

Метод анализа иерархий

Задача: Пусть необходимо выбрать банковский вклад, имеющий наиболее удобные для вкладчика условия. При этом в отборе участвуют вклады, годовые процентные ставки по которым одинаковы.

Для выбора наиболее предпочтительной альтернативы методом анализа иерархий были отобраны следующие критерии: периодичность капитализации процентов; минимальная сумма, необходимая для открытия вклада; возможность пополнения; возможность частичного снятия средств в пределах неснижаемого остатка; возможность досрочного расторжения без потери процентов и срок вклада. По рассматриваемым критериям есть данные для каждого вклада:

Альтернативы	Периодичность капитализации процентов	Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада	Возможность пополнения вклада	Возможность частичного снятия средств в пределах неснижаемого остатка	Возможность досрочного расторжения без потери процентов	Срок вклада
Вклад 1	ежедневная	700 000	есть	нет	нет	540
Вклад 2	ежемесячная	5 000	нет	есть	есть	730
Вклад 3	60, 300, 1100 день в конце срока	10000	есть	есть	есть	1100
Вклад 4	в конце за весь срок	10 000	нет	нет	есть при ограничениях	730 или 1100

Методические указания:

Этап 1: Определяем проблему:

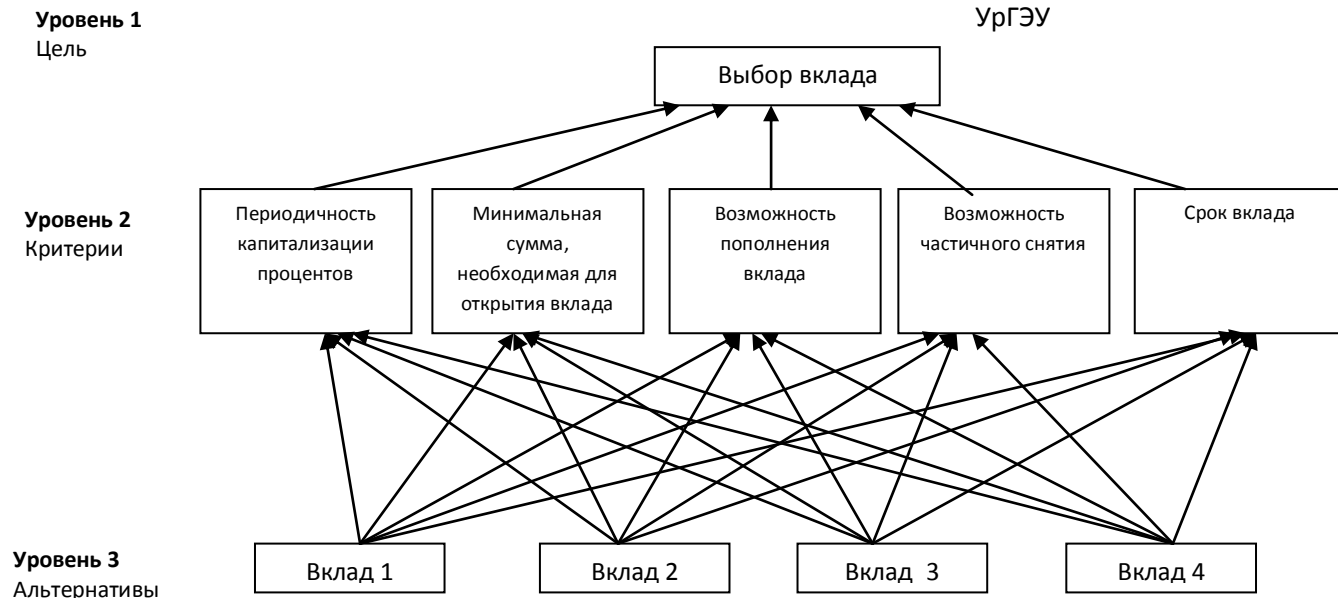
В нашем случае проблема состоит в выборе вклада. Сравнив данные по каждому вкладу, на интуитивном уровне можно посоветовать выбрать Вклад3 (бóльшая часть его показателей – оптимальна по сравнению с другими вкладами)

Этап 2: Строим иерархию:

Она представляет собой граф, который включает:

- главную цель сравнения альтернатив;
- набор критериев, по которым будут сравниваться альтернативы;
- набор альтернатив;
- множество направленных связей, указывающих на влияние альтернатив, цели и критериев друг на друга.

