ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 3

**ТЕМА: Линейная алгебра**

Примеры решения задач.

**Пример 1.** Найти ранг, базис системы векторов ***a*1** = (0, 1, 2), ***a*2**= (−2, 3, 1), ***a*3**= (−2, 4, 3), ***a*4**= (4, −6, −2), ***a5*** = (4, −5, 0) и координаты векторов данной системы в найденном базисе.

**Решение.** Для решения этой задачи воспользуемся аппаратом обыкновенных жордановых исключений (ОЖИ).

С помощью ОЖИ найдем базис системы векторов ***a*1**, ***a*2**, ***a*3**, ***a*4**, ***a*5**, т. е. такую ее линейно независимую подсистему, через которую линейно выражаются все векторы данной системы.

Иными словами, нам надо будет найти наименьшую из всех подсистем, порождающих данную систему векторов. Рангом системы будет являться количество векторов в найденном базисе, а координатами вектора ***ai*** в данном базисе будут коэффициенты при базисных векторах в разложении вектора ***ai*** по базисным векторам.

Обозначим через ***e*1***,* ***e*2**,***e*3** единичные векторы ***e*1** = (1; 0; 0)*,* ***e*2** = (0; 1; 0), ***e*3** = (0; 0; 1), образующие базис пространства *R*3.

Очевидно, что ***a*1***=* 0***e*1***+* ***e*2** + 2***e*3**,

***a*2** *=* –2***e*1***+* 3***e*2** *+* ***e*3**,

***a*3***=* –2***e*1***+* 4***e*2** *+* 3***e*3**,

***a*4***=* 4***e*1***– 6****e*2** *–* 2***e*3**,

***a*5** *=* 4***e*1***–* 5***e*2** *+* 0***e*3**.

Внесем эти соотношения в жорданову таблицу

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | ***e*1** | ***e*2** | ***e*3** |
| ***a*1** = | 0 | 1 | 2 |
| ***a*2** = | –2 | 3 | 1 |
| ***a*3** = | –2 | 4 | 3 |
| ***a*4** = | 4 | –6 | –2 |
| ***a*5** = | 4 | –5 | 0 |

Выполним максимально возможное число шагов ОЖИ, заменяя наверху таблицы векторы ***ej***  на векторы ***ai***:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***e*1** | ***e*2** | ***e*3** |  |  |  | ***e*1** | ***a*1** | ***e*3** |  |  |
| ***a*1**= | 0 |  | 2 |  |  | ***e*2**= | 0 | 1 | –2 |  |  |
| ***a*2**= | –2 | 3 | 1 |  |  | ***a*2**= |  | 3 | –5 |  |  |
| ***a*3**= | –2 | 4 | 3 |  |  | ***a*3**= | –2 | 4 | –5 |  |  |
| ***a*4**= | 4 | –6 | –2 |  |  | ***a*4**= | 4 | –6 | 10 |  |  |
| ***a*5**= | 4 | –5 | 0 |  |  | ***a*5**= | 4 | –5 | 10 |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***a*2** | ***a*1** | ***e*3** |  |  |  |  | ***a*2** | ***a*1** | ***e*3** |
| ***e*2**= | 0 | –2 | 4 |  |  |  | ***e*2**= | 0 | 1 | –2 |
| ***e*1**= | 1 | –3 | 5 |  |  |  | ***e*1**= | –1/2 | 3/2 | –5/2 |
| ***a*3**= | –2 | –2 | 0 | :(–2) |  |  | ***a*3**= | 1 | 1 | 0 |
| ***a*4**= | 4 | 0 | 0 |  |  |  | ***a*4**= | –2 | 0 | 0 |
| ***a*5**= | 4 | –2 | 0 |  |  |  | ***a*5**= | –2 | 1 | 0 |

Из последней таблицы следует, что ***a*3 *= a*2*+ a*1**,

***a*4 *=*** –2***a*2*+*** 0***a*1**,

***a*5 *=*** –2***a*2*+ a*1**.

Векторы ***a*2**, ***a*1** образуют базис системы ***a*1**, ***a*2**, ***a*3**, ***a*4**, ***a*5**, ранг этой системы равен двум.

Учитывая полученные выражения векторов ***a*3**, ***a*4**, ***a*5** через базис и очевидные соотношения ***a*2 *=*** 1***a*2*+***0***a*1**, ***a*1 *=*** 0***a*2*+***1***a*1** , получим координаты векторов системы в базисе из векторов ***a*2**, ***a*1**:

***a*1**= (0; 1), ***a*2**= (1; 0), ***a*3**= (1; 1), ***a*4** = (–2; 0), ***a*5**= (–2; 1).

**Пример 2.**

Даны матрицы  А = , В = .

Найти матрицу АT(2А – В), где АT – матрица, транспонированная к A.

**Решение.**

АТ = .

Согласно правилам умножения матрицы на число и сложения матриц найдем матрицу 2А − В:

2А – В = 2  −  =  = .

Умножим АТ  на 2А – В согласно правилу умножения матриц.

