Типовой расчёт №1 по функциональному анализу, 5 семестр

Задача 1

Можно ли задать метрику на вещественной прямой с помощью функции $\rho(x,y)$? Если да, то будет ли получившееся метрическое пространство полным?

1. $\rho(x,y) = |e^x - e^y|$
2. $\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$
3. $\rho(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y|$
4. $\rho(x,y) = |x-y|^3$
5. $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$
6. $\rho(x,y) = |x^2 - y^2|$
7. $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$
8. $\rho(x,y) = \ln|x-y|$
9. $\rho(x,y) = 1 - e^{-|x-y|}$
10. $\rho(x,y) = \ln(1 + |x-y|)$
11. $\rho(x,y) = e^{|x-y|} - 1$
12. $\rho(x,y) = |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}|$
13. $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|^2}$
14. $\rho(x,y) = e^{|x-y|}$
15. $\rho(x,y) = \sin|x-y|$
16. $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$
17. $\rho(x,y) = |e^x - e^y|$
18. $\rho(x,y) = \sqrt[3]{|x-y|}$
19. $\rho(x,y) = \left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right|$
20. $\rho(x,y) = |\sin x - \sin y|$
21. $\rho(x,y) = \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}$
22. $\rho(x,y) = |e^{-x} - e^{-y}|$
23. $\rho(x,y) = |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y|$
24. $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+\sqrt{|x-y|}}$

Задача 2

Компактны ли следующие множества в пространстве $C[0,1]$? Ответ обосновать.

1. $x_n(t) = e^{-nt}$, $n \in \mathbf{N}$
2. $x_n(t) = t^n(1-t)$, $n \in \mathbf{N}$
3. $x_\alpha(t) = \frac{1}{1+\alpha^2} e^{-\alpha t}$, $\alpha \in \mathbf{R}$
4. $x_n(t) = \sin nt$, $n \in \mathbf{N}$
5. $x_n(t) = n^{-\left(t+\frac{1}{2}\right)}$, $n \in \mathbf{N}$
6. $x_\alpha(t) = \sin \alpha t$, $\alpha \in \mathbf{R}$
7. $x_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$, $\alpha \in [-2, 2]$
8. $x_n(t) = n^{-t}$, $n \in \mathbf{N}$
9. $x_\alpha(t) = \operatorname{arctg} \alpha t$, $\alpha \in \mathbf{R}$
10. $x_n(t) = \frac{1}{1+t^n}$, $n \in \mathbf{N}$
11. $x_\alpha(t) = e^{t-\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$
12. $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbf{N}$
13. $x_n(t) = e^{-n\left(t-\frac{1}{2}\right)}$, $n \in \mathbf{N}$
14. $x_\alpha(t) = \operatorname{arctg}(t-\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$
15. $x_n(t) = \frac{1}{n^2}(t+1)^n$, $n \in \mathbf{N}$
16. $x_\alpha(t) = e^{t-\alpha}$, $\alpha \in [0, +\infty)$
17. $x_n(t) = n^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)}$, $n \in \mathbf{N}$
18. $x_\alpha(t) = \sin \alpha t$, $\alpha \in [1, 2]$
19. $x_n(t) = \frac{1}{n} t^n$, $n \in \mathbf{N}$
20. $x_n(t) = \frac{1}{n} e^{n(t-1)}$, $n \in \mathbf{N}$
21. $x_n(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}$
22. $x_n(t) = e^{n(1-t)}$, $n \in \mathbf{N}$
23. $x_n(t) = \sin(t+n)$, $n \in \mathbf{N}$
24. $x_\alpha(t) = \frac{1}{1+\alpha^2} e^{\alpha - t}$, $\alpha \in \mathbf{R}$

Задача 3

Доказать, что следующие функционалы в пространстве $C[-1,1]$ являются линейными непрерывными, и найти их нормы:

1. $\int_{-1}^{1} |t| x(t)\, dt$
2. $x(-1) - 2x(0) + x(1)$
3. $x(-1) - \int_{-1}^{1} x(1-t^2)\, dt$
4. $-x(-1) + 2x(0) + 2\int_{0}^{1} x(t)\, dt$
5. $\int_{-1}^{0} (t^2+t) x(t)\, dt + 2x(0)$
6. $x(-1) - 2x(0) + \int_{0}^{1} x(t)\, dt$
7. $\int_{-1}^{1} t^2 x(t)\, dt$

