

Контрольная работа № 8:
Обыкновенные дифференциальные уравнения

Варианты контрольных заданий

Студент должен выполнять контрольную работу по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой номера его зачетной книжки. Первая цифра номера задачи соответствует номеру контрольной работы, а последняя – номеру варианта.

Вариант	Номер задачи						
	8.1	8.1	8.21	8.31	8.41	8.51	8.61
1	8.1	8.1	8.21	8.31	8.41	8.51	8.61
2	8.2	8.12	8.22	8.32	8.42	8.52	8.62
3	8.3	8.13	8.23	8.33	8.43	8.53	8.63
4	8.4	8.14	8.24	8.34	8.44	8.54	8.64
5	8.5	8.15	8.25	8.35	8.45	8.55	8.65
6	8.6	8.16	8.26	8.36	8.46	8.56	8.66
7	8.7	8.17	8.27	8.37	8.47	8.57	8.67
8	8.8	8.18	8.28	8.38	8.48	8.58	8.68
9	8.9	8.19	8.29	8.39	8.49	8.59	8.69
10	8.10	8.20	8.30	8.40	8.50	8.60	8.70

Условия заданий контрольных работ

8.1–8.10. Найти общее решение дифференциального уравнения.

8.1. $x \, dy - (y + \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx = 0.$

8.2. $x^2 \, dy - (y^2 + xy) \, dx = 0.$

8.3. $x \frac{dy}{dx} = y(1 + \ln \frac{y}{x}).$

8.4. $x \frac{dy}{dx} = y - xe^{y/x}.$

8.5. $(4x - y) \, dx + (x + y) \, dy = 0.$

8.6. $x \frac{dy}{dx} - y \ln \frac{y}{x} = 0.$

8.7. $x \frac{dy}{dx} = y - x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$

8.8. $x \frac{dy}{dx} \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x.$

8.9. $4x^2 \frac{dy}{dx} - 4xy + y^2 = 0.$

8.10. $x \, dy - (y - x \operatorname{ctg} \frac{y}{x}) \, dx = 0.$

8.11–8.20. Решить задачу Коши.

8.11. $x y' - y = x^2 e^x, \quad y(1) = 0.$

8.12. $y' + 2y = y^2 e^x, \quad y(0) = 1/2.$

8.13. $x y' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}, \quad y(1) = e^{-1}.$

8.14. $4 y' + y = xy^3, \quad y(0) = \sqrt{2}.$

8.15. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1.$

8.16. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{1+x}, \quad y(1) = 1.$

8.17. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}, \quad y(1) = e^{-1}.$

$$8.18. \quad x y' + y(x - 1) + x^2 = 0, \quad y(1) = 1.$$

$$8.19. \quad y' = y \operatorname{ctgx} + \sin^2 x, \quad y(\pi/4) = 0.$$

$$8.20. \quad xy' + y = xy^2 \ln x, \quad y(1) = 2.$$

8.21–8.30. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$8.21. \quad y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

$$8.22. \quad 2(y')^2 = (y - 1)y''.$$

$$8.23. \quad 4xy'' - (y')^2 = 4y'.$$

$$8.24. \quad 2y y'' + (y')^2 + (y')^4 = 0.$$

$$8.25. \quad xy'' - y' = x^2 e^x.$$

$$8.26. \quad 2y y'' = (y')^2 + 1.$$

$$8.27. \quad y'' \operatorname{tg} x = y' + 1.$$

$$8.28. \quad y'' + 2y(y')^3 = 0.$$

$$8.29. \quad xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$$

$$8.30. \quad y'' \operatorname{tgy} = 2(y')^2.$$

8.31–8.40. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения: в случае *а)* – методом вариации произвольных постоянных; в случае *б)* – определяя частное решение по виду правой части.

$$8.31. \quad \text{а) } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x};$$

$$\text{б) } y'' + 4y = 2 \sin 2x.$$

$$8.32. \quad \text{а) } y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x};$$

$$\text{б) } y'' - 6y' + 9 = 2e^{3x}.$$

$$8.33. \quad \text{а) } y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{2x^3};$$

$$\text{б) } y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x.$$

$$8.34. \quad \text{а) } y'' + y = \cos x \cos 2x;$$

$$\text{б) } y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x.$$

$$8.35. \quad \text{а) } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1};$$

$$\text{б) } y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x.$$

8.36. а) $y'' + 4y = \operatorname{ctg} x$;

б) $y'' - 4y' + 3y = -4x e^x$.

8.37. а) $y'' - 4y' + 4y = \frac{6e^x}{x^4}$;

б) $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$.

8.38. а) $y'' + 4y = \sin^2 x$;

б) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$.