Произведение АТ на 2А – В определено, так как число столбцов матрицы АТравно числу строк матрицы 2А – В.

АT(2А – В) =  = .

**Пример 3.**  Найти матрицу, обратную матрице А =  . Сделать проверку.

**Решение.** Согласно определению обратной матрицы в задаче требуется найти матрицу А–1, обладающую свойством: А А–1 =А–1А = Е, где Е – единичная матрица. Заметим, что А–1 существует не для всякой квадратной матрицы А. Для ее существования необходимо, чтобы все строки матрицы А были линейно независимыми, т.е. ранг матрицы А равнялся бы ее порядку.

Вычисление А–1 произведем с помощью ОЖИ по следующему плану:

1. Запишем А в жорданову таблицу с переменными *x*1, *x*2, *x*3и *y*1, *y*2, *y*3 :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *x*1 | *x*2 | *x*3 |
| *y*1= | 0 | 1 | 2 |
| *y*2= | –1 | 0 | 1 |
| *y*3= | –1 | 1 | 0 |

2. Произведем три шага ОЖИ, заменив все переменные *x*1, *x*2, *x*3на *y*1, *y*2, *y*3. (Это возможно сделать в условиях существования обратной матрицы А–1. Невозможность выполнения всех необходимых шагов ОЖИ означает, что ранг матрицы меньше ее порядка, и А–1 не существует).

3. Упорядочим переменные *x*1, *x*2, *x*3 *и y*1, *y*2, *y*3по возрастанию их номеров с помощью перестановки строк и столбцов итоговой таблицы.

4. Выпишем А–1 из последней таблицы.

Произведем вычисления по указанному плану:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *x*1 | *x*2 | *x3* |  |  |  | *x*1 | *y*1 | *x*3 |  |
| *y1*= | 0 |  | 2 |  |  | *x*2= | 0 | 1 | –2 |  |
| *y*2= | –1 | 0 | 1 |  |  | *y*2= | –1 | 0 |  |  |
| *y*3= | –1 | 1 | 0 |  |  | *y*3= | –1 | 1 | –2 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *x*1 | *y*1 | *y*2 |  |  |  | *y*3 | *y*1 | *y*2 |  |
| *x*2= | –2 | 1 | –2 |  |  | *x*2= | –2 | –1 | 2 |  |
| *x*3= | 1 | 0 | 1 |  |  | *x*3= | 1 | –1 | –1 | :(–3) |
| *y*3= |  | 1 | –2 |  |  | *x*1= | 1 | –1 | 2 |  |

Упорядочим переменные по возрастанию номеров

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *y*1 | *y*2 | *y*3 |  |  |  |
| *x*1= | –1 | 2 | 1 |  |  |  |
| *x*2= | –1 | 2 | –2 | :(–3) |  |  |
| *x*3= | –1 | –1 | 1 |  |  |  |

А–1 = 

Проверка:.

АА–1 =  (–1/3) =

= –1/3 = –1/3 = = Е.

А–1А= –1/3  = –1/3 = = Е.

А–1 найдена верно.

В примерах 4, 5 будут исследованы на совместность и решены системы линейных уравнений 

Обозначим через А матрицу из коэффициентов при неизвестных системы и через  — расширенную матрицу системы, полученную из А добавлением к ней столбца свободных членов.

Вывод о совместности системы уравнений получим на основании сравнения рангов матриц А и  согласно теореме Кронекера-Капелли: в случае равенства рангов система совместна, т. е. имеет решение, в случае неравенства – несовместна, то есть решений нет. Для нахождения решения используем аппарат ОЖИ.

**Пример 4.**  Исследовать на совместность и решить систему уравнений **

**Решение.** Перепишем систему в виде **

и запишем ее в жорданову таблицу

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *x*1 | *x*2 | 1 |
| 0 = | 1 | –2 | 0 |
| 0 = | 2 | 3 | –7 |

Матрица  является матрицей А данной системы, матрица  — расширенной матрицей . Производя вычисления согласно правилу нахождения ранга матрицы, получим одновременно величину рангов *rA* и *r‾A* матриц А и  соответственно:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *x*1 | *x*2 | 1 |  |  |  | *x*2 | 1 |  |  |  | 1 |
| 0 = |  | –2 | 0 |  |  | *x*1= | 2 | 0 |  |  | *x*1= | 2 |
| 0 = | 2 | 3 | –7 |  |  | 0 = |  | –7 |  |  | *x*2= | 1 |

Сделали два шага ОЖИ, *rA* = 2, *r‾A* = 2. Система уравнений совместна и имеет единственное решение ***x*** *=* (2; 1).

