11,9 р. (за тысячу штук) и малых- 5,2 р. расход металла на тысячу больших шайб- 22 кг, на тысячу малых- 8 кг.

Для изготовления шайб используются два пресса холодной штамповки. Производительность каждого за смену 9 тыс. шт. больших шайб либо 11,5 тыс. шт. малых. Завод работает в две смены.

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу определения плана производства шайб (из отходов завода), обеспечивающего максимальную долю в валовой продукции предприятия. За плановый период принять год.

Задача 47

Строительное предприятие изготовляет приборы типа А, В и С, которые реализует соответственно по 60,70 и 115 р., за изделие. Трудоемкость их производства задана отношением 1:2:3. Ранее предприятие изготовляло только прибор типа А в количестве 900 шт. за сутки. Однако, изменение объема поставок экранированного провода (при сборке прибора каждого типа расходуется одинаковое количество этого материала) в планируемом году позволит выпускать за сутки 1000 приборов.

Для укомплектования каждого прибора необходим датчик того же типа, что и тип прибора. Их предполагается получать по кооперативным поставкам в количестве, обеспечивающем в сутки сборку не более 400, 500 и 200 приборов типа А, В, С соответственно.

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу определения напряженных месячных планов по объему реализации и ассортименту.

Задача 48

Фабрика строительной спецодежды выпускает кожаные брюки, куртки и пальто специального назначения в ассортименте, заданном отношением 2:1:3. В процессе изготовления изделия проходят три производственных участка - дубильный, раскройный и пошивочный. Фабрика имеет практически неограниченную сырьевую базу, однако сложная технология предъявляет высокие требования к квалификации рабочих. Численность их в рамках планируемого периода ограничена.

Время обработки изделий на каждом участке, их плановая себестоимость, оптовая цена предприятия приведены в таблице:

Показатели	Брюки	Куртки	Пальто
Норма времени на участках, чел-ч дубильном	0.3	0.4	0.6
раскройном	0.4	0.4	0.7
пошивочном	0.5	0.4	0.8
Полная себестоимость, р	15	40.5	97.8
Оптовая цена предприятия, р.	17.5	42	100

Ограничения на фонд времени для дубильного, раскройного и пошивочного участков составляют соответственно 3360, 2688 и 5040 час.

Учитывая заданный ассортимент, построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу определения напряженного месячного плана по прибыли от реализованной продукции.

Задача 49

На приобретение оборудования для нового строительного участка выделено 300 тыс. р. Его предполагается разместить на площади 45 кв.м.

Участок может быть оснащен оборудованием трех видов машинами стоимостью 6 тыс. р. (здесь и далее все показатели приводятся на единицу оборудования), размещающимися на площади 9 кв. м., производительностью 8 тыс. ед. продукции за смену; машинами стоимостью 3 тыс. р. занимающими площадь 4 кв. м., производительностью 4 тыс. ед. продукции за смену; машинами стоимостью 2 тыс. р., занимающими площадь 3 кв. м., производительностью 3 тыс. единиц продукции в смену.

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу определения плана приобретения оборудования, обеспечивающего наибольшую производительность всего участка.

Задача 50

В плановом году строительные организации города переходят к сооружению домов типа Д-1, Д-2, Д-3 и Д-4. Данные о количестве квартир разного типа в каждом из указанных типов домов, их плановая себестоимость приведены в таблице:

Показатели	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4
Типы квартир				
однокомнатные:	10	18	20	15
двухкомнатные:				
смежные	40	-	20	-
несмежные	-	20	-	60
трехкомнатные	60	90	10	-
четырехкомнатные	20	10	-	5
Плановая себестоимость, тыс.р.	830	835	360	450

Годовой план ввода жилой площади составляет 800, 1000, 900, 2000 и 7000 квартир указанных типов.

Исходя из необходимости выполнения плана ввода квартир и обеспеченности стройматериалами и трудовыми ресурсами, построить модель и сформулировать на её основе экстремальную задачу, анализ которых позволит обосновать объем капиталовложений в жилищное строительство на плановый год.

На жилищное строительство утвержден объем капиталовложений в размере 40 млн. р. (часть этих средств, которая не будет использована в плановом году по прямому назначению, предназначена на коммунальные расходы).

Построить модель и сформулировать экстремальную задачу нахождения плана, при котором себестоимость всех вводимых домов будет минимальна.

Задача 51

Строительный производственный участок изготовляет изделия И-1, И-2, И-3 для сборочного конвейера предприятия-заказчика. Потребность в них 300, 500 и 400 шт. соответственно. Запасы металла на изделие И-1 ограничены, поэтому их можно производить не более 350 шт. Все изделия последовательно обрабатываются на станках С-1, С-2 и С-3. Технология изготовления каждого изделия предусматривает три способа обработки. Норма времени на обработку, плановая себестоимость и оптовая цена предприятия на все изделия приведены в таблице:

Показатели	Изделия и способы обработки								
	И-1			И-2			И-3		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Норма времени на обработку:									
На С-1	3	7	0	8	4	5	4	3	2
На С-2	2	3	6	3	2	0	2	3	1
На С-3	7	5	6	9	3	6	5	6	3
Плановая себестоимость, р.	13	15	11	26	20	25	19	20	18
Оптовая цена предприятия, р.	16			25			20		

Плановый фонд времени работы станков составляет: для станков С-1 и С-3 по 6048 час., для С-2 - 3932 час.

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу нахождения плана загрузки станков, обеспечивающего максимальную прибыль от реализации готовой продукции.

Задача 52

Четыре строительных участка потребляют щебень, вырабатываемый тремя дробильными установками. Суточная потребность строй участков в щебне и стоимость перевозки 1 т его от дробильных установок до стройплощадок приведены в таблице:

Показатели	Номер участка			
	1	2	3	4
Цена перевозки 1 т. щебня, р. от дробилки 1	4	3	8	5
от дробилки 2	9	7	5	4

от дробилки 3	3	6	2	8
Потребность строй участка в щебне, т.	50	50	70	-

Суточная производительность дробилок составляет 67, 75 и 60 т соответственно.

Недостающее количество щебня можно обеспечить за счет:

Увеличения производительности дробилки 2, что вызовет дополнительные затраты на выработку 1 т щебня в размере 3 р.

Введения в эксплуатацию дробилки 4 (и карьера) при доп. затратах на 1т щебня 5 р. и стоимости перевозки 1т. щебня 3,2,4 и 1р. к соответствующим стройплощадкам.

Увеличение производительности дробилки 3 (затраты на изготовление 1т щебня возрастут на 2 р.).

Построить модель и на её основе сформулировать экстремальную задачу, анализ которой позволит определить и обосновать оптимальный план закрепления стройплощадок за дробильными установками с учетом перечисленных возможностей увеличения производства щебня.

Задача 53

Предприятие выпускает обычный, специальный и декоративный сплавы латуни и реализует их соответственно по 3, 4,5 и 6 р., за единицу веса. Его производственная мощность позволяет производить (за плановый период) не более 500 ед. веса обычного сплава, 700 ед. специального и 250 ед. декоративного. Обязательными составляющими сплава являются медь, цинк, свинец и никель. Их цена соответственно 0,9; 0,7; 0,5; 1,1 р. за ед. веса.

По технологии декоративный сплав должен содержать не менее 7% никеля, 49% меди и не более 29% свинца; специальный - не менее 3% никеля, 71% меди, 9% цинка и не более 21% свинца. В обычный сплав составляющие входят без ограничений.

Считая, что себестоимость сплавов складывается только из стоимости ингредиентов, построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу нахождения плана выпуска сплавов, обеспечивающего максимальную прибыль.

Задача 54

Сухогруз может принять на борт "не более 1000 т груза, общий объем которого не должен превосходить 500 $м^3$. На причале находится груз 8 наименований (различные механизмы и нестандартное оборудование). Вес, объем и цена груза каждого наименования приведены в таблице:

Показатели	**Номер груза**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Вес, в т.	50	100	70	91	60	75	89	67
Объем, $м^3$	45	31	25	44	37	40	29	35
Цена,тыс.р.	1,5	2,1	1,3	1,8	1,4	1,9	2,0	1,1

На сухогруз нельзя погрузить более одной единицы груза каждого наименования. Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу выбора варианта загрузки судна с максимальной стоимостью всего груза.

На причале находятся только две единицы груза первого наименования и три - восьмого. Подобных ограничений на другие виды груза нет. Количество груза каждого наименования, которое можно погрузить на судно зависит лишь от наличия груза и свободного места в трюмах. Построить модель и на ее основе сформулировать экстремальную задачу выбора варианта загрузки судна наиболее ценным грузом.

Задача 55

Четыре растворных узла стройуправления потребляют в сутки 170, 175, 220 и 190 т песка, который производят три фабрики. Суточная производительность их соответственно 380, 340 и 300 т.

Фабрики взимают плату за погрузку песка каждые сутки и не с количества отгруженного материала, а с "факта" его отгрузки за это время данному потребителю (что делается с целью закрепления его за фабрикой). Стоимость перевозки 1т песка от каждой фабрики к каждому узлу, цена 1 т песка и суточная стоимость погрузки приведены в таблице:

Показатели	**Номер фабрики**		
	1	**2**	**3**
Стоимость перевозки 1т песка, р. к 1- ому узлу,	0,9	1,5	0,6
ко 2- ому узлу,	1	0,8	0,9
к 3- ому узлу,	0,7	0,4	1,2
к 4- ому узлу,	0,5	1	1,3
Цена 1т. песка, р.	3	2,9	2,2
Суточная стоимость погрузки, р.	19	25	15

По приведенным данным построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу выбора оптимального варианта закрепления растворных узлов за фабриками.

Задача 56

Строительная организации необходимо выполнять четыре вида земляных работ, объем которых соответственно 7000, 6500, 7600 и 8100 *м*³. Для их осуществления предполагается использовать три механизма. Производительность механизмов и себестоимость 1 час. работы каждого из них приведен в таблице:

	Механизмы и виды работ											
	1 Механизм				2 Механизм				3 Механизм			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Производительность $м^3/час$	20	15	16	30	14	18	35	32	15	29	40	15
Себестоимость 1ч. работы р.	2	5	3	6	2	4	5	7	8	3	6	3

Построить модель, на основе которых можно сформулировать экстремальную задачу нахождения плана организации работ с минимальными затратами на его осуществление.

Объемы земляных работ заданы отношением 3:2:5:1.

Построить модель и сформулировать экстремальной задачу, анализ которой позволит найти напряженный план работы, механизмов с наименьшими затратами на его осуществление.

Задача 57

Нефтеперерабатывающий завод получает за плановый период четыре полуфабриката- 600 тыс. литров алкилата, 316 тыс. литров крекинг бензина, 460 тыс. литров бензина прямой перегонки и 200 тыс. литров изопентана. В результате смешивания этих ингредиентов в пропорциях 2/3/1/5; 2/4/3/4; 5/1/6/2 и 7/1/3/2 получают бензин четырех сортов Б-1, Б-2, Б-3 и Б-4. Цена его реализации соответственно 135, 140, 160 и 125 р., за тысячу литров.

Предположив, что реализация любого сорта специального бензина не вызовет затруднений, построить модель и сформулировать экстремальную задачу, анализ которой позволит обосновать напряженность плана реализации и планировать ассортимент выпускаемой продукции.