В результате применения МАИ получена следующая иерархия:



Этап 3: Определим приоритеты критериев.

Для этого:

- 3.1. Создать матрицу попарных сравнений для всех критериев, в которой определить важность каждого критерия;
- 3.2. Для каждой полученной матрицы построить вектор приоритетов;
- 3.3. Вычислить и проверить отношение согласованности для построенной матрицы.

Шаг 3.1: Создадим матрицу попарных сравнений для критериев:

Для построения матрицы попарных сравнений воспользуемся шкалой относительной важности:

Интенсивность относительной важности	Определение	Объяснение
0	Несравнимы	Эксперт затрудняется в сравнении
1	Равная важность	Равный вклад двух видов деятельности в цель
3	Умеренное превосходство одного над другим	Опыт и суждения дают легкое превосходство одному виду деятельности над другим
5	Существенное или сильное превосходство	Опыт и суждения дают сильное превосходство одному виду деятельности над другим
7	Значительное превосходство	Одному из видов деятельности дается настолько сильное превосходство, что оно становится практически значительным
9	Очень сильное превосходство	Очевидность превосходства одного вида деятельности над другим подтверждается наиболее сильно

2,4,6,8	Промежуточные решения между двумя соседними суждениями	Применяются в компромиссном случае
Обратные величины приведенных выше чисел	Если при сравнении одного вида деятельности с др. получено одно из вышеуказанных чисел (3), то при сравнении второго вида деятельности с первым получим обратную величину (т.е. 1/3)	

Таблица заполняется следующим образом: находящийся в строке критерий, сравнивается с критерием, указанным в столбце. Если указанный в строке критерий предпочтительней, то соответствующее число от 1 до 9 записывается в ячейке на пересечении строки и столбца. Если же предпочтительней критерий, находящийся в столбце, то 1 делится на соответствующее число от 1 до 9 и записывается в ячейке на пересечении строки и столбца.

Так как критерий одинаково предпочтителен по сравнению с собой, то по диагонали матрицы стоят единицы.

При заполнении необходимо внимательно следить за согласованностью ваших оценок предпочтений. Например, если у критерия «Возможность частичного снятия средств» задана значительная предпочтительность по сравнению с критерием «Срок вклада» и умеренное превосходство над критерием «Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада», то при сравнении критериев «Срок вклада» и «Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада» задание одинаковой предпочтительности приведет к несогласованности матрицы оценок.

Критерии	Периодичность капитализации процентов	Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада	Возможность пополнения вклада	Возможность частичного снятия средств в пределах неснижаемого остатка	Возможность досрочного расторжения без потери процентов	Срок вклада
Периодичность капитализации	1	1/3	1/6	1/5	1/7	3
Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада	3	1	1/4	1/3	1/5	5
Возможность пополнения вклада	6	4	1	2	1/3	7
Возможность частичного снятия средств в пределах неснижаемого остатка	5	3	1/2	1	1/4	7
Возможность досрочного расторжения без потери процентов	7	5	3	4	1	8
Срок вклада.	1/3	1/5	1/7	1/7	1/8	1

Шаг 3.2: Для каждой полученной матрицы построить вектор приоритетов:

Приоритеты в данном случае отражают относительное влияние каждого критерия на элемент более высокого уровня иерархии (на рассматриваемом этапе, это – цель).

Это можно сделать любым из четырех предложенных способов:

1-й способ:

1. суммируем элементы каждой строки и записываем полученные результаты в столбец,
2. складываем все элементы найденного столбца,
3. делим каждый из элементов этого столбца на полученную сумму.

2-й способ:

1. суммируем элементы каждого столбца и записываем полученные результаты в столбец,
2. заменяем каждый элемент построенного столбца на обратный ему,
3. складываем элементы столбца из обратных величин,
4. делим каждый из этих элементов на полученную сумму.