**Пример 5.** Исследовать на совместность и решить систему уравнений

**

**Решение.** Перепишем систему в виде **

и запишем ее в жорданову таблицу

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *x*1 | *x*2 | *x*3 | *x*4 | 1 |  |  |  | *x*1 | *x*2 | *x*4 | 1 |
| 0 = | 2 | –3 |  | –1 | –2 |  |  | *x*3= | –2 | 3 | 1 | 2 |
| 0 = | –4 | 6 | –2 | 2 | 4 |  |  | 0 = | 0 | 0 | 0 | 0 |

Ранги матриц А и  совпадают, так как *rA =* 1, *r‾A* = 1. Система уравнений совместна. Имеет бесконечное множество решений.

Общее решение ***xон*** неоднородной системы уравнений равняется сумме общего решения ***xоо*** соответствующей однородной системы уравнений и какого-либо частного решения ***xчн***  данной неоднородной системы:

***xон*** =***xоо*** +***xчн***.

Найдем ***xоо*** и ***xчн***.

В качестве ***xчн***  возьмем базисное решение системы уравнений, которое получается при нулевых значениях свободных переменных: ***xчн*** = (0; 0; 2; 0).

Для построения ***xоо***  рассмотрим итоговую таблицу соответствующей однородной системы. Она отличается от таблицы, полученной при решении задачи, только столбцом свободных членов и имеет вид

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *x*1 | *x*2 | *x*4 |
| *x*3= | –2 | 3 | 1 |
| 0 = | 0 | 0 | 0 |

Построим фундаментальную систему решений, придавая свободным переменным *x*1, *x*2, *x*4 наборы значений:

(*x*1; *x*2; *x*4) = (1; 0; 0), (*x*1; *x*2; *x*4) = (0; 1; 0), (*x*1; *x*2; *x*4) = (0; 0; 1). Получим векторы

***V*1** =(1; 0; –2; 0), ***V*2** = (0; 1; 3; 0), ***V*3** = (0; 0; 1; 1).

Отсюда

***xoн*** *= λ*1 *+ λ*2 * + λ*3 *+ * ,

где *λ*1, *λ*2 и *λ*3 – произвольные вещественные числа.