Завод выпускает четыре сорта бензина в ассортименте, заданном отношением 2:3:1:4. Построить модель и сформулировать экстремальную задачу, анализ которой позволят обосновать напряженность плана реализации готовой продукции.

Задача 58

Производственный комплекс состоит из сталелитейного и автомобилестроительного заводов. Он функционирует в течение пяти лет. Начальный запас стали составляет 1000 т. Исходные производственные мощности заводов соответственно 1200 т стали и 200 автомобилей в год.

Сталь расходуется на производство автомобилей (4 т каждый) и собственно стали, а также на расширение производственных мощностей комплекса. При этом каждая тонна стали, направленная на её производство, обеспечивает выпуск 4т. Тонна стали, идущая на расширение производственной мощности сталелитейного завода, увеличивает последнюю на 0,15 т, а для увеличения производственной мощности автомобилестроительного завода на один автомобиль необходимо затратить 10 т стали.

Реализация решения о распределении стали на следующий год осуществляется в конце очередного года планируемого периода: автомобилестроительный завод не может получать более половины имеющегося запаса стали.

Построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу максимизации количества автомобилей, выпускаемых заводом за плановый период.

Задача 59

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии — 60 изделий, второй линии — 75 изделий. На радиоприемник первой модели расходуется 10 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели — 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 единицам. Прибыли от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равны 30 и 20 долларов соответственно. Определите оптимальные суточные объемы производства первой и второй моделей.

Задача 60

Рацион стада крупного рогатого окота из 220 голов включает пищевые продукты А, В, С, Д и Е. В сутки одно животное должно съедать не менее 2 кг продукта А, 1,5 кг продукта В, 0,9 кг продукта С, 3 кг продукта Д и 1,8 кг продукта Е. Однако в чистом виде указанные продукты не производятся. Они содержатся в концентратах. К-1, К-2, К-3. Их цена равна соответственно 0,5; 0,4 и 0,9 р. за килограмм. Содержание продуктов в килограмме концентрата (%) указано в таблице:

Концентраты	Продукты

	A	B	C	Д	E
К-1	15	22	0	0	4
К-2	19	17	0	14	7
К-3	5	12	25	5	8

Построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу минимизации затрат на покупку концентратов для рационального кормления скота.

Задача 61

Процесс изготовления двух видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 ч в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида.

Изделие	Время обработки 1 изделия, мин			Удельная прибыль
	Станок 1	Станок 2	Станок 3	
1	10	6	8	2 долл.
2	5	20	15	3 долл.

Задача 62

Строительная фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионную сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 1000 долл. в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 долл., а каждая минута телерекламы — в 100 долл. Фирма хотела бы использовать радиосеть по крайней мере в два раза чаще, чем сеть телевидения. Опыт прошлых лет показал, что объем сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определите оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на рекламу, между радио- и телерекламой.

Задача 63

Строительная фирма производит два вида продукции — А и В. Объем сбыта продукции вида А составляет не менее 60% общего объема реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции А и В используется одно и то же сырье, суточный запас которого ограничен величиной 100 фунтов. Расход сырья на единицу продукции А составляет 2 фунта, а на единицу продукции В — 4 фунта. Цены продукции А и В равны 20 и 40 долл. соответственно. Определите оптимальное распределение сырья для изготовления продукции А и В.

Задача 64

На заготовительный участок строительной фирмы поступили стальные прутья длиной 111 см. Необходимо разрезать их на заготовки по 19, 23 и 30 см. Последних требуется соответственно 311, 215 и 190 шт.

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу выбора варианта выполнения этой работы, при котором число разрезаемых прутьев минимально.

Задача 65

На заготовительный участок строительной фирмы поступили листы фанеры размером 152x152 см. Необходимо разрезать их на заготовки по 105x31, 47x90 и 30x51 см. Потребность в них соответственно 315, 215 и 416 шт.

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу выбора варианта раскроя, при котором количество разрезаемых листов минимально.

На участок поступило 120 листов фанеры, которые необходимо разрезать на заготовки в комплектности, задаваемой отношением 3:2:5. Построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу максимизации комплектов заготовок.

Задача 66

Фирма выпускает ковбойские шляпы двух фасонов. Трудоемкость изготовления шляпы фасона 1 вдвое выше трудоемкости изготовления шляпы фасона 2. Если бы фирма выпускала только шляпы фасона 1, суточный объем производства мог бы составить 500 шляп. Суточный объем сбыта шляп обоих фасонов ограничен диапазоном от 150 до 200 штук. Прибыль от продажи шляпы фасона 1 равна 8 долл., а фасона 2 —5 долл. Определите, какое количество шляп каждого фасона следует изготавливать, чтобы максимизировать прибыль.

Задача 67

Изделия четырех типов проходят последовательную обработку на двух станках. Время обработки одного изделия каждого типа на каждом из станков приведено в таблице.

Список	Время обработки одного изделия, ч.			
	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Затраты на производство одного изделия каждого типа определяются как величины, прямо пропорциональные времени использования станков (в машино-часах). Стоимость машино-часа составляет 10 долл. для станка 1 и 15 долл.— для станка 2. Допустимое время использования станков для обработки изделий всех типов ограничено следующими значениями: 500 машино-часов — для станка 1 и 380 машино-часов для станка 2. Цены изделий типов 1, 2, 3 и 4 равны 65, 70, 55 и 45 долл. соответственно. Сформулируйте для приведенных условий задачу максимизации суммарной чистой прибыли.

Задача 68

Завод строительных конструкций выпускает изделия трех моделей (I, II и III). Для их изготовления используются два вида ресурсов (А и В), запасы которых составляют 4000 и 6000 единиц. Расход ресурсов на одно изделие каждой модели приведен в таблице

Ресурс	**Расход ресурса на одно изделие данной модели**		
	I	**II**	**III**
А	2	3	5
В	4	2	7

Трудоемкость изготовления изделия модели I вдвое больше, чем изделия модели II, и втрое больше, чем изделия модели III. Численность рабочих завода позволяет выпускать 1500 изделий модели 1. Анализ условий сбыта показывает, что минимальный спрос на продукцию завода составляет 200, 200 и 150 изделий моделей I, II и III соответственно. Однако соотношение выпуска изделий моделей I, II и III должно быть равно 3:2:5. Удельные прибыли от реализации изделий моделей I, II и III составляют 30, 20 и 50 долл. соответственно. Сформулируйте для данных условий задачу определения объемов выпуска изделий каждой модели, при которых прибыль будет максимальной.

Задача 69

Денежные средства строительной фирмы могут быть использованы для финансирования двух проектов. Проект А гарантирует получение прибыли в размере 70 центов на вложенный доллар через год. Проект В гарантирует получение прибыли в размере 2 долл. на каждый инвестированный доллар, но через два года. При финансировании проекта В период инвестиций должен быть кратным двум годам. Как следует распорядиться капиталом в 100 тыс. долл., чтобы максимизировать суммарную величину прибыли, которую можно получить через три года после начала инвестиций? Сформулируйте данную задачу как задачу ЛП.

Задача 70

Минимально необходимое количество автобусов в - й час суток равно b_i, $i=1,2,...,24$. Каждый автобус непрерывно используется на линии в течение 6 час. Превышение числа автобусов в период i по сравнению с величиной b_i приводит к дополнительным издержкам на один машино-час в размере c_i. Сформулируйте данную задачу как задачу минимизации общей величины дополнительных издержек.

Задача 71

Рассмотрите задачу распределения самолетов трех типов по четырем маршрутам. Характеристики парка самолетов и движения по авиалиниям приведены в таблице:

Тип самолета	Вместимость (число пассажиров)	Количество самолетов	Количество рейсов в сутки на каждом маршруте			
			1	2	3	4
1	50	5	3	2	2	1
2	30	8	4	3	3	2
3	20	10	5	5	4	2
Суточный пассажиропоток			100	200	90	120

Стоимостные характеристики авиаперевозок:

Тип самолета	Эксплуатационные расходы на 1 рейс по данному маршруту, долл.			
	1	2	3	4
1	1000	1100	1200	1500
2	800	900	1000	1000
3	600	800	800	900
Убыток от неудовлетворенного спроса (на одного неперевезенного пассажира)	40	50	45	70

Сформулируйте задачу ЛП, в которой требуется минимизировать сумму эксплуатационных расходов и потерь из-за неудовлетворенного спроса.

Задача 72

Требуется распределить имеющиеся денежные средства по четырем альтернативным вариантам. Игра имеет три исхода. В таблице приведены размеры выигрыша (или проигрыша) на каждый доллар, вложенный в соответствующий альтернативный вариант, для каждого из трех исходов:

Исход	Выигрыш (или проигрыш) на 1 долл., вложенный в данный вариант			
	1	2	3	4
1	-3	4	-7	15
2	5	-3	9	4
3	3	-9	10	-8

У игрока имеется 500 долл., причем использовать их в игре можно только один раз. Точный исход игры заранее неизвестен, и, учитывая эту неопределенность, игрок решил распределить деньги так, чтобы максимизировать минимальную отдачу от вложенной суммы. Сформулируйте данную задачу как задачу ЛП. (Примечание: отдача от вложенных средств может быть отрицательной, нулевой или положительной.)

Задача 73

Исследуется зависимость урожайности y зерновых культур (ц/га) от ряда факторов (переменных) сельскохозяйственного производства, а именно,

x_1 - число тракторов на 100 га;

x_2 - число зерноуборочных комбайнов на 100 га;

x_3 - число орудий поверхностной обработки почвы на 100 га;

x_4 - количество удобрений, расходуемых на гектар (т/га);

x_5 - количество химических средств защиты растений, расходуемых на гектар (ц/га).

Исходные данные для 20 районов области приведены в табл.

Таблица

	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	9,70	1,59	0,26	2,05	0,32	0,14
2	8,40	0,34	0,28	0,46	0,59	0,66
3	9,00	2,53	0,31	2,46	0,30	0,31
4	9,90	4,63	0,40	6,44	0,43	0,59
5	9,60	2,16	0,26	2,16	0,39	0,16
6	8,60	2,16	0,30	2,69	0,32	0,17
7	12,50	0,68	0,29	0,73	0,42	0,23
8	7,60	0,35	0,26	0,42	0,21	0,08
9	6,90	0,52	0,24	0,49	0,20	0,08
10	13,50	3,42	0,31	3,02	1,37	0,73
11	9,70	1,78	0,30	3,19	0,73	0,17
12	10,70	2,40	0,32	3,30	0,25	0,14
13	12,10	9,36	0,40	11,51	0,39	0,38
14	9,70	1,72	0,28	2,26	0,82	0,17
15	7,00	0,59	0,29	0,60	0,13	0,35
16	7,20	0,28	0,26	0,30	0,09	0,15
17	8,20	1,64	0,29	1,44	0,20	0,08
18	8,40	0,09	0,22	0,05	0,43	0,20
19	13,10	0,08	0,25	0,03	0,73	0,20
20	8,70	1,36	0,26	0,17	0,99	0,42

Построить зависимость урожайности от факторов, определить степень их значимости.

Задача 74

Завод выпускает изделия двух типов: А и В. При этом используется сырье четырех видов. Расход сырья каждого вида на изготовление единицы продукции и запасы сырья заданы следующей таблицей:

Изделия	Сырье			
	I	II	III	IV
A	2	1	0	2
B	3	0	1	1
Запасы сырья	21	4	6	10

Выпуск одного изделия типа А приносит 3 денежные единицы прибыли, одного изделия типа В- 2 денежные единицы. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Задача 75

На заводе используется сталь трех марок: А, В и С, запасы которых соответственно равны 10, 16, и 12 ед. Завод выпускает два вида изделий. Для изделия I требуется по одной единице стали всех марок. Для изделия II требу- ется 2 единицы стали марки В, одна- марки С и не требуется сталь марки А.