3-й способ:

1. суммируем элементы каждого столбца,
2. делим элементы каждого столбца на их сумму,
3. складываем элементы каждой строки полученной матрицы,
4. записываем результаты в столбец,
5. делим каждый из элементов последнего столбца на порядок исходной матрицы n .

4-й способ:

1. перемножаем элементы каждой строки и записываем полученные результаты в столбец,
2. извлекаем корень n -й степени из каждого элемента найденного столбца,
3. складываем элементы этого столбца,
4. делим каждый из этих элементов на полученную сумму.

Точность повышается от 1 до 2 и далее до 3 способа, однако одновременно усложняются вычисления. Наиболее точный результат дает 4 способ. Если матрица согласована, то во всех четырех случаях векторы приоритетов будут одинаковы.

Произведем расчет вектора приоритетов по 4 способу:

- Сначала вычисляем среднее геометрическое оценок по каждому критерию по формуле (шаг 1,2 способа 4):

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}}$$

- Затем суммируем средние оценки по всем критериям (шаг3 способа 4)
- Поделив среднюю оценку каждого критерия на общую сумму оценок всех критериев, получим относительную важность влияния каждого критерия на исходную цель (шаг 4 способа 4). Эта процедура нормализует вектор приоритетов.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Критерии	Периодичность капитализации процентов	Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада	Возможность пополнения вклада	Возможность частичного снятия средств в пределах неснижаемого остатка	Возможность досрочного расторжения без потери процентов	Срок вклада	Среднее геометрическое	Нормализованные оценки вектора приоритетов
2	Периодичность капитализации	1	=1/3	=1/6	=1/5	=1/7	3	=СТЕПЕНЬ(ПРОИЗВЕД(B2:G2);1/6)	=H2/\$H\$8
3	Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада	3	1	=1/4	=1/3	=1/5	5	=СТЕПЕНЬ(ПРОИЗВЕД(B3:G3);1/6)	=H3/\$H\$8
4	Возможность пополнения вклада	6	=4	1	2	=1/3	7	=СТЕПЕНЬ(ПРОИЗВЕД(B4:G4);1/6)	=H4/\$H\$8
5	Возможность частичного снятия средств в пределах неснижаемого	5	3	=1/2	1	=1/4	7	=СТЕПЕНЬ(ПРОИЗВЕД(B5:G5);1/6)	=H5/\$H\$8
6	Возможность досрочного расторжения без потери процентов	7	5	3	4	1	8	=СТЕПЕНЬ(ПРОИЗВЕД(B6:G6);1/6)	=H6/\$H\$8
7	Срок вклада	=1/3	=1/5	=1/7	=1/7	=1/8	1	=СТЕПЕНЬ(ПРОИЗВЕД(B7:G7);1/6)	=H7/\$H\$8
8	Сумма							=СУММ(H2:H7)	

Результат расчетов будет следующим:

Критерии	Периодичность капитализации процентов	Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада	Возможность пополнения вклада	Возможность частичного снятия средств в пределах неснижаемого остатка	Возможность досрочного расторжения без потери процентов	Срок вклада	Среднее геометрическое	Нормализованные оценки вектора приоритетов
Периодичность капитализации	1	0,33	0,17	0,20	0,14	3	0,410	0,045
Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада	3	1	0,25	0,33	0,2	5	0,794	0,088
Возможность пополнения вклада	6	4	1	2	0,33	7	2,196	0,243
Возможность частичного снятия средств в пределах неснижаемого остатка	5	3	0,5	1	0,25	7	1,536	0,170
Возможность досрочного расторжения без потери процентов	7	5	3	4	1	8	3,870	0,428
Срок вклада	0	0,2	0,14	0,14	0,13	1	0,235	0,026
Сумма							9,041	

Из таблицы видно, что наибольшее значение для эксперта имеет критерий «Возможность досрочного расторжения без потери процентов» (его вес составляет 42,8% от суммарного веса всех критериев).