# Задачи для индивидуальных заданий

В задачах 1-30 найти ранг, базис системы векторов ***a*1**, ***a*2**, ***a*3**, ***a*4**, ***a*5**, ***a*6**и координаты векторов данной системы в найденном базисе.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| коор-  динаты  вектора  ***a*1** | 1 | –1 | 3 | 4 | 3 | 0 | 0 | 3 | –1 | –1 |
| 2 | –1 | 0 | 2 | 2 | –1 | 1 | 0 | 2 | –2 |
| 0 | 1 | –1 | –3 | 0 | 2 | –1 | –2 | 3 | 0 |
| –1 | 1 | 2 | 0 | –1 | 4 | 3 | 1 | 0 | –3 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| коор-  динаты  вектора  ***a*2** | –2 | 0 | –1 | 1 | 1 | –1 | 1 | 2 | 2 | –2 |
| 0 | 1 | 2 | –1 | 0 | 2 | 0 | –1 | –1 | 0 |
| 4 | 0 | –1 | 0 | 1 | 0 | 2 | –1 | 0 | –1 |
| 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | –3 | –2 | 2 | –1 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| коор-  динаты  вектора  ***a*3** | –1 | –1 | 2 | 0 | 0 | –1 | 1 | 5 | 1 | –3 |
| 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | –1 | 1 | –2 |
| –1 | 1 | –1 | –3 | 1 | 2 | 1 | –3 | –1 | –1 |
| 2 | 0 | 2 | 1 | –1 | 0 | 0 | 0 | –1 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| коор-  динаты  вектора  ***a*4** | 3 | –1 | 4 | 3 | 2 | 1 | –1 | 1 | –3 | 1 |
| 2 | –2 | –2 | 3 | 2 | –3 | 1 | 1 | 3 | –2 |
| –4 | 1 | 0 | –3 | –1 | 2 | –3 | –1 | 3 | 1 |
| –4 | –1 | 2 | –1 | –1 | 7 | 5 | –1 | 1 | –3 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| коор-  динаты  вектора  ***a*5** | –3 | 1 | –4 | 2 | 2 | –1 | 1 | –1 | 3 | –1 |
| –2 | 2 | 2 | –3 | –2 | 3 | –1 | –1 | –3 | 2 |
| 9 | –1 | –1 | 3 | 1 | –2 | 3 | 1 | 1 | –1 |
| 4 | 4 | –2 | 1 | 1 | –6 | –4 | 4 | –1 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| коор-  динаты  вектора  ***a*6** | 2 | 2 | –4 | 0 | 0 | 2 | –2 | –10 | –2 | 6 |
| –4 | 0 | –4 | –2 | –4 | –2 | –2 | 2 | –2 | 4 |
| 2 | –2 | 2 | 6 | –2 | –4 | –2 | 6 | 2 | 2 |
| –4 | 0 | –4 | –2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| коор-  динаты  вектора  ***a*1** | 2 | –1 | 1 | 1 | 2 | –2 | 2 | –2 | 0 | –2 |
| –1 | –2 | –1 | –1 | –3 | 1 | 0 | 1 | –1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 0 | –3 | 0 | –2 | 3 |
| 1 | 2 | 2 | –2 | –2 | 3 | 1 | 3 | 0 | –1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| коор-  динаты  вектора  ***a*2** | 1 | 2 | –1 | 0 | 1 | 1 | –1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| 1 | –1 | 1 | –3 | –2 | –2 | 1 | –1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | –1 | 3 | –2 | –1 | 2 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| коор-  динаты  вектора  ***a*3** | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | –3 | 3 | –3 | 1 | –3 |
| –1 | –1 | 0 | –3 | 2 | 2 | 2 | 2 | –2 | 2 |
| 1 | –1 | 1 | 2 | –1 | –2 | –5 | –1 | –3 | 6 |
| 2 | 0 | –1 | 0 | 2 | 5 | 5 | 4 | –1 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| коор-  динаты  вектора  ***a*4** | 1 | –3 | 2 | 1 | 1 | –3 | 3 | –3 | –3 | –3 |
| –1 | –3 | –2 | –3 | –5 | 0 | –6 | 0 | 0 | –6 |
| –1 | 1 | –1 | 5 | 5 | 6 | –3 | 3 | –3 | 0 |
| 0 | 2 | 2 | –3 | –2 | 3 | –9 | 6 | 3 | –6 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| коор-  динаты  вектора  ***a*5** | 2 | 3 | –2 | –1 | 0 | –4 | 4 | –4 | 2 | –4 |
| 1 | 3 | 2 | 7 | 2 | 3 | 4 | 3 | –3 | 4 |
| 1 | –1 | 1 | –8 | –3 | –4 | –7 | –2 | –4 | 9 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | –2 | 7 | 9 | 5 | –2 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| коор-  динаты  вектора  ***a*6** | 0 | –2 | 0 | –2 | –4 | 3 | –3 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 0 | 6 | –4 | –1 | 2 | –1 | 1 | 2 |
| –2 | 2 | –2 | –4 | 2 | –2 | 4 | –1 | 3 | –3 |
| –4 | 0 | 2 | 0 | –4 | –4 | 2 | –5 | –1 | 3 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| коор-  динаты  вектора  ***a*1** | 3 | 1 | –1 | 1 | 0 | 0 | 5 | 2 | 0 | 3 |
| 0 | 2 | 2 | 0 | –1 | –1 | –1 | 0 | 1 | –4 |
| –1 | –2 | 0 | –1 | –2 | 3 | 0 | –1 | 4 | –3 |
| –2 | 0 | 0 | 2 | 1 | –2 | 1 | 3 | 1 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| коор-  динаты  вектора  ***a*2** | –4 | 0 | 2 | –1 | –1 | 1 | –3 | –1 | 3 | 2 |
| 1 | –1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | –1 |
| –1 | 1 | –1 | 2 | 0 | –1 | –1 | 2 | –1 | –1 |
| 0 | 2 | 1 | 0 | –1 | 1 | 0 | –2 | –2 | 2 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| коор-  динаты  вектора  ***a*3** | 2 | 2 | 0 | 1 | –1 | 1 | 7 | 3 | 3 | 8 |
| 1 | 3 | 4 | 1 | 0 | –2 | 0 | 1 | 2 | –9 |
| –3 | –3 | –1 | 0 | –4 | 5 | –1 | 0 | 7 | –7 |
| –4 | 2 | 1 | 4 | 1 | –3 | 2 | 4 | 0 | 4 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| коор-  динаты  вектора  ***a*4** | 12 | 0 | –6 | 3 | 3 | –3 | 9 | 3 | –9 | –6 |
| –3 | 3 | 0 | –3 | –6 | 0 | –6 | –3 | 0 | 3 |
| 3 | –3 | 3 | –6 | 0 | 3 | 3 | –6 | 3 | 3 |
| 0 | –6 | –3 | 0 | 3 | –3 | 0 | 6 | 6 | –6 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| коор-  динаты  вектора  ***a*5** | 1 | 3 | 1 | 1 | –2 | 2 | 9 | 4 | 6 | 13 |
| 2 | 4 | 6 | 2 | 1 | –3 | 1 | 2 | 3 | –14 |
| –5 | –4 | –2 | 1 | –6 | 7 | –2 | 1 | 10 | –11 |
| –6 | 4 | 2 | 6 | 1 | –4 | 3 | 5 | –1 | 7 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| коор-  динаты  вектора  ***a*6** | –7 | –1 | 3 | –2 | –1 | 1 | –8 | –3 | 3 | –1 |
| 1 | –3 | –2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | –1 | 3 |
| 0 | 3 | –1 | 3 | 2 | –4 | –1 | 3 | –5 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | –2 | –2 | 3 | –1 | –5 | –3 | 1 |

