УДК 512+517.2(07)

Задания к типовым расчетам по математике/Владим. политехн. ин-т; Сост. Н.И.Дубровин. Владимир, 1993. 64 с.

Приведены индивидуальные задания к типовым расчетам по следующим разделам: линейная алгебра и аналитическая геометрия, введение в анализ, дифференциальное исчисление функций одной переменной, функции нескольких переменных.

Предназначены для студентов первого курса всех специальностей дневной формы обучения.

Табл. 12. Ил. 4.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Владимирского политехнического института.

Рецензент д-р физ.-мат.наук В.В.Жиков (Владимирский государственный педагогический институт).

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материал настоящих заданий соответствует програмне первого семестра по высшей математике высшего технического учебного заведения. Каждый раздел имеет свою нумерацию; количество вариантов в задании 30. В начале разделов приведены решения некоторых наиболее трудных типовых задач, которые призваны помочь студентам справиться с типовым расчетом.

Несколько слов об обозначениях. В разд. I через $\{X, Y, Z\}$ обозначаются координаты вектора, в то время как координаты точки евклидова пространства обозначаются (x, y, z). Знаки $\perp$ и $\parallel$ означают перпендикулярность и коллинеарность (т.е. параллельность либо совпадение) прямых и плоскостей; i, j, k - стандартный базис пространства R^3; $\cdot$ и $\times$ - знаки операций скалярного и векторного произведений. Расстояние между точками, прямыми и плоскостями обозначается символом $\rho(\ ,\ )$. В разд. 3 y'_x означает производную функции $y(x)$ по x, а $y(x)|_{x=x_0}$ - результат подстановки в функцию $y(x)$ числа x_0 вместо переменной x (т.е. $y(x_0)$). В последнем, четвертом разделе, символом $\in$ обозначается принадлежность элемента множеству. Символ $\Longleftrightarrow$ заменяет слова "тогда и только тогда".

В подборе заданий принимали участие преподаватели кафедры высшей математики: разд. I, аналитическая геометрия - В.В.Брыксин, О.И.Трубина; разд. I, линейная алгебра - С.Г.Танкеев, Т.В. Дубровина, В.А.Скляренко; разд. 2 - С.В.Левизов, И.Ф.Курбыко; разд. 3 - В.П.Собакин; А.Г.Сорокина, Е.В.Филинова; разд. 4 - В.В.Евликов.

При составлении заданий и задач активно использовались также "Сборник задач по математике"/Под ред. А.В.Ефимова, Б.М.Демидовича. М.: Наука, 1981. 463 с. и "Сборник заданий по высшей математике" (Кузнецов Л.А.).

В заключение составитель выражает благодарность лаборантам кафедры высшей математики Глазовой Л.И., Ерлыковой И.Б. и зав.лабораторией Блиновой В.В. за техническую работу при подготовке настоящих заданий.

РАЗДЕЛ I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Задача I. Найти площадь $\triangle ABC$, если $A(1,-3,2)$, $B(4,0,-5)$, $C(1,0,-1)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$:

$$\vec{AB}=\{4-1,\ 0+3,\ -5-2\}=\{3,3,-7\};\ \vec{AC}=\{0,3,-3\}.$$

Вычислим векторное произведение:

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} k=$$

$$=12i+9j+9k=\{12,9,9\}.$$

Тогда площадь $\triangle ABC$ равна

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+9^2+9^2}=\frac{3\sqrt{35}}{4}\approx 4,437.$$

Ответ: $S\approx 4,437$.

Задача 2. Найти уравнение высоты, опущенной из точки $P(5,-3,1)$ на плоскость $\pi:\ 2x+7y-z+4=0$.

Решение. Вектор $\vec{n}=\{2,7,-1\}$ перпендикулярен плоскости π и, значит, коллинеарен искомой прямой ℓ.

Ответ: каноническое уравнение прямой ℓ:

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-1}{-1}.$$

Задача 3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1,0,2)$, $N(3,-1,4)$ и перпендикулярной плоскости $\pi:\ 7x-2y+3z=0$.

Решение. Имеем: $\vec{n}\{7,-2,3\}\perp\pi$ и поэтому $\vec{n}\parallel\tau$, где τ - искомая плоскость. Вектор $\vec{MN}\{2,-1,2\}$ также коллинеарен τ. Следовательно, вектор

$$\vec{MN}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix}=i+11j+3k$$

перпендикулярен τ. Тогда задача сводится к стандартной: найти уравнение плоскости τ, проходящей через т. M и перпендикуляр-

ной вектору $\{1, 11, 3\}$. Получаем уравнение плоскости
$\gamma: 1\cdot(x-1)+11\cdot(y-0)+3\cdot(z-2)=0.$

Ответ: $\gamma: x+11y+3z-7=0.$

Задача 4. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми l_1: $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{0}=\frac{z}{5}$ и l_2: $\frac{x+1}{4}=\frac{y-9}{1}=\frac{z-8}{3}$ и уравнение их общего перпендикуляра.

