

Контрольная работа № 7:
Интегральное исчисление функции одной переменной

Варианты контрольных заданий

Студент должен выполнять контрольную работу по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой номера его зачетной книжки. Первая цифра номера задачи соответствует номеру контрольной работы, а последняя – номеру варианта.

Вариант	Номер задачи						
	7.1	7.11	7.21	7.31	7.41	7.51	7.61
1	7.1	7.11	7.21	7.31	7.41	7.51	7.61
2	7.2	7.12	7.22	7.32	7.42	7.52	7.62
3	7.3	7.13	7.23	7.33	7.43	7.53	7.63
4	7.4	7.14	7.24	7.34	7.44	7.54	7.64
5	7.5	7.15	7.25	7.35	7.45	7.55	7.65
6	7.6	7.16	7.26	7.36	7.46	7.56	7.66
7	7.7	7.17	7.27	7.37	7.47	7.57	7.67
8	7.8	7.18	7.28	7.38	7.48	7.58	7.68
9	7.9	7.19	7.29	7.39	7.49	7.59	7.69
10	7.10	7.20	7.30	7.40	7.50	7.60	7.70

Условия заданий контрольных работ

7.1–7.10. Найти неопределенные интегралы. В пунктах а) и б) результат проверить дифференцированием.

7.1. а) $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x + x}{1 + 4x^2} dx;$

б) $\int \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1} dx;$

б) $\int \arcsin x dx;$

г) $\int \frac{3x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx.$

7.2. а) $\int \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^2} dx;$

б) $\int \frac{x^4 - 2x^2}{x^3 - 2x + 1} dx;$

б) $\int (x + 1) \ln^2 x dx;$

г) $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{2 - 2x - x^2}} dx.$

7.3. а) $\int (x - 1) e^{2x - x^2} dx;$

б) $\int \frac{x^5 + x^3}{x^3 + 27} dx;$

б) $\int (x^2 + 2x + 2) e^x dx;$

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 4x + 3}}.$

7.4. а) $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$

б) $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 + x} dx;$

б) $\int (3x^2 + 2x) \sin x dx;$

г) $\int \frac{1 - x}{\sqrt{4 + 4x - x^2}} dx.$

7.5. а) $\int \frac{\hat{a}x}{x \sqrt{\ln x - 1}};$

б) $\int \frac{x^4}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx;$

б) $\int x \operatorname{arctg} x dx;$

г) $\int \frac{x - 3}{\sqrt{6x + x^2}} dx.$

$$7.6. \text{ a) } \int \frac{e^{1/x} + 1}{x^2} dx;$$

$$\text{B) } \int \frac{x^4 - 2x}{x^3 - 8} dx;$$

$$\text{б) } \int x \ln(2x + 1) dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{x\sqrt{10x^2 - 6x + 1}}.$$

$$7.7. \text{ a) } \int \frac{\cos x}{\sin x \ln \sin x} dx;$$

$$\text{B) } \int \frac{x^3 + x^2}{(x - 2)(x^2 + 2x + 2)} dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{3x + 1}{\cos^2 2x} dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx.$$

$$7.8. \text{ a) } \int \frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^5} dx;$$

$$\text{B) } \int \frac{x^4 - 2x^2}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)} dx;$$

$$\text{б) } \int (2x + 1) \cos^2 x dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{4x + 7}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx.$$

$$7.9. \text{ a) } \int \frac{\operatorname{tg} \sqrt{2x - 1}}{\sqrt{2x - 1}} dx;$$

$$\text{B) } \int \frac{2x^4 + x^2 + 1}{(2x + 1)(x^2 + 4x + 5)} dx;$$

$$\text{б) } \int (x^2 + x + 1) e^{2x+1} dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx.$$

$$7.10. \text{ a) } \int \frac{x}{\sin x^2} dx;$$

$$\text{B) } \int \frac{x^3}{x^3 - 1} dx;$$

$$\text{б) } \int \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$$

7.11–7.20. Вычислить определенные интегралы.