8. $\frac{1}{3}[x(-1)+x(1)]$
9. $x(-1)+x(1)-\int_0^1 x(t^2/2)\,dt$
10. $2[x(1)-x(0)]$
11. $\int_{-1}^1 tx(t)\,dt$
12. $\int_0^1 tx(t)\,dt - x(1)$
13. $\int_{-1}^0 (t^2+t)x(t)\,dt + x(1)$
14. $\int_0^1 x(t^2)\,dt$
15. $\int_{-1}^0 tx(1+t)\,dt + 3x(1)$
16. $\int_{-1}^1 (t^2-1)x(t)\,dt$
17. $3\int_{-1}^1 t^2x(t)\,dt + x(0)$
18. $\int_0^1 (2t-1)x(t)\,dt$
19. $\frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)x(t)\,dt$
20. $x(1)-\int_0^1 x(t)\,dt$
21. $\int_{-1}^1 x(t)\,dt - x(0)$
22. $\int_{-1}^0 tx(t)\,dt + 2x(1)$
23. $\int_0^1 tx(t)\,dt - x(-1)$
24. $\int_0^1 (t^2-1)x(1-t)\,dt$

Задача 4

Доказать, что следующие операторы являются линейными ограниченными, и найти их нормы. Достигается ли норма оператора на единичном шаре?

1. $A : D_1[0,1] \to C_{L_1[0,2]},\ Ax(t) = t^2x(0)$
2. $A : C[0,1] \to C_{L_1[0,1]},\ Ax(t) = x(t^2)$
3. $A : D_1[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = x(t)$
4. $A : C[-1,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = x(t)$
5. $A : C[0,1] \to C_{L_1[0,1]},\ Ax(t) = t^2x(t)$
6. $A : C_{L_2[0,1]} \to C_{L_2[0,1]},\ Ax(t) = t\int_0^1 x(\tau)\,d\tau$
7. $A : C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$
8. $A : C_{L_2[0,1]} \to C[0,1],\ Ax(t) = t^2\int_0^1 \tau x(\tau)\,d\tau$
9. $A : C_{L_2[0,1]} \to C[0,1],\ Ax(t) = t^3\int_0^1 x(\tau)\,d\tau$
10. $A : C_{L_2[0,1]} \to C_{L_1[0,1]},\ Ax(t) = t\int_0^1 x(\tau)\,d\tau$
11. $A : C_{L_1[0,1]} \to C[0,1],\ Ax(t) = t^3\int_0^1 x(\tau)\,d\tau$
12. $A : C_{L_2[0,1]} \to C_{L_1[0,1]},\ Ax(t) = t^2x(t)$

13. $A : C[0,1] \to C_{L_1[0,1]},\ Ax(t) = t^2 \int_0^1 \tau x(\tau)\, d\tau$
14. $A : C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = t^2 x(0)$
15. $A : C[0,1] \to C_{L_1[0,1]},\ Ax(t) = t \int_0^1 x(\tau^2)\, d\tau$
16. $A : C_{L_1[0,1]} \to C_{L_1[0,1]},\ Ax(t) = t \int_0^1 x(\tau)\, d\tau$
17. $A : C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = x(t^2)$
18. $A : C_{L_1[0,1]} \to C_{L_2[0,1]},\ Ax(t) = t^3 \int_0^1 x(\tau)\, d\tau$
19. $A : D_1[0,1] \to C_{L_1[0,2]},\ Ax(t) = t \int_0^1 x(\tau^2)\, d\tau$
20. $A : C_{L_1[0,1]} \to C_{L_2[0,1]},\ Ax(t) = t \int_0^1 x(\tau)\, d\tau$
21. $A : C_{L_1[0,2]} \to C_{L_1[0,1]},\ Ax(t) = t^3 \int_0^1 x(\tau)\, d\tau$
22. $A : D_1[0,1] \to C_{L_2[0,1]},\ Ax(t) = x(t)$
23. $A : C[-1,1] \to C_{L_2[0,1]},\ Ax(t) = tx(t)$
24. $A : C[0,1] \to D_1[0,1],\ Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$