В задачах 31-60 Даны матрицы А и В. Найти матрицу (αА ***+*** βВ)АТ,

где АТ — матрица, транспонированная к А.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| первая  строка  матрицы А | 2 | –3 | –1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | –1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | –3 | 1 | –2 | –1 | –3 | 2 |
| 0 | 2 | 2 | 2 | –1 | 3 | 2 | –3 | –1 | 2 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| вторая  строка  матрицы А | –1 | 0 | –1 | –2 | 1 | –1 | 0 | –1 | –1 | –2 |
| 2 | 2 | 4 | 0 | 2 | 2 | 4 | –3 | 1 | –2 |
| 3 | –1 | 2 | –1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| первая  строка  матрицы В | –1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | –3 |
| 2 | 1 | 3 | –2 | 1 | –1 | 0 | –1 | –1 | –2 |
| 4 | –1 | 3 | –1 | 2 | 1 | 3 | 4 | –2 | 2 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| вторая  строка  матрицы В | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 2 | 4 | –1 | 3 | 1 |
| –1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 4 | –1 | 3 | 2 | 5 |
| 0 | 2 | 0 | –2 | –2 | –4 | 1 | –3 | –2 | 3 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| α | 2 | –3 | –1 | –2 | –3 | 2 | 4 | –1 | 3 | 3 |
| β | 3 | 4 | 2 | 3 | 2 | –3 | –1 | 3 | 2 | –2 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 41 | 14 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| первая  строка  матрицы А | 2 | 1 | 3 | –2 | 3 | 1 | 4 | –2 | 2 | 0 |
| –1 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 4 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | –2 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| вторая  строка  матрицы А | –3 | –5 | 0 | –3 | 1 | –2 | –1 | 2 | 1 | 3 |
| –1 | –3 | –4 | 1 | –3 | –2 | 3 | 1 | 4 | 5 |
| 5 | 0 | 5 | 2 | 0 | 2 | –1 | –3 | –4 | 2 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| первая  строка  матрицы В | 2 | –1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 4 | 0 | 4 |
| –3 | 2 | –1 | 3 | –2 | 1 | –1 | 5 | 4 | 0 |
| 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 5 | 0 | 5 | –3 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| вторая  строка  матрицы В | 4 | 0 | 4 | 4 | 0 | 4 | 4 | 1 | –1 | 0 |
| –2 | 3 | 1 | –2 | 3 | 1 | –2 | –1 | –3 | 1 |
| 1 | 4 | –2 | 1 | 1 | 2 | 3 | –2 | 1 | –1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| α | 1 | 4 | 2 | 3 | 2 | –4 | 3 | –1 | –2 | –3 |
| β | –2 | –2 | –4 | –4 | 4 | –1 | 1 | 3 | 4 | 2 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| первая  строка  матрицы А | 2 | 2 | 4 | –3 | 1 | –2 | 1 | –3 | 4 | 3 |
| 3 | 5 | –3 | 2 | –1 | 1 | –1 | 1 | –5 | 1 |
| 0 | –2 | –2 | –4 | 3 | –1 | 3 | –4 | 1 | 3 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| вторая  строка  матрицы А | 4 | –1 | 3 | 2 | 5 | 3 | –2 | –5 | 2 | 2 |
| –2 | 3 | 1 | 4 | –3 | 1 | 5 | 4 | –3 | 5 |
| –2 | 0 | –2 | –2 | –4 | 2 | 4 | 3 | –3 | –3 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| первая  строка  матрицы В | 4 | –3 | 1 | –2 | –1 | –3 | 2 | 1 | –2 | –4 |
| 4 | –2 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 | –3 | 1 |
| 2 | –1 | 1 | 0 | 1 | 1 | –5 | 2 | 0 | 4 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| вторая  строка  матрицы В | –1 | –1 | –2 | –3 | –5 | 3 | –1 | 0 | 1 | –2 |
| –2 | 0 | –2 | –2 | –4 | 0 | –5 | –1 | –1 | 0 |
| 0 | 3 | 3 | –1 | 2 | 1 | 3 | –2 | –4 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| α | 4 | 1 | 3 | 2 | –1 | –3 | 5 | –3 | 2 | –4 |
| β | –1 | –3 | –2 | –3 | 4 | 1 | –2 | –4 | –5 | 3 |