От реализации единицы изделия вида I завод получает 300 руб. прибыли, вида II- 200 руб. Составить план выпуска продукции, дающий наибольшую прибыль.

Задача 76

Предприятие располагает ресурсами двух видов в количестве 120 и 80 ед. соответственно. Эти ресурсы используются для выпуска продукции I и II, причем расход на изготовление единицы продукции первого вида составляет 2 ед. ресурса первого вида и 2 ед. ресурса второго вида, единицы продукции второго вида- 3 ед. ресурса первого вида и 1 ед. ресурса второго вида. Прибыль от реализации единицы продукции первого вида составляет 600 руб., второго вида- 400 руб. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий наибольшую прибыль, при условии, что продукции первого вида должно быть выпущено не менее продукции второго вида.

Задача 77

Фабрика выпускает три вида тканей. Суточные ресурсы фабрики следующие: 700 ед. производственного оборудования, 800 ед. Сырья и 900 ед. электроэнергии, расход которых на единицу ткани представлен в таблице.

Ресурсы	Ткани		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Цена одного метра ткани I равна 8 руб., ткани II- 7 и ткани III- 6 руб.

Сколько надо произвести ткани каждого вида, чтобы прибыль от реализации была наибольшей?

Задача 78

Четыре станка обрабатывают два вида деталей: А и В. Каждая деталь проходит обработку на всех четырех станках. Известны: время обработки де- тали на каждом станке, время работы станков в течении одного цикла производства и прибыль, получаемая от выпуска одной детали каждого вида. Эти данные приведены в таблице.

Станки	Время обра-		Время станка за один цикл производства, ч.
	А	В	
I	1	2	16
II	2	3	25
III	1	1	10
IV	3	1	24
Прибыль на одну деталь, руб.	400	100	

Составить план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Задача 79

Для откорма животных употребляют два корма: 1 и 2. Стоимость одного килограмма корма 1- 5 руб., корма 2- 2 руб. В каждом килограмме корма 1 содержится 5 ед. витамина А, 2,5 ед. витамина В и 1 ед. витамина С.

В каждом килограмме корма 2 содержится 3 ед. витамина А, 3 ед. витамина В и 1 ед. витамина С.

Какое количество корма каждого вида необходимо расходовать ежедневно, чтобы затраты на откорм были минимальными, если суточный рацион предусматривает не менее 225 питательных единиц витамина А, не менее 150 ед. витамина В и не менее 80 ед. витамина С?

Задача 80

На птицеферме употребляется два вида кормов- I и II. В единице веса корма I содержится единица вещества А, единица вещества В и единица вещества С. В единице веса корма II содержатся четыре единицы вещества А, две единицы вещества В и не содержится вещество С. В дневной рацион каждой птицы надо включить не менее единицы вещества А, не менее четырех единиц вещества В и не менее единицы вещества С. Цена единицы веса корма I составляет 30 руб., корма II- 20 руб. Составить ежедневный рацион кормления птицы так, чтобы обеспечить наиболее дешевый рацион питания.

Задача 81

На трех станциях отправления А, В и С имеется соответственно 50, 20 и 30 ед. однородного груза, который нужно доставить в пять пунктов на- значения $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, $П_5$ в количестве соответственно 30, 5, 25, 15 и 25 ед. Эти данные, а также стоимость перевозки единицы груза от каждой станции отправления к каждому пункту назначения указаны в таблице.

Пункты отправления	Запасы груза	Пункты назначения и их потребности				
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
А	50	4	1	2	3	3
В	20	3	1	5	2	4
С	30	5	6	1	4	2
		30	5	25	15	25

Составить такой план перевозок грузов, чтобы затраты на эти перевозки были минимальными.

Задача 82

Даны условия транспортной задачи. Числа, находящиеся на пересечении строк с указанием мощностей поставщиков и столбцов с указанием спроса потребителей, показывают стоимость перевозки единиц груза от поставщиков к потребителям.

Пункты отправления	Запасы груза	Пункты назначения и их потребности		
		1	2	3
I	60	4	3	5
II	70	8	7	6
III	80	4	5	9
IV	70	10	9	7
		80	80	40

Составить такой план перевозок грузов, чтобы затраты на перевозки были минимальными.

Задача 83

Изделия четырех типов проходят последовательную обработку на двух станках. Время обработки одного изделия каждого типа на каждом из станков приведено в таблице.

Станок	Время обработки одного изделия,			
	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Затраты на производство одного изделия каждого типа определяются как величины, прямо пропорциональные времени использования станков (в машино-часах). Стоимость одного машино-часа составляет 10 долл. для станка 1 и 15 долл.- для станка 2. Допустимое время использования станков ограничено следующими значениями: 500 машино-часов- для станка 1 и 380 машино-часов для станка 2. Цены изделий типов 1, 2, 3 и 4 равны 65, 70, 55 и 45 долл. соответственно. Сформулируйте для приведенных условий задачу максимизации суммарной чистой прибыли.

Задача 84

Завод выпускает изделия трех моделей (I, II и III). Для их изготовления используется два вида ресурсов (А и В), запасы которых составляют 4000 и 6000 единиц. Расход ресурсов на одно изделие каждой модели приведен в таблице.

Ресурс	Расход ресурса на одно изделие данной модели		
	I	II	III
А	2	3	5
В	4	2	7

Трудоемкость изготовления изделия модели I вдвое больше, чем изделия модели II, и втрое больше, чем изделия модели III. Численность рабочих за- вода позволяет выпускать 1500 изделий модели I. Анализ условий сбыта показывает, что минимальный спрос на продукцию завода составляет 200, 200 и 150 изделий моделей I, II и III соответственно. Однако соотношение выпуска изделий моделей I, II и III должно быть равно 3:2:5. Удельные прибыли от реализации изделий моделей I , II и III составляют 30, 20 и 50 долл. соответ- ственно. Сформулируйте для данных условий задачу определения объемов выпуска изделий каждой модели, при которых прибыль будет максимальной.

Задача 85

Денежные средства могут быть использованы для финансирования двух проектов. Проект A гарантирует получение прибыли в размере 70 центов на вложенный доллар через год. Проект B гарантирует получение прибыли в размере 2 долл. на каждый инвестированный доллар, но через два года. При финансировании проекта B период инвестиций должен быть кратным двум годам. Как следует распорядится капиталом в 100 000 долл., чтобы максимизировать суммарную величину прибыли, которую можно получить через три года после начала инвестиций? Сформулируйте задачу ЛП.

Задача 86

Минимально необходимое количество автобусов в i-й час суток равно b_i, i=1, 2, ..., 24. Каждый автобус используется на линии в течении 6 час. Превышение числа автобусов в период i по сравнению с величиной b_i приводит к дополнительным издержкам на один машино-час в размере c_i. Сформулируйте данную задачу как задачу минимизации общей величины дополнительных издержек.

Задача 87

Дано распределения самолетов трех типов по четырем маршрутам.

Характеристики парка самолетов и движения по авиалиниям приведены в таблице.

Тип самолета	Вместимость (число пассажиров)	Колич. самолетов	Количество рейсов в сутки на каждом маршруте			
			1	2	3	4
Продолжение табл.						
1	50	5	3	2	2	1
2	30	8	4	3	3	2
3	30	10	5	5	4	2
Суточный пассажиропоток			100	200	90	120

Тип самолета	Эксплуатационные расходы на 1 рейс			
	1	2	3	4
1	1000	1100	1200	1500
2	800	900	100	1000
3	600	800	800	900
Убыток от неудовлетворенного спроса (на одного неперевезенного пассажира)	40	50	45	70

Необходимо так распределить самолеты по авиалиниям, чтобы суммарные эксплуатационные расходы были минимальны.

Задача 88

Для получения двух сплавов A и B используются четыре металла I, II, III и IV. Требования к содержанию этих металлов в сплавах A и B приведены ниже.

Сплав	Требования к содержанию металлов
A	Не более 80% металла I Не более 30% металла II Не менее 50% металла IV
B	От 40 до 60% металла II Не менее 30% металла III Не более 70% металла IV

Характеристики и запасы руд, из которых получаются металлы I, II, III и IV, указаны в таблице.

Руда	Максимальный запас, т	Состав, %					Цена, долл./т
		I	II	III	IV	Другие компоненты	
1	1000	20	10	30	30	10	30
2	2000	10	20	30	30	10	40
3	3000	5	5	70	20	0	50

Пусть цена 1 т сплава A равна 200 долл., а 1 т сплава B- 300 долл. Сформулируйте задачу ЛП, в которой требуется максимизировать прибыль от продажи сплавов A и B.

Задача 89

Фирма производит две модели A и B сборных книжных полок. Их производство ограничено наличием сырья (высококачественных досок) и временем машинной обработки. Для каждого изделия модели A требуется 3 м^2. досок, а для изделия B- 4 м^2. Фирма может получить от своих поставщиков до 1700 м^2. досок в неделю. Для каждого изделия модели A требуется 12 мин. машинного времени, а для изделия модели B- 30 мин. В неделю можно использовать 160 ч. машинного времени. Сколько изделий каждой модели следует выпускать в неделю, если каждое изделие модели A приносит 2 ден.ед. прибыли, а каждое изделие модели B- 4 ден. ед. прибыли?

Задача 90

Процесс изготовления двух видов промышленных изделий состоит

в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 ч. в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия приведены в таблице. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида.

Изделие	Время обработки 1 изделия,			Удельная прибыль
	Станок 1	Станок 2	Станок 3	
1	10	6	6	2 долл.
2	5	20	15	3 долл.

Задача 91

Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионную сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 1000 долл. в месяц. Каждая минута радио- рекламы обходится в 5 долл., а каждая минута телерекламы в 100 долл. Фирма хотела бы использовать радиосеть по крайней мере в два раза чаще, чем сеть телевидения. Опыт прошлых лет показал, что объем сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определите оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на рекламу, между радио и телерекламой.

Задача 92

Фирма планирует рекламную кампанию нового продукта. Отведенный на эти цели бюджет составляет 120 000 руб. Предполагается, что тираж рекламных объявлений должен составить не менее 800 млн. экземпляров; объявления будут размещены в шести изданиях: Издание1, Издание2, ..., Из- дание6. Каждое издание имеет свой тираж(см. табл.). Фирма подсчитала стоимость размещения рекламы в одном выпуске издания (см. табл.). необходимо распространить рекламу с минимальными издержками при следующих дополнительных ограничениях:

а). В каждом издании реклама должна пройти в шести или более выпусках

б). На любое издание может быть истрачено не более одной трети отпущенной суммы.

в). Общая стоимость рекламы в третьем и четвертом изданиях не должна превышать 75 000 руб.

№ Изд.	Стоимость размещения рекламы в одном выпуске издания (руб.)	Тираж одного выпуска (млн.)
1	1474,2	9,9
2	1244,1	8,4
3	1131	8,2
4	700,7	5,1
5	530	3,7
6	524,4	3,6

Задача 93

Фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевизора, радио, газет и афиш. Из различных рекламных экспериментов, которые проводились в прошлом, известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 3, 7 и 4 ден. ед. в расчете на 1 ден.ед., затраченную на рекламу.