8.39. а) $y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$;

б) $y'' - 2y' + y = 16e^x$.

8.40. а) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos^2 x}$;

б) $y'' + 5y' + 6y = \cos 2x$.

8.41–8.50. Составить дифференциальное уравнение, найти его частное решение, исходя из условий задачи.

8.41. Найти кривую, проходящую через точку $A(1;2)$, у которой длина подкасательной в каждой точке равняется ее удвоенной абсциссе.

8.42. Найти кривую, проходящую через точку $A(1;1)$, у которой отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен абсциссе точки касания.

8.43. Найти кривую, проходящую через точку $A(1;1/3)$, у которой угловой коэффициент касательной, проведенной к ней в любой точке, втрое больше углового коэффициента радиуса-вектора точки касания.

8.44. Найти кривую, проходящую через точку $A(2;1)$, у которой отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен соответствующей поднормали.

8.45. Найти кривую, проходящую через точку $A(1;2)$, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого на оси ординат любой касательной, равен произведению координат точки касания.

8.46. Найти кривую, проходящую через точку $A(1;3)$, у которой отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, на две единицы масштаба меньше абсциссы точки касания.

8.47. Найти кривую, проходящую через точку $A(1;1)$, у которой подкасательная равна сумме абсциссы и ординаты точки касания.

8.48. Найти кривую, проходящую через точку $A(1;0)$, у которой отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен полярному радиусу точки касания.

8.49. Найти кривую, проходящую через точку $A(1;2)$, у которой произведение абсциссы точки касания и абсциссы точки пересечения нормали с осью Ox равно удвоенному квадрату расстояния от начала координат до точки касания.

8.50. Найти кривую, проходящую через точку $A(-1;-2)$, у которой подкасательная в каждой точке равна 2.

8.51–8.60. Составить дифференциальное уравнение и задачу Коши, соответствующие условиям задачи. Указать тип уравнения и метод его решения.

8.51. При движении тела массой m в неоднородной среде сила сопротивления $F = \frac{2v^2}{s+3}$, где v – скорость тела; s – пройденный путь. Определить пройденный путь как функцию времени, если начальная скорость – v_0 .

8.52. Материальная точка массой m совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону $F = F_0 \cos \omega t$, где F_0, ω – константы. Найти уравнение движения точки, если в начальный момент времени она имела скорость v_0 .

8.53. С некоторой высоты вертикально вниз брошено тело массой m . Найти закон изменения скорости $v = v(t)$ падения этого тела, если на него действует сила тяжести и тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости.

8.54. Тело, находящееся в начальный момент времени в жидкости, погружается в нее под действием собственного веса без начальной скорости. Сопротивление жидкости прямо пропорционально скорости тела. Найти закон движения тела, если его масса m .

8.55. Точка массой m движется прямолинейно. На нее действует сила, пропорциональная времени (коэффициент пропорциональности – k_1). Кроме того, точка испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости

(коэффициент пропорциональности – k_2). Найти зависимость скорости от времени, считая, что в начальный момент скорость равна нулю.

8.56. Частица брошена вертикально вверх со скоростью v_0 . На нее действует сила тяжести и сила сопротивления $F = 2kmv$, где k – коэффициент пропорциональности, m – масса частицы и v – скорость. Найти расстояние частицы от точки бросания в любой момент времени t .

8.57. Изолированному проводнику сообщен заряд q_0 . Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в каждый момент времени пропорциональна наличному заряду проводника. Определить заряд проводника в любой момент времени t .

8.58. Тело массой m , брошенное вертикально вверх со скоростью v_0 , испытывает сопротивление воздуха силой $F = kv$, где k – коэффициент пропорциональности, v – скорость. Найти закон движения тела.

8.59. Материальная точка массой m в момент времени $t = 0$ начинает прямолинейное движение без начальной скорости под действием силы, которая прямо пропорциональна времени и обратно пропорциональна скорости движения точки. Найти закон движения точки.

8.60. Тело массой m движется с начальной скоростью v_0 под действием силы $F = 10(1 - t)$, которая совпадает по направлению со скоростью. Найти закон движения тела.

8.61–8.70. Решить систему линейных дифференциальных уравнений двумя способами: методом исключения и с помощью характеристического уравнения.

$$8.61. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$$

$$8.62. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

$$8.63. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

$$8.64. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$$

$$8.65. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 6y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 9y. \end{cases}$$

$$8.66. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 15y. \end{cases}$$

$$8.67. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$$

$$8.68. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

$$8.69. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$$

$$8.70. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 9y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1979. Т. 1.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука. 1984.
3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981.
4. Щипачев В. С. Основы высшей математики. М.: Высш. шк., 1989.