7.11. а) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 \sin x + \cos x};$

б) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx;$

в) $\int_0^4 \frac{dx}{2x + 1 + \sqrt{(2x + 1)^3}};$

г) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{4 - x^2}}.$

7.12. а) $\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{5 + 3 \cos x};$

б) $\int_0^{\pi} \sin^4 x dx;$

в) $\int_{-2}^5 \frac{(x + 1)dx}{\sqrt[3]{(x + 3)^4} + \sqrt[3]{(x + 3)^5}};$

г) $\int_1^3 \frac{\sqrt{3 + x^2} dx}{x}.$

7.13. а) $\int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} \sqrt{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x};$

б) $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^4 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx;$

в) $\int_1^{11/3} \frac{\sqrt{3x - 2} + 1}{x + \sqrt{3x - 2}} dx;$

г) $\int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 9}}.$

7.14. а) $\int_{2 \operatorname{arctg} \sqrt{2}}^{2 \operatorname{arctg} \sqrt{6}} \frac{dx}{3 + \cos x};$

б) $\int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{4} \cos^4 \frac{x}{4} dx;$

в) $\int_4^{11} \frac{dx}{3 + \sqrt{x + 5}};$

г) $\int_{2\sqrt{2}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}}.$

7.15. а) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x};$

б) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos^4 \frac{x}{2} dx;$

в) $\int_{1/2}^5 \frac{\sqrt{2x - 1}}{1 + \sqrt{2x - 1}} dx;$

г) $\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{(1 - x^2)^3}}{x} dx.$

$$7.16. \text{ a) } \int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 4} \frac{dx}{8 + 4 \sin x + 7 \cos x};$$

$$\text{B) } \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)};$$

$$\text{б) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x dx;$$

$$\text{г) } \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{dx}{x\sqrt{2+x^2}}.$$

$$7.17. \text{ a) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + 1};$$

$$\text{B) } \int_{-1}^{62} \frac{1 + \sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} (\sqrt[6]{x+2} + 1)^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_{\pi/8}^{\pi/4} \sin^6 2x dx;$$

$$\text{г) } \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{3-x^2}} dx.$$

$$7.18. \text{ a) } \int_{-\pi/2}^0 \frac{dx}{4 + \sin x + 3 \cos x};$$

$$\text{B) } \int_1^{16} \frac{\sqrt[4]{x} + 2}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x}} dx;$$

$$\text{б) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^4 x dx;$$

$$\text{г) } \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$7.19. \text{ a) } \int_0^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\cos x};$$

$$\text{B) } \int_0^4 \frac{x}{2x+1 + \sqrt{(2x+1)^3}} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi} \cos^8 x dx;$$

$$\text{г) } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$$

$$7.20. \text{ a) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x};$$

$$\text{B) } \int_2^9 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + x-1} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx;$$

$$\text{г) } \int_0^{3/2} \frac{2x^2 + x}{\sqrt{9-x^2}} dx.$$

7.21–7.30. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$7.21. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{x^3}{1+x^4} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^3 \frac{dx}{(x-1) \ln^2(x-1)};$$

$$7.22. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x};$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$$

$$7.23. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx.$$

$$7.24. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{1+4x^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

$$7.25. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$7.26. \text{ а) } \int_0^{\infty} \ln^2 x \, dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi} \frac{\sin x/2}{\sqrt[3]{\cos x/2}} dx.$$

$$7.27. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+x+1} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2+2x}}.$$

$$7.28. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}};$$

$$\text{б) } \int_0^1 x \ln x \, dx.$$

$$7.29. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2};$$

$$\text{б) } \int_{-1}^0 \frac{x \, dx}{x^2+3x+2}.$$

$$7.30. \text{ а) } \int_{-\infty}^0 x e^{2x+1} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx.$$

7.31–7.40. Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы Симпсона, разбивая отрезок интегрирования на 10 частей.