Распределение рекламного бюджета по различным средствам подчинено следующим ограничениям:

а) полный бюджет не должен превосходить 500 000 ден.ед.;

б) следует расходовать не более 40 % бюджета на телевидение и не более 20 % бюджета на афиши;

в) вследствие привлекательности для подростков радио на него следует расходовать по крайней мере половину того, что планируется на телевидение.

Сформулируйте задачу распределения средств по различным источникам как задачу линейного программирования и решите ее.

Задача 94

Фирма производит два вида продукции- А и В. Объем сбыта продукции вида А составляет не менее 60% общего объема реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции А и В используется одно и то же сырье, суточный запас которого ограничен величиной 100 фунтов. Расход сырья на единицу продукции А составляет 2 фунта, а на единицу продукции

В- 4 фунта. Цены продукции А и В 20 и 40 долл. соответственно. Определите оптимальное распределение сырья для изготовления продукции А и В.

Задача 95

Фирма производит два продукта А и В, рынок сбыта которых неограничен. Каждый продукт должен быть обработан каждой из машин I, II , III.

Время обработки в часах для каждого из изделий приведено ниже:

	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

Время работы машин I, II , III соответственно 40, 36 и 36 ч. в неделю.

Прибыль от изделий А и В составляет соответственно 5 и 3 долл. Фирме надо определить недельные нормы выпуска изделий А и В, максимизирующие прибыль. Сформулируйте эту задачу как задачу линейного программирования и решите ее.

Задача 96

Фирме требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03% и долей зольных примесей не более 3,25%. Три сорта А, В, С, доступны по следующим ценам (за одну т.):

Сорт угля	Содержание примеси фосфора, %	Содержание примесей	Цена, долл.
А	0,06	2,0	30

B	0,04	4,0	30
C	0,02	3,0	45

Как их смешивать, чтобы получить минимальную цену и удовлетворить ограничения на содержания примесей?

Задача 97

Средства очистки пола оценены по трем параметрам:

а) очищающие свойства,

б) дезинфицирующие свойства,

в) Раздражающее воздействие на кожу.

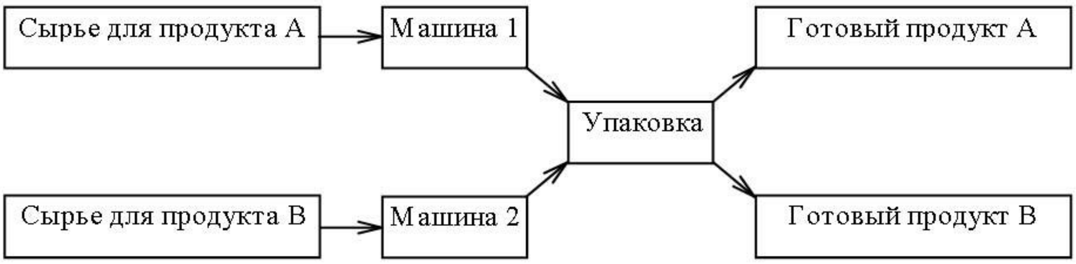
Продукт на рынке должен иметь по крайней мере 60 ед. очищающих свойств и по крайней мере 60 ед. дезинфицирующих свойств по соответствующей шкале. При этом раздражающее воздействие на кожу должно быть минимальным. Конечный продукт должен быть смесью трех основных очистителей, характеристики которых приводятся в таблице.

Очиститель	Очищающие свойства	Дезинфицирующие свойства	Раздражающее воздействие на кожу
A	90	30	70
B	65	85	50
C	45	70	10

Сформулируйте задачу нахождения оптимальной смеси, как задачу линейного программирования.

Задача 98

Фирма производит два продукта A и B, продаваемых соответствен- но по 8 и 15 центов за упаковку; рынок сбыта для каждого из них практически не ограничен. Продукт A обрабатывается на машине 1, продукт B- на машине 2. Затем оба упаковываются на фабрике (см. рис.). 1 кг. сырья стоит 6 центов; машина 1 обрабатывает 5000 кг. в 1 ч. с потерями 10%. Машина 2 обрабатывает 400 кг. в 1 ч. и с потерями 20%. Машина 2 доступна 5 ч. в день и ее использования стоит 336 долю в 1 ч. Упаковка продукта A весит 1/4 кг., а упаковка продукта B- 1/3 кг. Фабрика может работать 10 ч. в день, производя в 1 ч. продукции стоимостью 3600 долл. За 1 ч. можно упаковать 12000 продуктов A и 8000 продуктов B.



Компания хочет определить такие объемы потребления сырья продуктов A и B (в тыс. кг.), при которых дневная прибыль максимальна. Сформулируйте задачу линейного программирования и решите ее.

Задача 99

В некоторой местности в двух пунктах A и B имеется потребность в дополнительном транспорте. В пункте A требуется 5 дополнительных автобусов, а в пункте B- 7. Известно, что 3, 4, 5 автобусов могут быть получены соответственно из гаражей G1, G2, G3.

Как следует распределить эти автобусы между пунктами A и B, чтобы минимизировать их суммарный пробег? Расстояния от гаражей до пунктов A и B приведены в таблице:

Гараж	Расстояния до пунктов	
	A	B
G1	3	4
G2	1	3
G3	4	2

Задача 100

Компания производит полки для ванных комнат двух размеров A и B. Агенты по продаже считают, что в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок. Для каждой полки типа A требуется 2 м^2. материала, а для полки типа B- 3 м^2. материала в неделю. Для изготовления 1 полки типа A требуется 12 мин. машинного времени, а для изготовления одной полки типа B- 30 мин.; можно использовать 160 ч. машинного времени в неделю. Если прибыль от продажи полок типа А составляет 3 долл., а от полок типа В- 4 долл., то сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю?

Задача 101

Автозавод выпускает 2 модели: “Каприз” и (более дешевую) “Фиаско”. На заводе работает 1000 неквалифицированных и 800 квалифицированных рабочих, каждому из которых оплачивается 40 ч. в неделю Для изготовления модели “Каприз” требуется 30 ч. неквалифицированного и 50 ч. квалифицированного труда; “Фиаско” требуется 40 ч. неквалифицированного и 20 ч. неквалифицированного труда. Каждая модель “Фиаско” требует затрат в размере 500 долл. на сырье и комплектующие изделия, тогда как каждая модель “каприз” требует затрат в размере 1500 долл.; суммарные затраты не должны превосходить 900 000 долл. в неделю. Рабочие, осуществляющие доставку, работают по 5 дней в неделю и могут забрать с завода не более 210 машин в день.

Каждая модель “Каприз” приносит фирме 1000 долл. прибыли, а каждая модель “Фиаско”- 500 долл. прибыли. Какой объем выпуска каждой модели вы бы порекомендовали? Что бы вы порекомендовали для повышения прибыли фирмы?

Задача 102

Заводы фирмы расположены в городах Лидсе и Кардиффе; они доставляют товары на склады городов Манчестер, Бирмингем и Лондон. Рас- стояния между этими городами приведены в таблице (расстояния округлены

до десятков миль):

	Манчестер	Бирмингем	Лондон
Лидс	40	110	190
Кардифф	170	100	150

а) Завод в г. Лидсе выпускает в год 800 т. товаров, а в г. Кардиффе- 500 т. Манчестерский склад вмещает 400 т., бирмингемский - 600 т., а лондонский - 300 т. Как следует транспортировать товары для минимизации цен на перевозки?

б) На дороге Лондон- Кардифф ведутся работы, удваивающие стоимость перевозок по ней. Как бы вы пересмотрели расписание?

Задача 103

Фирма производит три вида продукции (А, В, С), для выпуска каждого из которых требуется определенное время обработки на всех четырех устройствах I, II, III, IV.

Вид	Время обработки,				Прибыль,
	I	II	III	IV	
A	1	3	1	2	3
B	6	1	3	3	6
C	3	3	2	4	4

Пусть время работы на устройствах- соответственно 84, 42, 21 и 42 ч.

Определите, какую продукцию и в каких количествах следует производить. (Можете предположить, что рынок сбыта для каждого продукта неограничен; временем, требуемым для переключения устройства в зависимости от вида продукции, можно пренебречь; рассмотрите только задачу максимизации прибыли.)

Задача 104

Производитель безалкогольных напитков располагает двумя разливочными машинами А и В. Машина А спроектирована для пол-литровых бутылок, а машина В- для литровых, но каждая из них может использоваться для обоих типов бутылок с некоторой потерей эффективности в соответствии с приведенными в таблице сведениями о работе машин.

Машина	Количество бутылок, производимых в 1 мин.	
	Пол-литровые бутылки	Литровые бутылки
A	50	20
B	40	30

Каждая из машин работает ежедневно по 6 ч. при пятидневной рабочей неделе. Прибыль от пол-литровой бутылки составляет 4 цента, а от литровой - 10 центов. Недельная продукция не может превосходить 50000 л.; рынок принимает не более 44000 пол-литровым бутылок и 30000 литровых.

Производитель хочет максимизировать свою прибыль при имеющихся средствах. Сформулируйте задачу в виде задачи линейного программирования и найдите оптимальное решение.

Задача 105

Производитель элементов центрального отопления изготовляет радиаторы четырех моделей. Ограничения на производство обусловленных количеством рабочей силы и количеством стальных листов, из которых изготовляются радиаторы.

Модель радиатора	A	B	C	D
Продолжение табл.				
Необходимое количество рабочей силы, человеко-часы	0,5	1,5	2	1,5
Необходимое количество стального листа, м^2.	4	2	6	8
Прибыль от продажи одного радиатора, долл.	5	5	12,5	10

В каких объемах выпускать продукцию, чтобы прибыль от продажи была максимальной?

Задача 106

Небольшая фирма производит два типа подшипников А и В, каждый из которых должен быть обработан на трех станках, а именно на токарном, шлифовальном и сверлильном. Время, требуемое для каждой из стадий производственного процесса, приведено в таблице.

Тип подшипника	Время обработки, ч.			
	Токарный станок	Шлифовальный станок	Сверлильный ста-нок	Прибыль от продажи одного подшипника, центы
А	0,01	0,02	0,04	80
Б	0,02	0,01	0,01	125
полное возможное время работы в неделю, ч.	160	120	150	

Фирма хотела бы производить подшипники в количествах, максимизирующих ее прибыль. Сформулируйте задачу как задачу линейного программирования и решите ее.

Задача 107

Фирма занимается составлением диеты, содержащей по крайней мере 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 10 единиц жиров и 40 единиц витаминов. Как дешевле всего достичь этого при указанных в таблице ценах на 1 кг. (или 1 л.) пяти имеющихся продуктов?

	Хлеб	Соя	Сушеная рыба	Фрукты	Молоко
Белки	2	12	10	1	2
Углеводы	12	0	0	4	3
Жиры	1	8	3	0	4
Витамины	2	2	4	6	2
Цена	12	36	32	18	10

Задача 108

Нефтяная компания закупает необработанную нефть из нескольких источников W, X, Y и Z и занимается ее очисткой, вырабатывая различные виды A, B и C, смазочных масел, готовых к продаже. Имеются также ограничения при продаже на количество каждого вида смазочных масел.