Шаг 3.3: Проверка матрицы парных сравнений на согласованность:

Отношения согласованности дает информацию о степени нарушения согласованности в оценках исходной матрицы. Вычисление отношения согласованности состоит из трех этапов:

1. Вычисляется оценочное значение максимального собственного числа λ_{\max} :
 - 1.1. суммируем элементы каждого столбца;
 - 1.2. сумму первого столбца умножаем на величину первой компоненты нормализованного вектора приоритетов, сумму второго – на вторую и т.д.
 - 1.3. полученные числа суммируем.
Чем ближе полученное значение λ_{\max} к числу сравниваемых элементов (в нашем случае, к количеству критериев), тем лучше.
2. Определяется индекс согласованности для каждого (ИС):

$$\text{ИС} = \frac{(\lambda_{\max} - n)}{(n - 1)}$$

где n – число сравниваемых элементов. ИС является показателем близости рассматриваемой матрицы с согласованной матрицей.

3. Вычисляется отношение согласованности (ОС).

Для его вычисления необходимо сравнить значение индекса согласованности со значением случайной согласованности (величина получилась бы при **случайном** выборе количественных суждений из шкалы 1/9; 1/8; 1/7; ... ; 1/2; 1; 2; ... ; 9 при образовании обратносимметричной матрицы). В следующей таблице представлены значения случайных согласованностей для матриц разных размеров:

Размер матрицы, n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайная согласованность (СС)	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Отношение согласованности вычисляется по формуле:

$$\text{ОС} = \frac{\text{ИС}}{\text{СС}}$$

ОС измеряется в процентах и показывает относительную согласованность матрицы парных сравнений. Величина ОС должна быть не более 10%, в крайнем случае, в пределах 20%.

Для нашего примера:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Критерии	Периодичность капитализации процентов	Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада	Возможность пополнения вклада	Возможность частичного снятия средств в пределах неснижаемого остатка	Возможность досрочного расторжения без потери процентов	Срок вклада	Среднее геометрическое	Нормализованные оценки вектора приоритетов	Мера согласованности
2	Периодичность капитализации	1	=1/3	=1/6	=1/5	=1/7	3	=СТЕПЕНЬ(ПРО	=H2/\$H\$8	=I2*B8
3	Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада	3	1	=1/4	=1/3	=1/5	5	=СТЕПЕНЬ(ПРО	=H3/\$H\$8	=I3*C8
4	Возможность пополнения вклада	6	=4	1	2	=1/3	7	=СТЕПЕНЬ(ПРО	=H4/\$H\$8	=I4*D8
5	Возможность частичного снятия средств в пределах неснижаемого	5	3	=1/2	1	=1/4	7	=СТЕПЕНЬ(ПРО	=H5/\$H\$8	=I5*E8
6	Возможность досрочного расторжения без потери процентов	7	5	3	4	1	8	=СТЕПЕНЬ(ПРО	=H6/\$H\$8	=I6*F8
7	Срок вклада	=1/3	=1/5	=1/7	=1/7	=1/8	1	=СТЕПЕНЬ(ПРО	=H7/\$H\$8	=I7*G8
8	Сумма	=СУММ(B2:B7)	=СУММ(C2:C7)	=СУММ(D2:D7)	=СУММ(E2:E7)	=СУММ(F2:F7)	=СУММ(G2:G7)	=СУММ(H2:H7)		
9										
10			λ_{max}	=СУММ(J2:J7)		ИС	=(D10-6)/(6-1)		ОС	=G10/1,24

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Критерии	Периодичность капитализации процентов	Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада	Возможность пополнения вклада	Возможность частичного снятия средств в пределах неснижаемого остатка	Возможность досрочного расторжения без потери процентов	Срок вклада	Среднее геометрическое	Нормализованные оценки вектора приоритетов	Мера согласованности
2	Периодичность капитализации	1,00	0,33	0,17	0,20	0,14	3,00	0,41	0,05	1,01
3	Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада	3,00	1,00	0,25	0,33	0,20	5,00	0,79	0,09	1,19
4	Возможность пополнения вклада	6,00	4,00	1,00	2,00	0,33	7,00	2,20	0,24	1,23
5	Возможность частичного снятия средств в пределах неснижаемого	5,00	3,00	0,50	1,00	0,25	7,00	1,54	0,17	1,30
6	Возможность досрочного расторжения без потери процентов	7,00	5,00	3,00	4,00	1,00	8,00	3,87	0,43	0,88
7	Срок вклада	0,33	0,20	0,14	0,14	0,13	1,00	0,24	0,03	0,81
8	Сумма	22,33	13,53	5,06	7,68	2,05	31,00	9,04		
9										
10			λ_{max}	6,419		ИС	0,0839		ОС	6,8%

Как видим, показатели согласованности матрицы попарных сравнений находятся на приемлемом уровне.