В задачах 61-90 найти матрицу, обратную матрице А. Сделать проверку.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| элементы  первой  строки  матрицы А | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | –1 | 2 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | –1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | –1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| –1 | 2 | 1 | 1 | –1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| элементы  второй  строки  матрицы А | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | –1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | –1 | 0 | 0 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| элементы  третьей  строки  матрицы А | 0 | –1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | –1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| –1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | –1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| элементы  четвертой  строки  матрицы А | 1 | 1 | –1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | –1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | –1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | –1 | 2 | 1 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| элементы  первой  строки  матрицы А | 0 | 0 | 1 | 1 | –2 | 0 | –1 | 0 | –1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | –1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 3 | –1 | 0 | 0 | –1 | –1 | –1 |
| 0 | 1 | –1 | –1 | –1 | 1 | 1 | –2 | 1 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| элементы  второй  строки  матрицы А | 0 | –1 | 1 | 0 | –3 | 1 | 0 | –1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | –2 | 0 | –1 | –1 | 0 | 0 | –1 |
| –1 | 0 | 0 | –1 | –1 | –1 | –1 | 0 | –1 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| элементы  третьей  строки  матрицы А | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 | –1 | –1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | –3 | –3 | 0 | 0 | –1 | –1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | –1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| –1 | 2 | –1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | –1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| элементы  четвертой  строки  матрицы А | 1 | 1 | 1 | 3 | 4 | –2 | 1 | 1 | 1 | –2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | –1 | –1 | –1 | –1 |
| 1 | 1 | 1 | 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| элементы  первой  строки  матрицы А | 0 | 1 | 1 | –2 | 1 | –1 | 0 | 1 | –9 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | –1 | 0 | 0 | 1 | –1 | 0 |
| –1 | –1 | 0 | 1 | 0 | 0 | –1 | –1 | –5 | 1 |
| 1 | 0 | –1 | 2 | 0 | 1 | 1 | –1 | 5 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| элементы  второй  строки  матрицы А | 0 | –1 | –1 | –1 | –1 | 1 | 2 | –1 | 19 | –1 |
| 1 | –1 | –1 | 0 | 0 | –1 | –1 | 0 | 3 | 1 |
| –1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 11 | –1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | –1 | –1 | 1 | –10 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| элементы  третьей  строки  матрицы А | –1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | –2 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | –1 | 0 | 3 |
| 2 | 0 | 0 | –1 | –1 | –1 | –1 | 0 | 1 | –1 |
| 0 | –1 | –1 | –1 | –1 | 1 | 1 | 1 | –1 | 2 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| элементы  четвертой  строки  матрицы А | 1 | 2 | 0 | 0 | –1 | 0 | –1 | –2 | 34 | –4 |
| –1 | 1 | 0 | –1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| 0 | 0 | –1 | 0 | 0 | –2 | 1 | 1 | 20 | –4 |
| –1 | –2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | –18 | 1 |

В задачах 91-120 исследовать на совместность и решить систему уравнений :



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |
| *a*11 | 3 | 3 | 1 | 0 | 1 | 1 | 4 | 0 | –2 | –1 |
| *a*12 | 4 | 0 | –2 | 4 | 0 | –2 | –1 | 0 | 0 | 3 |
| *a*13 | 0 | 1 | 1 | –1 | 0 | 0 | 3 | 3 | 1 | 0 |