Масло	Состав, %	Возможное количество для продажи, галлоны
Продолжение табл.		
A	Не меньше 10 (W) Не больше 25 (Z)	90 000
B	Не меньше 15 (W)	100 000

C	Не меньше 20 (X) Не больше 50 (Y)	120 000

Цены (в условных единицах) 1 галлона сырья и смазочных масел приведены ниже.

Сырье				Масло		
X	Y	Z	W	A	B	C
72	60	67	75	90	87	84

Предполагая, что необработанная нефть доступна в неограниченном количестве, сформулируйте задачу максимизации прибыли как задачу линейного программирования и найдите ее оптимальное решение.

Задача 109

Ткацкая фабрика должна работать 24 ч. в сутки согласно следующей таблице:

Время суток, ч.	2-6	6-10	10-14	14-18	18-22	22-02
Минимальное необходимое количество ткачей	4	8	10	7	12	4

Каждый ткач должен работать подряд 8 ч. в день. Найдите минимальное необходимое количество ткачей, удовлетворяющее перечисленным требованиям.

Задача 110

Намечается выпуск двух типов костюмов- мужских и женских. На женский костюм требуется один метр шерсти, 2 м. лавсана и 1 человеко-день трудозатрат; для мужского костюма- 3,5 м. шерсти 0,5 м. лавсана и тоже 1 человеко-день трудозатрат. На пошив этих костюмов имеется 350 м. шерсти, 240 м. лавсана и 150 человеко-дней трудозатрат. По плану костюмов не должно быть менее 110 штук и необходимо обеспечить прибыль не менее 1400 руб. Требуется определить оптимальное число костюмов каждого вида, обеспечивающее максимальную прибыль, если прибыль от реализации женского костюма составляет 10 руб. а от мужского- 20 руб.

Задача 111

Пусть некоторое предприятие располагает возможностями для производства четырех видов продукции при потреблении трех видов материалов. Нормы расхода материалов, объемы материальных ресурсов и прибыль от реализации единицы продукции каждого вида приведены в таблице.

Вид продукции	Норма расхода материалов на единицу			Прибыль от реализации Единицы продукции
	1	2	3	
А	7	5	2	3
Б	2	8	4	4
В	2	4	1	3
Г	6	3	8	1
Ресурсы материалов	80	480	130	

Службе маркетинга предприятия необходимо проверить, будет ли оптимальным в данных условиях план выпуска 30 единиц продукции Б и 10 единиц продукции В (продукция видов А и Г не выпускается) по критерию максимума прибыли. Кроме того, требуется определить степень дефицитности имеющихся материалов и оценить влияние на максимальный размер прибыли предполагаемого изменения объемов ресурсов: увеличения ресурса материала 1 на 3 единицы, уменьшение ресурса материала 2 на 10 единиц и уменьшение ресурса материала 3 на 6 единиц.

Задача 112

В изготовленном на предприятии бензине А-76 октановое число должно быть не ниже 76, а содержание серы не более 0,3%. Данные об используемых компонентах приведены в таблице.

Показатель	Компоненты автомобильного бензина			
	1	2	3	4

Октановое число	68	72	80	90
Содержание серы, %	0,35	0,35	0,3	0,2
Ресурсы, т.	700	600	500	300
Себестоимость	40	45	60	90

Требуется определить, сколько тонн каждого компонента нужно взять для получения 1000 т. бензина А

Задача 113

Снабженческо-сбытовая фирма получает от поставщиков прутки стального проката длиной 600 см. Согласно заявкам потребителей, требуются заготовки трех видов в следующих количествах: 150 тыс. шт. длиной 250 см., 140 тыс. шт. длиной 190 см. и 48 тыс. шт. длиной 100 см. В таблице приведены возможные варианты раскроя, при этом в первом блоке имеют место варианты раскроя, дающие все три вида заготовок, во втором - дающие заготовки второго и третьего вида, а в третьем - дающие заготовки только третьего вида.

Блок	Номер варианта (j)	Количество заготовок (a_{ij})			Остаток (c_j)
		l_1= 250 см.	l_2= 190 см.	l_3= 100 см.	
I	1	2	-	1	-
	2	1	1	1	60
II	3	-	3	-	30
	4	-	2	2	20
	5	-	1	4	10
III	6	-	-	6	-

13 Варианты заданий для самостоятельного решения

N варианта	1 задача	2 задача	3 задача	4 задача	5 задача
1	71	8	21	58	108
2	92	29	42	79	16
3	73	10	23	60	110
4	76	13	26	63	113
5	96	33	46	83	20
6	56	106	6	43	93
7	67	4	17	54	104
8	91	28	41	78	15
9	66	3	16	53	103
10	52	102	2	39	89
11	81	18	31	68	5
12	87	24	37	74	11
13	83	20	33	70	7
14	99	36	49	86	23
15	51	101	1	38	88
16	58	108	8	45	95
17	63	113	13	50	100
18	100	37	50	87	24
19	86	23	36	73	10
20	93	30	43	80	17
21	75	12	25	62	112
22	88	25	38	75	12
23	79	16	29	66	3
24	62	112	12	49	99
25	65	2	15	52	102
26	95	32	45	82	19
27	59	109	9	46	96
28	61	111	11	48	98
29	70	7	20	57	107
30	68	5	18	55	105
31	72	9	22	59	109
32	78	15	28	65	2
33	60	110	10	47	97
34	77	14	27	64	1
35	94	31	44	81	18
36	84	21	34	71	8
37	85	22	35	72	9
38	89	26	39	76	13
39	82	19	32	69	6
40	69	6	19	56	106
41	90	27	40	77	14
42	64	1	14	51	101
43	55	105	5	42	92
44	74	11	24	61	111
45	57	107	7	44	94
46	98	35	48	85	22
47	97	34	47	84	21
48	54	104	4	41	91
49	80	17	30	67	4
50	53	103	3	40	90

14 Глоссарий терминов.

Адаптивная система — *кибернетическая система*, способная сохранять достигать цели управления при непредвиденных изменениях свойств управляемой подсистемы, цели управления или условий среды. По способам адаптации подразделяются на самонастраивающиеся системы, самообучающиеся системы, самоорганизующиеся системы.

Аддитивность - свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям при любом разбиении объекта на части. Характеристика системы аддитивна, если она равна сумме тех же характеристик для всех составляющих систему подсистем и элементов.

Адекватность модели - ее соответствие моделируемому объекту или процессу. При моделировании имеется в виду адекватность не вообще, а по тем свойствам мо-дели, которые для исследования считаются существенными.

Аксиома (в теории формальных систем) — *формула*, которая признаётся принадлежащей *формальной теории* в отсутствие *доказательства*.

Аппроксимация - приближенное выражение сложной функции с помощью более простых, что часто значительно упрощает решение задачи.

Вариантные прогнозы - прогнозы, основанные на сопоставлении различных вариантов возможного развития экономики при разных предположениях относительно того, как будет развиваться техника, какие будут приниматься экономические меры и т. д.

Векторная оптимизация - решение задач математического программирования, в которых критерий оптимальности представляет собой вектор, компонентами которого являются в свою очередь различные несводимые друг к другу критерии оптимальности подсистем, входящих в данную систему, например критерии разных социальных групп в социально-экономическом планировании.

Вербальное определение — определение с использованием изобразительных средств естественного языка.

Верификация имитационной модели - проверка соответствия ее поведения предположениям экспериментатора.

Вероятностная модель - модель, которая в отличие от детерминированной модели содержит случайные элементы. Таким образом, при задании на входе модели некоторой совокупности значений, на ёе выходе могут получаться различающиеся между собой результаты в зависимости от действия случайного фактора.

Взаимозаменяемость ресурсов - возможность использования разных ресурсов для достижения оптимума. Именно этим обусловлена проблема выбора: там, где нет заменяемости, нет и выбора, и тогда фундаментальное понятие оптимальности теряет смысл.

Вырожденный опорный план - опорный план, число ненулевых компонент которого меньше числа ограничений.

Генетический прогноз («поисковый») - прогноз, показывающий, к каким состояниям придет прогнозируемый объект в заданное время при определенных начальных условиях.

Геометрическое программирование. Под задачами геометрического программирования понимают задачи наиболее плотного расположения некоторых объектов в заданной двумерной или трехмерной области. Такие задачи встречаются в задачах раскроя материала для производства каких-то изделий и т.п. Это - еще недостаточно разработанная область математического программирования и имеющиеся здесь алгоритмы в основном ориентированы на сокращение перебора вариантов с поиском локальных минимумов.

Геометрическое решение игры - нахождение решения игры посредством представления данных задачи в виде геометрических фигур на координатной плоскости.

Глобальное моделирование или моделирование глобального развития - область исследований, посвященная разработке моделей наиболее масштабных социальных, экономических и экологических процессов, охватывающих земной шар.

Гомеостаз — состояние самоорганизующейся системы, в котором значения переменных системы поддерживаются в пределах их допустимых значений, при которых сохраняется структура системы, за счёт протекающих в ней процессов управления.

Гомоморфизм (в теории систем) — логико-математическое понятие, означающее одностороннее отношение подобия между двумя системами. Систему называют гомоморфной другой системе, если первая обладает некоторыми, но не всеми, свойствами или законами поведения другой.

Градиентные методы решения задач математического программирования - методы, основанные на поиске экстремума (максимума или минимума) функции путем последовательного перехода к нему с помощью градиента этой функции.

Граф это множество точек или вершин и множество линий или ребер, соединяющих между собой все или часть этих точек.

Декомпозиционные методы решения оптимальных задач - основанные на рациональном расчленении сложной задачи и решении отдельных подзадач с последующим согласованием частых решений для получения общего оптимального решения.

Декомпозиция — метод исследования систем, состоящий в её разделении на элементы, каждый из которых обладает свойствами системы, и последующем независимом изучении каждого из этих элементов.

Дескриптивная модель - модель, предназначенная для описания и объяснения наблюдаемых фактов или прогноза поведения объектов - в отличие от нормативных моделей, предназначенных для нахождения желательного состояния объекта (например, оптимального).

Дескриптивное определение — определение, содержащее идентифицирующие признаки (указания на отличия или особенности) класса объектов, соответствующих определению. Ср. *конструктивное определение*.

Детерминированная модель - аналитическое представление закономерности, операции и т. п., при которых для данной совокупности входных значений на выходе системы может быть получен единственный результат. Такая модель может отображать как вероятностную систему (тогда она является некоторым ее упрощением), так и детерминированную систему.

Детерминированная система - такая система, выходы которой (результаты действия, конечные состояния и т.п.) однозначно определяются оказанными на нее управляющими воздействиями.

Динамическая система - всякая система, которая изменяется во времени (в отличие от статической системы). Математически это принято выражать через переменные (координаты), изменяющиеся во времени. Процесс изменения характеризуется траекторией (т. е. наборами координат, каждая из которых является функцией времени).

Динамическое программирование ("динамическое планирование") есть особый метод оптимизации решений, специально приспособленный к многоэтапным, многостадийным процессам, которые характеризуются последовательностью решений и тем, что состояние системы зависит только от предыдущего шага, т.е. не зависит от ранее сделанных шагов. Другими словами ДП служит для выбора наилучшего плана выполнения многоэтажных действий.

Динамическое программирование. Для отыскания оптимального решения планируемая операция разбивается на ряд шагов (этапов) и планирование осуществляется последовательно от этапа к этапу. Однако выбор метода решения на каждом этапе производится с учетом интересов операции в целом.