Этап 4: Для каждого критерия определим приоритеты альтернатив:

Вычисления аналогичны вычислениям Этапа 3, а именно:

- 4.1. Для каждого критерия создать матрицу попарных сравнений для рассматриваемых альтернатив;
- 4.2. Для каждой полученной матрицы построить вектор приоритетов;
- 4.3. Вычислить и проверить отношение согласованности для построенной матрицы.

Составим матрицу попарных сравнений для критерия «Периодичность капитализации процентов», рассчитаем вектор приоритетов, λ_{\max} , ИС и ОС.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Периодичность капитализации процентов	Вклад 1	Вклад 2	Вклад 3	Вклад 4	Среднее геометрическое	Нормализованные оценки вектора приоритетов	Мера согласованности
2	Вклад 1	1,00	3,00	5,00	7,00	3,20	0,56	0,94
3	Вклад 2	0,33	1,00	3,00	5,00	1,50	0,26	1,18
4	Вклад 3	0,20	0,33	1,00	5,00	0,76	0,13	1,22
5	Вклад 4	0,14	0,20	0,20	1,00	0,27	0,05	0,86
6	Сумма	1,68	4,53	9,20	18,00	5,73		
7								
8	λ_{\max}	4,202		ИС	0,0674		ОС	7,5%

По данному критерию максимальный приоритет у Вклада 1. Судя по значению Отношения согласованности, матрица идеально согласована.

Приведем результаты расчетов по всем остальным критериям ниже:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада	Вклад 1	Вклад 2	Вклад 3	Вклад 4	Среднее геометрическое	Нормализованные оценки вектора приоритетов	Мера согласованности
2	Вклад 1	1,00	0,14	0,20	0,20	0,27	0,05	0,92
3	Вклад 2	7,00	1,00	3,00	3,00	2,82	0,53	0,95
4	Вклад 3	5,00	0,33	1,00	1,00	1,14	0,21	1,10
5	Вклад 4	5,00	0,33	1,00	1,00	1,14	0,21	1,10
6	Сумма	18,00	1,81	5,20	5,20	5,36		
7								
8	λ_{\max}	4,075		ИС	0,0252		ОС	2,8%

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Возможность пополнения вклада	Вклад 1	Вклад 2	Вклад 3	Вклад 4	Среднее геометрическое	Нормализованные оценки вектора приоритетов	Мера согласованности
2	Вклад 1	1,00	9,00	1,00	9,00	3,00	0,45	1,00
3	Вклад 2	0,11	1,00	0,11	1,00	0,33	0,05	1,00
4	Вклад 3	1,00	9,00	1,00	9,00	3,00	0,45	1,00
5	Вклад 4	0,11	1,00	0,11	1,00	0,33	0,05	1,00
6	Сумма	2,22	20,00	2,22	20,00	6,67		
7								
8	λ_{\max}	4,000		ИС	0,0000		ОС	0,0%

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Возможность частичного снятия средств в пределах неснижаемого остатка	Вклад 1	Вклад 2	Вклад 3	Вклад 4	Среднее геометрическое	Нормализованные оценки вектора приоритетов	Мера согласованности
2	Вклад 1	1,00	0,11	0,11	1,00	0,33	0,05	1,00
3	Вклад 2	9,00	1,00	1,00	9,00	3,00	0,45	1,00
4	Вклад 3	9,00	1,00	1,00	9,00	3,00	0,45	1,00
5	Вклад 4	1,00	0,11	0,11	1,00	0,33	0,05	1,00
6	Сумма	20,00	2,22	2,22	20,00	6,67		
7								
8	λ_{\max}	4,000		ИС	0,0000		ОС	0,0%