| *a*14 | –1 | 0 | 0 | 3 | 3 | 1 | 0 | 1 | 1 | 4 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*21 | 2 | 0 | –1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| *a*22 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | –1 | 2 |
| *a*23 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | –1 | 2 | 0 | –1 | 1 |
| *a*24 | 0 | 1 | –1 | 2 | 0 | –1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*31 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | –1 | –1 |
| *a*32 | 4 | 1 | –1 | 4 | 1 | –1 | –1 | 1 | 1 | 0 |
| *a*33 | 1 | 1 | 1 | –1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| *a*34 | –1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 4 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*41 | 2 | 0 | –1 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | –1 |
| *a*42 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | –1 | 1 | –2 | 2 |
| *a*43 | 0 | 1 | 3 | –1 | 1 | –2 | 2 | 0 | –1 | 0 |
| *a*44 | –1 | 1 | –2 | 2 | 0 | –1 | 0 | 1 | 3 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *b*1 | 1 | –3 | 7 | 1 | –3 | 7 | 1 | –3 | 7 | 1 |
| *b*2 | 1 | 4 | –6 | 1 | 4 | –6 | 1 | 4 | –6 | 1 |
| *b*3 | –3 | 3 | 5 | –3 | 3 | 5 | –3 | 3 | 5 | –3 |
| *b*4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 110 |
| *a*11 | 0 | 0 | 2 | –1 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| *a*12 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | –1 | –2 |
| *a*13 | 1 | 1 | 0 | 3 | 1 | –1 | –2 | 1 | 2 | –1 |
| *a*14 | 0 | –2 | –1 | –2 | 1 | 2 | –1 | 0 | 0 | 3 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*21 | 1 | –1 | 2 | –1 | 1 | 1 | 4 | 2 | 4 | –1 |
| *a*22 | 0 | –1 | 4 | –1 | 1 | 4 | –1 | 1 | –2 | –1 |
| *a*23 | 0 | 0 | 1 | 4 | 2 | –2 | –1 | 2 | 2 | –1 |
| *a*24 | 1 | 1 | –2 | –1 | 2 | 2 | –1 | 1 | 1 | 4 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*31 | 1 | 1 | 2 | –1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 | 0 |
| *a*32 | 1 | 0 | 4 | 0 | 2 | 4 | 0 | 2 | –1 | 0 |
| *a*33 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | –1 | 0 | 2 | 2 | –1 |
| *a*34 | 1 | –1 | –1 | 0 | 2 | 2 | –1 | 1 | 2 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*41 | 1 | –2 | 3 | 1 | 3 | –1 | 0 | 1 | 0 | –1 |
| *a*42 | 0 | –1 | 0 | –1 | 1 | 0 | –1 | 1 | 0 | –1 |
| *a*43 | 1 | 3 | –1 | 0 | 1 | 0 | –1 | 1 | 3 | 1 |
| *a*44 | 0 | 0 | 0 | –1 | 1 | 3 | 1 | 3 | –1 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *b*1 | –3 | 7 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| *b*2 | 4 | –6 | –3 | 6 | 4 | –3 | 6 | 4 | –3 | 6 |
| *b*3 | 3 | 5 | –2 | –1 | 7 | –2 | –1 | 7 | –2 | –1 |
| *b*4 | 1 | 1 | 4 | 2 | 1 | 4 | 2 | 1 | 4 | 2 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 |
| *a*11 | 0 | –1 | –2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | –1 | 2 |
| *a*12 | 1 | 2 | –1 | 0 | 0 | –1 | 2 | 0 | 1 | –3 |
| *a*13 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 1 | –3 | –1 | –1 | 2 |
| *a*14 | 1 | 0 | 0 | 0 | –1 | –1 | 2 | 2 | 0 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*21 | 1 | –2 | –1 | 2 | 0 | –2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| *a*22 | 2 | 2 | –1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 4 | –1 |
| *a*23 | 1 | 1 | 4 | 2 | 1 | 4 | –1 | 1 | 0 | 0 |
| *a*24 | 2 | 4 | –1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | –2 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*31 | 2 | –1 | 0 | 2 | 1 | 0 | –1 | –4 | 0 | -3 |
| *a*32 | 2 | 2 | –1 | 1 | –4 | 0 | –3 | –3 | 1 | 3 |
| *a*33 | 1 | 2 | 1 | 1 | –3 | 1 | 3 | 1 | –1 | 0 |
| *a*34 | 1 | 4 | 0 | 2 | 1 | –1 | 0 | 1 | 0 | –1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*41 | 1 | 0 | –1 | 1 | 5 | 1 | –1 | 4 | –1 | –1 |
| *a*42 | 1 | 3 | 1 | 3 | 4 | –1 | –1 | 0 | 0 | 3 |
| *a*43 | 3 | –1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | –2 | –1 | –2 |
| *a*44 | 1 | 0 | –1 | 1 | –2 | –1 | –2 | 5 | 1 | –1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *b*1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 7 | 0 | 1 | 7 |
| *b*2 | 4 | –3 | 6 | 4 | 1 | 4 | 2 | 1 | 4 | 2 |
| *b*3 | 7 | –2 | –1 | 7 | 6 | 1 | –8 | 6 | 1 | –8 |
| *b*4 | 1 | 4 | 2 | 1 | 1 | 2 | –4 | 1 | 2 | –4 |