Задачами теории массового обслуживания является анализ и исследование явлений, возникающих в системах обслуживания. Одна из основных задач теории заключается в определении таких характеристик системы, которые обеспечивают заданное качество функционирования, например, минимум времени ожидания, минимум средней длины очереди.

Знание— информация о связях между переменными исследуемой системы, используемая для предвидения её реакции на внешние воздействия.

Игра - математическая модель конфликтной ситуации, ***стороны***, участвующие в конфликте, называются ***игроками***, а ***исход*** конфликта - ***выигрышем***.

Изоморфизм— логико-математическое понятие, означающее отношение взаимного подобия двух систем.

Имитационное моделирование — процесс разработки математических моделей реальных объектов в случае, когда цели последующего использования моделей не вполне определены. Как правило, имитационное моделирование предполагает постановку многочисленных вычислительных экспериментов на математических моделях и последующую статистическую обработку полученных результатов.

Интерпретация — отношение, отображающее формулы одной *формальной системы* на формулы другой формальной системы; отношение, отображающее формулы формальной системы на переменные и связи реальной системы.

Исследование операций - **Исследование операций представляет собой комплекс научных принципов и методов, предназначенных для решения задач, связанных с функционированием систем, с целью предоставить оптимальные решения поставленных задач тем, кто отвечает за управление данными системами.**

Итеративные (итерационные) методы решения задач - заключаются в том, что вычислительный процесс начинают с некоторого пробного (произвольного) допустимого решения, а затем применяют алгоритм, обеспечивающий последовательное улучшение этого решения.

Итерация - повторное применение математической операции (с измененными данными) при решении вычислительных задач для постепенною приближения к нужному результату. Итеративные расчеты на ЭВМ характерны для решения экономических (особенно оптимизационных и балансовых) задач. Чем меньше требуется пересчетов, тем быстрее сходится алгоритм.

Канонической форма задачи ЛП является задачей на максимум (минимум) некоторой линейной функции F, ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений). При этом переменные задачи $x_1, x_2, ..., x_n$ являются неотрицательными.

Кибернетика - наука об управлении, связи и переработке информации. Основным объектом исследования кибернетики являются абстрактные кибернетические системы: от компьютеров до человеческого мозга и человеческого общества. В зависимости от области применения различают политическую, экономическую и социальную кибернетику.

Кибернетическая система — система, рассматриваемая с точки зрения протекающих в ней информационных процессов управления.

Компьютерная модель — это модель, реализованная средствами программной среды.

Конструктивное определение — определение, содержащее генетические признаки (указания на способ возникновения или создания) класса объектов, соответствующих определению. Ср. *дескриптивное определение*.

Критерий оптимальности - показатель, выражающий меру экономического эффекта принимаемого хозяйственного решения для сравнительной оценки возможных решений (альтернатив) и выбора наилучшего из них (например, максимум прибыли, минимум трудовых затрат, кратчайшее время достижения цели и т. д.)

Критичность означает чувствительность к изменениям исследуемых параметров; чем эта критичность выше, тем лучше.

Линейное программирование состоит в нахождении экстремального значения линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, связывающих эти переменные.

Личный ход — это сознательный выбор игроком одного из возможных действий.

Максиминная стратегия - стратегия игрока, при которой он стремится сделать минимальный выигрыш максимальным, т. е. получить наилучшую выгоду в наихудших условиях.

Математическая модель - модель объекта, процесса или явления, представляющая собой математические закономерности, с помощью которых описаны основные характеристики моделируемого объекта, процесса или явления.

Математические модели - это математические соотношения, описывающие изучаемый процесс или явление. Они более общи и абстрактны, чем предыдущие и позволяют проводить исследования в широком диапазоне изменения переменных, предсказывать последствия. Очень важно то, что при реализации математического моделирования можно широко применять ЭВМ.

Математические моделирование – наука, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее оптимального управления организационными системами.

Математическое программирование (оптимальное программирование) - область математики, объединяющая различные математические методы и дисциплины: линейное программирование, нелинейное программирование, динамическое программирование, выпуклое программирование и др. Общая задача математического программирования состоит в нахождении оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции, причем значения переменных должны принадлежать некоторой области допустимых значений.

Матричные игры - это игры, математические модели которых можно представить в виде матриц.

Матричные модели - модели, построенные в виде таблиц (матриц). Они отображают соотношения между затратами на производство и его результатами, нормативы затрат, производственную и экономическую структуру хозяйства. Применяются в межотраслевом балансе, матричном плане предприятия и др.

Машинная имитация - экспериментальный метод изучения объекта с помощью электронных вычислительных машин, Процесс имитации заключается в следующем: сна-чала строится математическая модель изучаемого объекта (имитационная модель), затем эта модель преобразуется в программу работы ЭВМ.

Метаязык — *формальная система*, используемая в качестве средства определения другой формальной системы.

Метод - в широком смысле - способ познания явлений природы и общественной жизни с целью построения и обоснования системы знаний. Метод - в узком смысле - регулятивная норма или правило, определенный путь, способ, прием решений задачи теоретического, практического, познавательного, управленческого, житейского характера.

Метод аппроксимации Фогеля - один из группы методов определения первоначального опорного плана транспортной задачи.

Метод двойного предпочтения - один из группы методов определения первоначального опорного плана транспортной задачи.

Метод минимальной стоимости - один из группы методов определения первоначального опорного плана транспортной задачи. Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_i , или b_j.

Метод потенциалов - один из методов проверки опорного плана транспортной задачи на оптимальность.

Метод северо-западного угла - один из группы методов определения первоначального опорного плана транспортной задачи.

Минимаксная стратегия - стратегия игрока, при которой он стремится сделать максимальный проигрыш минимальным.

Моделирование – это изучение объекта путем построения и исследования его модели, осуществляемое с определенной целью и состоит в замене эксперимента с оригиналом экспериментом на модели.

Моделированием называется исследование явлений реального мира на моделях. В общем случае модель это отображение изучаемого явления, сохраняющее его наиболее существенные свойства.

Модель – материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале.

Модель - это используемый для предсказания и сравнения инструмент, позволяющий логическим путем прогнозировать последствия альтернативных действий и достаточно уверенно указать, какому из них отдать предпочтение.

Нелинейное программирование. Целевая функция и ограничения могут быть нелинейными функциями.

Нелинейные динамические системы — класс динамических систем, связи между переменными которых принципиально не могут быть описаны в линейной форме без утраты присущих им существенных свойств. *Диссипативные структуры* являются нелинейными динамическими системами.

Неустойчивое равновесие — состояние системы, некоторые фазовые траектории в окрестности которого в достаточно близком будущем являются расходящимися. См. *Бифуркация*.

Обратная связь — отношение, ставящее состояние управляющей подсистемы *кибернетической системы* в зависимость от значений выходных переменных её управляемой подсистемы.

Объективно обусловленные (оптимальные) оценки - одно из основных понятий линейного программирования. Это оценки продуктов, ресурсов, работ, вытекающие из условий решаемой оптимизационной задачи. Их называют также двойственными оценками, разрешающими множителями, множителями Лагранжа и целым рядом других терминов.

Ограничения модели - запись условий, в которых действительны расчеты, использующие эту модель. Обычно представляя собою систему уравнений и неравенств, они в совокупности определяют область допустимых решений (допустимое множество). Распространены линейные и нелинейные ограничения (на графике первые изображаются прямыми, вторые - кривыми линиями).

Определенность в системе - ситуация, когда имеется точная информация о возможных состояниях системы в случае принятия тех или иных решений.

Оптимальное планирование - комплекс методов, позволяющих выбрать из многих возможных (альтернативных) вариантов плана или программы один оптимальный вариант, т. е. наилучший с точки зрения заданного критерия оптимальности и определенных ограничений.

Оптимальное программирование - применение в экономике методов математического программирования.

Оптимальное решение - это такое решение, при котором обеспечивается максимум (минимум) некоторого критерия при заданной системе ограничений.

Оптимальное управление - основное понятие математической тео-рии оптимальных процессов (принадлежащей разделу математики под тем же названием: оптимальное управление); означает выбор таких управляющих параметров, которые обеспечивали бы наилучшее, с точки зрения заданного критерия, протекание процесса, или, иначе, наилучшее поведение системы, ее развитие к цели по оптимальной траектории.

Оптимальной стратегией называется стратегия которая превращает в min или max целевую функцию.

Оптимальный план ЗЛП - решение задачи линейного программирования, т. е. такой план, который входит в допустимую область и доставляет экстремум целевой функции.

Оптимизационная задача - экономико-математическая задача, цель которой состоит в нахождении наилучшего (с точки зрения какого-то критерия) распределения наличных ресурсов. Решается с помощью оптимизационной модели методами математического программирования.

Оптимизация - 1) процесс нахождения экстремума функции, т. е. выбор наилучшего варианта из множества возможных; 2) процесс приведения системы в наилучшее (оптимальное) состояние. Очередь - в теории массового обслуживания - последовательность требований или заявок, которые, заставая систему обслуживания занятой, не выбывают, а ожидают ее освобождения (затем они обслуживаются в том или ином порядке). Очередью можно назвать также и совокупность ожидающих (простаивающих) каналов или средств обслуживания.

Организованность — свойство системы, проявляющееся в изменении соотношения между нарастанием сложности системы и совершенствованием её структуры. Согласно Н. Винеру, количество информации в системе есть мера её организованности.

Открытая ТЗ - если общее количество груза в пунктах отправления и общая потребность в пунктах назначения не совпадают ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$)

Очень сложная система — система, в которой на современном уровне развития науки невозможно установить значительную часть структурных связей между её элементами в связи с их не вполне изученной физической природой, разнообразием и непредсказуемостью проявления. Как правило, возможности предсказания поведения и развития очень сложных систем весьма ограниченны, однако некоторые (далеко не все и не всегда самые существенные) закономерности их функционирования поддаются познанию. Примеры очень сложных систем — экономика страны, биогеоценоз, человеческий мозг, глобальная вычислительная сеть.

Пассивный (безусловный) статистический прогноз - прогноз развития, основанный на изучении статистических данных за прошлый период и переносе выявленных закономерностей на будущее. При этом внешние факторы, воздействующие на систему, принимаются неизменными и считается, что ее развитие основывается только на собственных, внутренних тенденциях.

Переходный процесс — процесс, характеризующийся фазовой траекторией, касательная к которой выходит за пределы допустимых значений некоторых переменных в достаточно малой окрестности некоторого момента времени. Особенность переходного процесса состоит в том, что он не может поддерживаться сколь угодно долго.

Периодический процесс — процесс, характеризующийся периодической повторяемостью значений некоторых фазовых переменных во времени.

Платежная матрица игры - матрица размерности ***m*** на ***n***, ***i = 1, ..., n, j = 1, ..., m***, (*i*,*j*)-ый элемент которой значение выигрыша (приигрыша) игроков в случае i-го хода первого игрока и j-го хода второго игрока.

Поведение — процесс изменения состояния системы с течением времени.

Правило вывода (в теории формальных систем) — формальное правило получения новых теорем на основе формул, относительно которых уже известно, что они являются теоремами.

Предельные и приростные величины в экономике. Предельная величина характеризует не состояние (как суммарная или средняя величины), а процесс, изменение. Поскольку в экономике большинство процессов (например, рост производства или изменение его эффективности) являются функциями ряда аргументов (факторов), то предельные величины здесь обычно выступают как частные производные процесса по каждому из факторов.