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Возможность досрочного расторжения без потери процентов	Вклад 1	Вклад 2	Вклад 3	Вклад 4	Среднее геометрическое	Нормализованные оценки вектора приоритетов	Мера согласованности
2	Вклад 1	1,00	0,11	0,11	0,20	0,22	0,03	0,83
3	Вклад 2	9,00	1,00	1,00	7,00	2,82	0,44	0,99
4	Вклад 3	9,00	1,00	1,00	7,00	2,82	0,44	0,99
5	Вклад 4	5,00	0,14	0,14	1,00	0,57	0,09	1,34
6	Сумма	24,00	2,25	2,25	15,20	6,42		
7								
8	λ_{\max}	4,148		ИС	0,0493		ОС	5,5%

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Срок вклада	Вклад 1	Вклад 2	Вклад 3	Вклад 4	Среднее геометрическое	Нормализованные оценки вектора приоритетов	Мера согласованности
2	Вклад 1	1,00	0,33	0,20	0,25	0,36	0,07	0,94
3	Вклад 2	3,00	1,00	0,33	0,50	0,84	0,17	1,07
4	Вклад 3	5,00	3,00	1,00	2,00	2,34	0,47	0,96
5	Вклад 4	4,00	2,00	0,50	1,00	1,41	0,29	1,07
6	Сумма	13,00	6,33	2,03	3,75	4,95		
7								
8	λ_{\max}	4,048		ИС	0,0161		ОС	1,8%

Все вышеприведенные матрицы согласованы (значения ОС каждой меньше 10%).

Этап 5: Синтез и анализ глобальных приоритетов альтернатив выбора.

Рассчитаем вектор глобальных приоритетов. Составим итоговую таблицу, опираясь на данные, полученные на предыдущих этапах МАИ. В верхней строке таблицы располагаются приоритеты соответствующих критериев (рассчитанные на этапе 3), ниже по строкам – приоритеты каждой альтернативы по каждому критерию (рассчитанные на этапе 4).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Альтернативы	Критерии						Глобальные приоритеты
2		Периодичность капитализации процентов	Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада	Возможность пополнения вклада	Возможность частичного снятия средств в пределах неснижаемого остатка	Возможность досрочного расторжения без потери процентов	Срок вклада	
3		Численное значение вектора приоритета						
4		4,54%	8,78%	24,28%	16,99%	42,81%	2,60%	
5		Вклад 1	55,85%	5,13%	45,00%	5,00%	3,47%	
6	Вклад 2	26,09%	52,52%	5,00%	45,00%	43,86%	16,97%	33,87%
7	Вклад 3	13,26%	21,18%	45,00%	45,00%	43,86%	47,23%	41,04%
8	Вклад 4	4,80%	21,18%	5,00%	5,00%	8,80%	28,54%	8,65%

Алгоритм расчета следующий:

1. Локальные приоритеты альтернатив с точки зрения критерия (расположенные по строкам итоговой матрицы), умножаются на приоритет соответствующего критерия. (Таким образом, при расчете итогового приоритета альтернативы каждый критерий учитывается со своим весовым коэффициентом)
2. Полученные величины суммируются. Вычисленная сумма – общий приоритет альтернативы
3. Операция повторяется для каждой альтернативы

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Альтернативы	Критерии						Глобальные приоритеты
2		Периодичность капитализации процентов	Минимальная сумма, необходимая для открытия вклада	Возможность пополнения вклада	Возможность частичного снятия средств в пределах неснижаемого остатка	Возможность досрочного расторжения без потери процентов	Срок вклада	
3								
4								
5								
6	Вклад 1	0,559	0,089	0,243	0,169	0,428	0,026	=СУММПРОИЗВ(B4:G4;B5:G5)
7	Вклад 2	0,261	0,525	0,05	0,45	0,439	0,169	=СУММПРОИЗВ(B4:G4;B6:G6)
8	Вклад 3	0,133	0,212	0,45	0,45	0,439	0,473	=СУММПРОИЗВ(B4:G4;B7:G7)
9	Вклад 4	0,048	0,212	0,05	0,05	0,088	0,286	=СУММПРОИЗВ(B4:G4;B8:G8)

Максимальный глобальный приоритет имеет Вклад 3. На нем и следует остановить свой выбор.

Полученный результат совпал с результатом, предсказанным интуитивно.