$$7.31. \int_0^1 x^2 \sqrt[3]{1+x^2} dx.$$

$$7.32. \int_1^3 \frac{\sqrt{x^3-1}}{x} dx.$$

$$7.33. \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

$$7.34. \int_2^3 \frac{dx}{\ln x}.$$

$$7.35. \int_0^1 x \sqrt{x^3+1} dx.$$

$$7.36. \int_0^1 e^{x^2-x} dx.$$

$$7.37. \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx.$$

$$7.38. \int_2^3 \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x} dx.$$

$$7.39. \int_1^2 e^{1/x} dx.$$

$$7.40. \int_1^3 x^2 \sqrt{x^2+1} dx.$$

7.41–7.50. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

$$7.41. y(x) = x^2 - 2, \quad y(x) = x + 4.$$

$$7.42. r(\varphi) = \cos^2 \varphi, \quad \varphi = 0; \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$7.43. \begin{cases} x(t) = \cos^3 t, \\ y(t) = \sin^3 t. \end{cases} \quad (\text{астроида}).$$

$$7.44. y(x) = 2x, \quad y(x) = \ln x, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

$$7.45. r(\varphi) = 3(1 + \sin \varphi), \quad \varphi = \pi/2; \quad (-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$7.46. \begin{cases} x(t) = t \operatorname{tg} t, \\ y(t) = \cos^2(t), \end{cases} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad y = 0, \quad (-\pi/6 \leq t \leq \pi/6).$$

$$7.47. \quad y^2 = x + 1, \quad y^2 = 9 - x.$$

$$7.48. \quad r(\varphi) = 2 + 2 \cos \varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

$$7.49. \quad \begin{cases} x(t) = 3(t - \sin t), \\ y(t) = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

$$7.50. \quad y(x) = x^2, \quad y(x) = x^3.$$

7.51–7.60. Вычислить длину дуги кривой.

$$7.51. \quad r(\varphi) = \varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

$$7.52. \quad \begin{cases} x(t) = t \sin t, \\ y(t) = t \cos t, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

$$7.53. \quad y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

$$7.54. \quad r(\varphi) = \sin^3 \varphi / 3, \quad (0 \leq \varphi \leq 3\pi).$$

$$7.55. \quad \begin{cases} x(t) = 8 \cos^3 t, \\ y(t) = 8 \sin^3 t, \end{cases} \quad (\pi/2 \leq t \leq \pi).$$

$$7.56. \quad y(x) = x^2/2, \text{ отсекаемой прямой } y(x) = x.$$

$$7.57. \quad r(\varphi) = a(1 - \cos \varphi), \quad (-0 \leq \varphi \leq \pi), \quad a > 0 - \text{константа}.$$

$$7.58. \quad \begin{cases} x(t) = t^2, \\ y(t) = \frac{t^3}{3} - t, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \sqrt{3}).$$

$$7.59. \quad y(x) = \ln \cos x; \quad (-\pi/6 \leq x \leq \pi/6).$$

$$7.60. \quad r(\varphi) = 1 + \cos \varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

7.61–7.70. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох или полярной оси фигуры, ограниченной следующими линиями.

$$7.61. \begin{cases} x(t) = a \cos^3 t, \\ y(t) = a \sin^3 t, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi), \text{ параметр } a > 0.$$

$$7.62. y(x) = \ln x, \quad (1 \leq x \leq e).$$

$$7.63. r(\varphi) = \sin 2\varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi / 2).$$

$$7.64. \begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \text{ параметр } a > 0.$$

$$7.65. y(x) = 1 + x^2, \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

$$7.66. r(\varphi) = 1 + 2 \cos \varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi / 3).$$

$$7.67. \begin{cases} x(t) = \cos t, \\ y(t) = 2 \sin t, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

$$7.68. y(x) = 2 - x^2, y(x) = x^3, x = 0.$$

$$7.69. r(\varphi) = \varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

$$7.70. \begin{cases} x(t) = \operatorname{tg} t, \\ y(t) = \cos^2(t), \end{cases} \quad (-\pi/4 \leq t \leq \pi/4).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1979. Т. 1.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука. 1984.
3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981.
4. Щипачев В. С. Основы высшей математики. М.: Высш. шк., 1989.