Предикат — в логике — один из двух терминов суждения, а именно тот, в котором что-то утверждается относительно предмета речи (субъекта); в математической логике и теории формальных систем — функция, значениями которой являются высказывания.

Предмет теории игр принятие решений в условиях неопределенности, в условиях столкновения, конфликтных ситуациях, когда принимающий решение субъект (игрок), располагает информацией лишь о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он в действительности находится, о множестве решений, которые он может принять, и о количественной мере того выигрыша, который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации данную стратегию.

Представительность означает, что критерий должен строго отражать конечную цель исследуемой операции и обеспечивать принятие оптимальных решений. Т.е он должен позволять оценить эффективность решения основной задачи операции, а не второстепенных ее задач. Цель операции должна находить свое прямое отображение в критерии.

Представление знаний — область человеческой деятельности, связанная с преобразованием накопленных знаний в форму, допускающую их последующее использование без посредничества лиц, осуществивших данное преобразование (например, в процессе работы экспертной, советующей системы или компьютерной системы поддержки принятия решений).

Принцип вложения второй основной принцип гласит, что природа задачи, допускающей решение методом динамического программирования не меняется при изменении количества этапов, т.е. форма задачи инвариантна относительно числа этапов.

Принцип комплексности — принцип тесной увязки решения экономических, социальных, политических и идеологических проблем. В теории систем подразумевает сочетание подходов, присущих разным научным дисциплинам, для изучения связей соответствующей природы, присутствующих в одной и той же сложной или очень сложной системе.

Принцип максимальной энтропии — принцип моделирования систем, состоящий в определении значений их ненаблюдаемых параметров, максимизирующих неопределённость состояния системы в рамках известных структурных связей между её переменными. Следование данному принципу позволяет объективно отразить степень неопределённости знания о данной системе и получить оценки её ненаблюдаемых параметров, наилучшим образом согласующиеся с имеющимся знанием и опытными фактами наблюдений поведения системы.

Принцип оптимальности динамического программирования - каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая выигрыш на данном шаге. Простая цепь - маршрут, в котором все вершины попарно различны.

Принцип оптимальности формулируется в следующем виде: оптимальная стратегия обладает таким свойством, что, каково бы ни было начальное состояние и начальное решение, последующие решения должны приниматься, исходя из оптимальной стратегии относительного состояния, получаемого в результате первого решения.

Принцип полного использования информации — принцип системного анализа, состоящий в том, что для выявления связей между переменными или структурными элементами системы следует использовать все доступные источники знаний об исследуемых связях, а значит, применять такие формализмы, которые позволяют представить знания всех имеющихся видов, в том числе неполные и неточные, с учётом их достоверности.

Принцип системности — принцип исследования реальных и идеальных объектов, предполагающий их представление в форме систем. Следование данному принципу требует выделять элементы исследуемой системы, выявлять и изучать связи между элементами, представлять знания о выявленных связях в форме модели с последующим её использованием для синтеза новых объектов, обладающих желаемыми свойствами.

Прогнозирование - система научных исследований качественного и количественного характера, направленных на выяснение тенденций развития народного хозяйства и поиск *оптимальных* путей достижения *целей* этого развития.

Прогнозирование спроса - исследование будущего (возможного) спроса на товары и услуги в целях лучшего обоснования соответствующих производственных планов. Прогнозирование подразделяется на краткосрочное (конъюнктурное), среднесрочное и долгосрочное.

Производственная функция - экономико-математическое уравнение, связывающее переменные величины затрат (ресурсов) с величинами продукции (выпуска). Математически производственные функции (ПФ) могут быть представлены в различных формах - от столь простых, как линейная зависимость результата производства от одного исследуемого фактора, до весьма сложных систем уравнений, включающих рекуррентные соотношения, которыми связываются состояния изучаемого объекта в разные периоды времени. Широко распространены мультипликативные формы ПФ.

Равновесие - состояние экономической системы, которое характеризуется равенством спроса и предложения всех ресурсов.

Равновесный процесс — процесс, характеризующийся фазовой траекторией, описываемой функцией, постоянной во времени (с точностью до достаточно малой величины) относительно некоторых фазовых переменных. Особенность равновесного процесса состоит в длительном сохранении существенных характеристик системы независимо от изменений среды.

Разнообразие — свойство систем, состоящее в их способности по-разному реагировать на одни и те же воздействия внешней среды. Данное свойство лежит в основе эволюционных процессов в живой природе, позволяя осуществлять отбор наиболее целесообразных реакций и, как следствие, закреплять в процессе эволюции структурные особенности, повышающие вероятность требуемых реакций.

Регрессия - зависимость среднего значения какой-либо случайной величины от некоторой другой величины или нескольких величин. Распределение этих значений называется условным распределением y при данном x. Множественная регрессия в определенных условиях позволяет исследовать влияние причинных факторов.

Рекурсия - в общем смысле вычисление функции по определенному алгоритму. Примерами таких алгоритмов являются рекуррентные формулы, выводящие вычисление заданного члена последовательности (чаще всего числовой) из вычисления нескольких предыдущих ее членов.

Решение – всякий определенный набор зависящих параметров.

Самонастраивающаяся система — система, параметры или режимы функционирования которой закономерным образом изменяются в согласии с закономерными изменениями условий внешней среды. Пример самонастраивающейся системы — карбюратор автомобильного двигателя, автоматически обеспечивающий степень обогащения горючей смеси, близкую к оптимальной в зависимости от текущего режима функционирования двигателя.

Самообучающаяся система — естественная или человеко-машинная система, способная усваивать знания и впоследствии применять их при выборе режимов функционирования. Классический пример самообучения живых систем — условные рефлексы. Самообучающимися являются многие экспертные системы, которые пользуются статистикой качества своих консультаций для корректировки базы знаний.

Самоорганизующаяся система — система, приобретающая качественно новые структурные связи в изменяющихся условиях среды функционирования. Современная теория систем объясняет способности к самоорганизации свойствами открытых неравновесных (диссипативных) систем, связанными с законами нелинейной динамики. Пример самоорганизации — процессы биогенеза (видообразования) в живой природе, этногенеза (формирования этносов) в процессе развития человеческой цивилизации.

Свобода — категория теории систем, означающая энтропию системы (либо её управляющей подсистемы) в заданных условиях среды.

Связность — свойство систем, состоящее в существовании закономерных связей между её элементами. По наличию либо отсутствию характерной для данной системы связи с другими её элементами можно судить о том, относится ли элемент к данной системе либо к её среде.

Симплекс метод - алгоритм последовательного улучшения плана, позволяющий осуществлять переход от одного допустимого базисного решения к другому таким образом, что значение целевой функции непрерывно возрастают и за конечное число шагов находится оптимальное решение.

Синергетика — раздел теории систем, изучающий процессы самоорганизации (см. *самоорганизующиеся системы*).

Синтаксис (в теории формальных систем) — совокупность правил построения формул из символов *алфавита*, приписанная данной формальной системе.

Синтез систем — научный метод, состоящий в использовании знаний о ранее изученных системах, представленных в форме их моделей, для создания новых типов систем, отличающихся от известных наличием свойств, желательных исследователю.

Система организационного управления — кибернетическая система, в которой объектом управления, в отличие от системы управления технологическими процессами, являются не машины или иные технические устройства, а коллективы людей, согласованно реализующих общую цель.

Система управления — см. Кибернетическая система

Система — совокупность взаимосвязанных и целесообразно взаимодействующих элементов.

Системный анализ — научный метод познания, представляющий собой последовательность действий по установлению структурных связей между переменными или элементами исследуемой системы. Опирается на комплекс общенаучных, экспериментальных, естественнонаучных, статистических, математических методов.

Системный подход - **Для исследования операций характерен системный подход то есть, при решении каждой проблемы возникают все новые и новые задачи, и применение операционных методов неэффективно, если решаются узкие, ограниченные задачи.**

Сложная система — система, связи между переменными либо элементами которой, при всём разнообразии, доступны наблюдению и исследованию, однако столь многочисленны, что при существующем уровне знаний возможно лишь приближённое суждение о результатах их совместного действия.

Сложность — свойство систем, состоящее в резком увеличении количества возможных состояний системы с увеличением численности связей между её элементами. Как следствие, исчерпывающее описание поведения системы даже со сравнительно небольшой численностью взаимно связанных элементов (порядка десятков) может оказаться невозможным на существующей ныне технической базе информатизации.

Случайный ход — это случайно выбранное действие игроком.

Событие — в физике — *явление*, характеризуемое тремя пространственными координатами и моментом времени; в теории систем — *явление*, состоящее в существенном (качественном) изменении состояния объекта (например, фазовый переход — изменение агрегатного состояния вещества).

Среда — в широком смысле слова — весь материальный мир за исключением исследуемой системы. В трактовке А. Холла и Р. Фейджина — совокупность всех объектов, изменение свойств которых влияет на систему, и объектов, свойства которых меняются в результате поведения системы.

Стандартная форма задачи линейного программирования является задачей на максимум (минимум) линейной целевой функции. Система ограничений ее состоит из одних линейных неравенств типа «≤» или «≥». Все переменные задачи неотрицательны.

Статистическое моделирование - способ исследования процессов повеления вероятностных систем в условиях, когда неизвестны внутренние взаимодействия в этих системах.

Стационарная точка - точка X^* , в которой все частные производные функции $Z = f(X)$ равны 0.

Степень вершины - это удвоенное количество петель, находящихся у этой вершины плюс количество остальных прилегающих к ней ребер.

Стохастическая имитация - вид машинной имитации, отличающийся от детерминированной тем, что включает в модель в том или ином виде случайные возмущения, отражающие вероятностный характер моделируемой системы.

Стохастическое линейное программирование. Бывает много практических ситуаций, когда коэффициенты c_i целевой функции, коэффициенты a_{ij} в матрице коэффициентов, коэффициенты ограничений b_i - являются случайными величинами. В этом случае сама целевая функция становится случайной величиной, и ограничения типа неравенств могут выполняться лишь с некоторой вероятностью. Приходится менять постановку самих задач с учётом этих эффектов и разрабатывать совершенно новые методы их решения. Соответствующий раздел получил название стохастического программирования.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

Стратегия это совокупность всех решений на каждом этапе.

Структура — (а) множество связей между переменными или элементами системы; (б) свойство системы, состоящее в закономерном изменении одних элементов под влиянием изменений, произошедших в других элементах, вследствие существования закономерных связей между элементами.

Суждение — предложение, в котором нечто утверждается или отрицается относительно реальных или идеальных объектов, допускающее (в принципе) соотнесение с реальностью и установление его истинности или ложности в процессе соотнесения.

Теорема (в теории формальных систем) — формула, являющаяся аксиомой либо получаемая в результате применения продукционного правила (*правила вывода*) к другим теоремам.

Теорема об активных стратегиях. Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

Теория графов. С помощью теории графов решаются многие сетевые задачи, связанные с минимальным протяжением сети, построение кольцевого маршрута и т.д.

Теория игр - математическая теория, предсказания результатов игр, в которых участники не имеют полной информации о намерениях друг друга. Формализованное описание игры представляется списком ее участников и множества стратегий для каждого из них. Теория игр используется для описания процессов, происходящих на олигополистических рынках, и в теории фирм. Теория игр пытается математически объяснить явления возникающие в конфликтных ситуациях, в условиях столкновения сторон. Такие ситуации изучаются психологией, политологией, социологией, экономикой.