В задачах 121-150 исследовать на совместность и решить систему уравнений :



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 128 | 129 | 130 |
| *a*11 | 1 | 2 | 4 | 1 | –1 | 1 | 2 | 1 | –1 | –2 |
| *a*12 | 3 | 1 | 1 | –3 | 2 | 3 | –5 | 2 | 2 | 3 |
| *a*13 | –5 | 0 | –3 | 2 | –2 | –2 | 1 | –4 | –3 | –2 |
| *a*14 | 1 | –1 | –1 | –1 | 1 | 1 | –2 | 1 | 1 | 1 |
| *a*15 | 0 | 3 | 1 | 1 | 1 | –2 | –1 | 0 | 0 | –1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*21 | 0 | –1 | –2 | –1 | 1 | –1 | –1 | 0 | 1 | 2 |
| *a*22 | –1 | –1 | –1 | 1 | –1 | –2 | 3 | –1 | –1 | –1 |
| *a*23 | 3 | 2 | 1 | –1 | 3 | 1 | –1 | 2 | 1 | 1 |
| *a*24 | –1 | 1 | 2 | 2 | –1 | –1 | 1 | –1 | –2 | –1 |
| *a*25 | 1 | –1 | –1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*31 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| *a*32 | 2 | 0 | 0 | –2 | 1 | 1 | –2 | 1 | 1 | 2 |
| *a*33 | –2 | 2 | –2 | 1 | 1 | –1 | 0 | –2 | –2 | –1 |
| *a*34 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | –1 | 0 | –1 | 0 |
| *a*35 | 1 | 2 | 0 | 1 | 1 | –1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*41 | 1 | 0 | 0 | –1 | 1 | –1 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| *a*42 | 1 | –1 | –1 | –1 | 0 | –1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| *a*43 | 1 | 4 | –1 | 0 | 4 | 0 | –1 | 0 | –1 | 0 |
| *a*44 | –1 | 1 | 3 | 3 | –1 | –1 | 0 | –1 | –3 | –1 |
| *a*45 | 2 | 1 | –1 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *b*1 | 1 | –2 | 3 | 4 | 2 | –3 | –4 | 4 | 5 | 7 |
| *b*2 | 2 | 1 | –2 | –2 | –3 | 2 | 3 | –3 | –2 | –5 |
| *b*3 | 3 | –1 | 1 | 2 | –1 | –1 | –1 | 1 | 3 | 2 |
| *b*4 | 5 | 0 | –1 | 0 | –4 | 1 | 2 | –2 | 1 | –3 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 138 | 139 | 140 |
| *a*11 | 1 | 2 | 2 | 3 | 0 | 3 | 2 | –1 | –2 | 3 |
| *a*12 | –5 | 3 | –1 | 0 | –1 | –1 | –3 | –2 | 5 | 0 |
| *a*13 | 1 | –1 | 4 | –1 | 3 | 2 | 1 | 3 | –1 | 2 |
| *a*14 | –2 | 4 | –2 | 2 | 1 | –3 | –2 | 1 | 0 | –1 |
| *a*15 | –1 | –1 | –1 | –1 | –5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*21 | –1 | –1 | –1 | –1 | 1 | –1 | –1 | 2 | –1 | –1 |
| *a*22 | 3 | –1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | –2 | 2 |
| *a*23 | –2 | 2 | –2 | 2 | –1 | –1 | –1 | –1 | 1 | –1 |
| *a*24 | 1 | –1 | 1 | –1 | –1 | 2 | 1 | –1 | –1 | 1 |
| *a*25 | 1 | 1 | 0 | –1 | 3 | –1 | –1 | –2 | –2 | –3 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*31 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| *a*32 | –2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | –1 | –1 | 3 | –1 |
| *a*33 | –1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| *a*34 | –1 | 3 | –1 | 1 | 0 | –1 | –1 | 1 | –1 | 0 |
| *a*35 | 0 | 0 | –1 | –2 | –2 | 1 | 0 | –1 | –1 | –1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*41 | –1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 3 | 0 | 1 |
| *a*42 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| *a*43 | –3 | 3 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| *a*44 | 0 | 2 | 0 | 0 | –1 | 1 | 0 | 0 | –2 | 1 |
| *a*45 | 1 | 1 | –1 | –3 | 1 | 0 | –1 | –3 | –3 | –4 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *b*1 | 4 | 4 | –5 | 2 | 1 | 4 | 4 | 3 | 5 | 6 |
| *b*2 | –3 | –1 | 3 | –1 | 2 | –2 | –1 | –1 | –2 | –3 |
| *b*3 | 1 | 3 | –2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| *b*4 | –2 | 2 | 1 | 0 | 5 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 141 | 142 | 143 | 144 | 145 | 146 | 147 | 148 | 149 | 150 |
| *a*11 | 0 | –1 | 3 | –2 | 1 | 1 | –1 | 3 | –1 | 5 |
| *a*12 | 1 | 2 | 0 | 4 | –2 | –3 | 2 | –1 | 3 | 1 |
| *a*13 | –3 | –4 | 1 | –6 | –1 | 2 | –1 | 2 | –1 | –3 |
| *a*14 | 1 | 0 | –2 | 1 | 4 | 0 | –1 | 1 | 2 | 2 |
| *a*15 | 2 | 1 | 0 | 0 | –1 | 1 | –1 | 0 | 4 | –1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*21 | –1 | 2 | –1 | 1 | –1 | 0 | 2 | –1 | 1 | –2 |
| *a*22 | 1 | –1 | 2 | –2 | 3 | 2 | –1 | 1 | –2 | –2 |
| *a*23 | 2 | 1 | –1 | 4 | 1 | –1 | 1 | –1 | 1 | 1 |
| *a*24 | –1 | 1 | 1 | –1 | –2 | 2 | 2 | –2 | –1 | –1 |
| *a*25 | –1 | –1 | –1 | 1 | 2 | –1 | 1 | 1 | –3 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*31 | –1 | 1 | 2 | –1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 3 |
| *a*32 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | –1 | 1 | 0 | 1 | –1 |
| *a*33 | –1 | –3 | 0 | –2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| *a*34 | 0 | 1 | –1 | 0 | 2 | 2 | 1 | –1 | 1 | 1 |
| *a*35 | 1 | 0 | –1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *a*41 | 1 | 2 | 1 | 0 | –1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| *a*42 | 3 | 0 | –1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | –1 | –3 |
| *a*43 | 1 | –2 | –1 | 2 | 1 | 0 | 1 | –1 | 1 | 2 |
| *a*44 | –1 | 2 | 0 | –1 | 0 | 1 | –1 | –3 | 1 | 0 |
| *a*45 | 0 | –1 | –2 | 2 | 3 | –1 | 1 | 2 | –2 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *b*1 | 4 | –5 | 0 | 4 | 7 | –5 | 4 | 7 | –1 | 2 |
| *b*2 | –2 | 6 | –3 | –1 | –5 | 4 | –3 | –3 | 1 | –3 |
| *b*3 | 2 | 1 | –3 | 3 | 2 | –1 | 1 | 4 | 0 | –1 |
| *b*4 | 0 | 7 | 1 | 2 | –3 | 3 | –2 | 1 | 1 | –4 |