Теория социальной организации - теории, связанные с проблемами управления и менеджмента, направленные на изучение условий более эффективного функционирования социальных систем. Различают три основных подхода к анализу организаций: рациональный, естественный, нерациональный.

Транспортная задача - в общем виде состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления $A_1, A_2, ..., A_m$ в n пунктов назначения $B_1, B_2, ..., B_n$.

Управляемость — характеристика системы управления, отражающая способность управляемой подсистемы снижать энтропию управляемой подсистемы. Характеризуется долей снятой энтропии в общей энтропии управляемой подсистемы (до акта управления).

Устойчивое равновесие — состояние системы, все фазовые траектории в окрестности которого в достаточно близком будущем являются сходящимися.

Устойчивость решения - обычно, говоря об устойчивости решения задачи, имеют в виду, что малые изменения каких-либо характеристик, например, начальных условий, ограничений или целевого функционала, не приводят к качественному изменению решения.

Устойчивость — характеристика системы управления, отражающая способность управляющей подсистемы поддерживать характеристики выходного сигнала управляемой подсистемы, предписанные целью управления.

Фазовая траектория — множество точек *фазового пространства*, соответствующих состояниям системы во все моменты времени периода наблюдения.

Фазовое пространство — евклидово пространство, координаты точек которого определяются значениями переменных состояния исследуемой системы и моментом времени.

Факторный анализ — метод статистического исследования связей, состоящий в конструировании ограниченного числа абстрактных числовых факторов, в наиболее полной мере снимающих вариацию наблюдаемых статистических переменных, с последующей интерпретацией сконструированных факторов на основе степени их связи с наблюдаемыми переменными.

Форма представления систем — способ представления знаний о системе, выделяемый по признаку отражения качественно различных особенностей структуры системы, определяющих её поведение. Например, форма представления «кибернетическая система» выделяется по признаку явного отражения цели функционирования системы и информационных процессов, посредующих её достижение; «алгоритмическая система» — по принципу отражения всех возможных (или наиболее вероятных) переходов системы из одного состояния в другое в форме алгоритма безотносительно к причинам, вызывающим эти переходы.

Формализм — *формальная система*, используемая в качестве средства представления *знаний*. Формализм предоставляет лингвистические (языковые) и процедурные средства для представления знаний.

Формальная система (символьная система, знаковая система) — система, определяемая *алфавитом*, синтаксисом (правилами построения формул из символов алфавита), аксиоматикой (множеством формул, считающихся теоремами a priori) и правилами вывода новых теорем.

Формальная теория — множество теорем некоторой *формальной системы*.

Формальное определение — определение, представленное математическими символами (включая пояснение их интерпретации на естественном языке).

Формула Байеса — формула, устанавливающая связь вероятности гипотез о причинах наблюдаемых событий с вероятностью самих событий.

Формула — совокупность символов алфавита *формальной системы*, соответствующая *синтаксису*.

Функции моделей: 1)средство осмысления действительности; 2)средство общения; 3)средство обучения и тренажа; 4)инструмент прогнозирования; 5)средство постановки экспериментов.

Ход игрока - выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами действий.

Целевая функция в экстремальных задачах - функция, минимум или максимум которой нужно найти. Это ключевое понятие оптимального программирования. Найдя экстремум целевой функции и, следовательно, определив значения управляемых переменных, которые k нему приводят, мы тем самым находим оптимальное решение задачи.

Целеполагание — функция высокоорганизованных систем, состоящая в формулировании целей их функционирования и в последующем подчинении деятельности управляющей подсистемы сформулированной цели. Присуща высокоразвитым живым организмам, наиболее полное развитие получает в связи с возникновением разума. Элементы целеполагания могут быть присущи искусственным системам — компьютерным программам с элементами искусственного интеллекта. Например, программа для игры в шахматы может сначала выработать набор перспективных целей (превратить пешку в фигуру, атаковать фигуру противника, защитить короля от возможной атаки и т.п.), после чего выработать последовательность ходов, реализующих данную цель, либо обнаружить недостижимость цели.

Целостность — свойство системы, состоящее в том, что ей присущи качественно новые свойства, не обнаруживаемые у её элементов, взятых по отдельности.

Цель — теоретико-системная категория, обозначающая состояние, достигаемое системой в процессе её поведения независимо (в известных границах) от её начального состояния.

Цена игры - величина выигрыша игрока.

Циклом называют замкнутую ломаную линию, все вершины которой лежат в занятых ячейках, кроме одной, расположенной в свободной клетке, подлежащей заполнению, а звенья параллельны строкам и столбцам, причем в каждой строке (столбце) лежит не более 2-х вершин.

Чистые стратегии - возможные ходы в распоряжении игроков.

Шкалы - системы чисел или иных элементов, принятых для оценки или измерения каких-либо величин. Шкалы используются для оценки и выявления связей и отношений между элементами систем. Особенно широко их применение для оценки величин, выступающих в роли критериев качества функционирования систем, в частности, критериев оптимальности при решении экономико-математических задач.

Экономико-математическая модель - математическая модель связи экономических характеристик и параметров системы. Экономико-математическая модель описывает экономические процессы, объекты и связи с использованием математического аппарата.

Экономический анализ - выявление экономических закономерностей из фактов экономической действительности. Экономический анализ предполагает раскладывание экономики на отдельные части (экономические категории).

Экспертиза — исследование и установление таких фактов и обстоятельств, для выяснения которых необходимы специальные познания в какой-либо науке или области практической деятельности. В теории систем экспертиза понимается как специфический метод научного познания, состоящий в преобразовании неформализованных (в том числе неосознаваемых) знаний эксперта в формализованную форму и применяемый в рамках метода системного анализа. В отдельных случаях процессы экспертизы могут допускать автоматизацию путём разработки экспертных систем.

Элементы решения – параметры, совокупность которых образует решение.

Эмерджентность — свойство систем, состоящее в возникновении у них свойств, не присущих их элементам, взятым по отдельности; в более специальном смысле эмерджентность означает невозможность предсказания значений переменных системы, основываясь только на значениях переменных её элементов (без учёта связей между ними).

Явление — категория, выражающая внешние свойства и отношения предмета; форма обнаружения (выражения, проявления) сущности предмета (системы).

15 Литература

Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. М.: Мир, 1971.

Акулич И.Л. "Математическое программирование в примерах и задачах" М. 1986г.

Алексеев В.М. и др. "Сборник задач по оптимизации" М. 1984г.

Аллен Р. Математическая экономия. М.: ИЛ, 1963.

анализ в экономических приложениях”/ М., 1987.

Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. В 3т. М.: Наука, 1984.

Багриновский К.А. Модели и методы экономической кибернетики. М.: Экономика, 1973.

Банди Б. "Линейное программирование" М. 1989г.

Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М.: Радио и связь. 1988.

Беллман Р. Динамическое программирование. М.:ИЛ, 1960

Бережная Е.В. Математическое методы моделирования экономических систем. Учебное пособие. Рекомендовано УМО ВУЗов. М.: Финансы и статистика, 2001.

Вагнер Г. "Основы исследования операций" М. 1973г.

Варфоломеев В.И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем. Практикум: Учебное пособие. Рекомендовано Министерством образования РФ. М.: Финансы и статистика, 2000.

Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1980.

Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Наука. 1980.

вероятностей и математическая сатистика”/ М., 1991.

Ганшин Г.С. "Методы оптимизации и решения уравнений" М. 1987г.

Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. М.: ИЛ, 1963.

Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели. М.: ЮНИТИ, 1995.

Гранберг А.Г. Моделирование социалистической экономики. М.: Сов. радио, 1988.

Грешилов А.А. "Прикладные задачи математического программирования"М.1990г.

Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. М.:Прогрес, 1968

Дегтярев Ю.И. Методы оптимизации. М.: Сов. радио, 1980.

Замков О.О., Черемных Ю.А., Толстопятенко А.В. Математические методы в экономике. М.: Дело и сервис, 1999.

Зангвилл У. Нелинейное программирование. Единый подход. - М.: Сов. радио,1973.

Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.

Исследование операций. В 2т. М.: Мир, 1981.

Канторович Л.В. и др. Экономика и оптимизация. М.: Наука, 1990.

Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.:Изд-во АН СССР, 1959.

Канторович Л.В., Горстко А.Б. Оптимальные решения в экономике. М.: Наука, 1972.

Кленин А.Н., К.К. Шевченко “Математическая статистика для

Кобринский Н.Е., Майминас Е.З., Смирнов А.Д. Экономическая кибернетика. М.: Экономика, 1982.

Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. “Теория

Курицкий Б.Я. Оптимизация вокруг нас. Л.: Машиностроение, 1989.

Кусов И.Ф. "Теория оптимальных автоматического управления" М. 1972г.

Ланкастер К. Математическая экономика. М.: Сов. радио, 1972.

Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. М.: Изограф, 1997.

Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики. М.: УРАО, 1998.

Малышев Б.С. Двойственный сетевой график В сб. Проблемы разработки и внедрения АСУ на машиностроительных предприятиях. Новосибирск 1972.

Математика и кибернетика в экономике: Словарь-справочник. М.: Экономика, 1975.

Математическая экономика и экстремальные задачи. М.: Наука, 1984.

Математические методы в исследовании операций. М.: Изд-во. МГУ, 1981.

Математические методы решения экономических задач. М.: Наука, 1980.

Математическое программирование. М.: Мир, 1979.

Многомерный статистический анализ на ЭВМ с использованием

Моделирование в процессах управления народным хозяйством. М.: Наука, 1984.

Одинцов И.Д. “Теория статистики”/ М., 1998.

пакета Microsoft Excel”/ М., 1997.

Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. - М.: Наука, 1983.
Понтрягин Л.С. и др. "Математическая теория оптимальных процессов" М. 1969г.
Раяцкас Р.А., Плакунов М.К. Количественный анализ в экономике. М.: Наука.1987.
Ричард Кох «Принцип 80/20. Как достичь многого минимальными средствами» (Richaid Koch. The 80/20 Principle. The Seavt of Achieving More with Less)
Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. - М.: Мир, 1973.
Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. - М.: Наука, 1986.
Саак А.Э. Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу “Разработка управленческого решения”. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. 59 с.
Теория Статистики под редакцией Р.А. Шмойловой/ “ФиС”, 1998.
Фимин Г.Г. Методы и модели линейного программирования коммерческой деятельности. М.: Финансы и статистика, 2000.
Форд Л, Фалкерсон Д. Потоки в сетях. М.: МИР, 1966.
Френкель А.А., Е.В. Адамова “Корреляционно регрессионный
Хог Э., Арора Я. "Прикладное оптимальное проектирование" М. 1983г.
Цлаф Л.Я. "Вариационное исчисление и интегральные уравнения" М. 1970г.
Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело Лтд, 1995.
Шухов Н.С., Фрейдлин М.П. Математическая экономика в России. М.: Наука,1996.
Эддоус М., Стенсфилд Р. Методы принятия решений. М. ЮНИТИ, 1997 г.
Эклунд И. Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983.
Экономико-математические методы и модели принятия решений в энергетике. Л.: Изд-во. ЛГУ, 1991.
Экономико-математичские метолы и модели. Методическое пособие для экономических специальностей. Составители Королева С.И., Вохминцева Г.П., Торопчина Г.Н. Благовещенск. Изд. АмГУ, 2001.
экономистов-статистиков”/ М., 1990.
Эльсгольц Л.Э. "Вариационное исчисление" М. 1962г.
Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. М.: Наука, 1969.