Решение. Общая точка прямой l_1 — $A(3t+1, -2, 5t)$, а прямой l_2 — $B(4u-1, u+9, 3u+8)$. Здесь $t, u \in \mathbb{R}$. Находим параметры t и u так, чтобы вектор $\overline{AB}$ был перпендикулярен l_1 и l_2 одновременно. Т.к. $\overline{AB}=\{4u-3t-2, u+11, 3u-5t+8\}$ и $\vec{n}\{3,0,5\}$, $\vec{m}\{4,1,3\}$ — направляющие векторы прямых l_1 и l_2 соответственно, то для u и t получаем систему двух линейных уравнений: $\overline{AB}\cdot\vec{n}=\overline{AB}\cdot\vec{m}=0$ или

$$\begin{cases}(4u-3t-2)\cdot 3+(3u-5t+8)\cdot 5=0,\\ (4u-3t-2)\cdot 4+(u+11)\cdot 1+(3u-5t+8)\cdot 3=0,\end{cases}$$

откуда находим $u=0$, $t=1$; $A(4,-2,5)$, $B(-1,9,8)$. Тогда $\overline{AB}=\{-5,11,3\}$. Расстояние между прямыми l_1 и l_2 равно

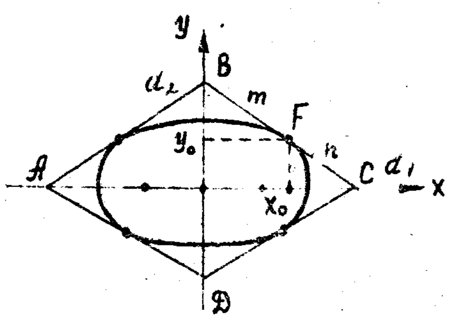
$$\rho(l_1, l_2)=\sqrt{(-5)^2+11^2+3^2}=\sqrt{155}\approx 12,45$$

и

$$l: \frac{x-4}{-5}=\frac{y+2}{11}=\frac{z-5}{3}.$$

Ответ: $\rho(l_1, l_2)\approx 12,45.$
Каноническое уравнение общего перпендикуляра: $\frac{x-4}{-5}=\frac{y+2}{11}=\frac{z-5}{3}.$

Задача 5. В ромб с диагоналями $2d_1$, $2d_2$ вписан эллипс $(d_1 \geq d_2)$. Точка касания делит сторону ромба в отношении $m:n$. Найти каноническое уравнение эллипса.



Решение. Выберем систему координат, как указано на рисунке; координаты точки касания в первом квадранте обозначим x_0, y_0. Так как $BF:FC=m:n$ по условию, то $\frac{x_0}{d_1-x_0}=\frac{m}{n}$. Отсюда $x_0=\frac{d_1 m}{m+n}$. Аналогично, $y_0=\frac{d_2 n}{m+n}$. Пусть $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (*) — каноническое уравнение эллипса. Требуется найти a и b. Тангенс угла наклона прямой BC

равен $-d_2/d_1$, что совпадает с производной в точке x_0 функции $y(x)$, заданной неявно соотношением (*). Дифференцируя (*) по x, считая $y=y(x)$ и подставляя $x=x_0$ и $y'(x_0)=-d_2/d_1$, получим:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y\,y'}{b^2}=0 \Longrightarrow \frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0\cdot d_1}{b^2\cdot d_2}=0. \qquad (1)$$

Кроме того,

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

(1) и (2) — линейная система двух уравнений относительно неизвестных $1/a^2$, $1/b^2$. Решая ее, получим

$$a^2=x_0^2+x_0 y_0\frac{d_2}{d_1}=\frac{d_1^2m^2}{(m+n)^2}+\frac{d_1d_2mn}{(m+n)^2}\,\frac{d_2}{d_1}=\frac{d_1^2m^2+d_2^2mn}{(m+n)^2};$$

$$b^2=y_0^2+y_0x_0\frac{d_1}{d_2}=\frac{d_2^2n^2+d_1^2mn}{(m+n)^2}.$$

Ответ: $a=\sqrt{d_1^2m^2+d_2^2mn}/(m+n)$, $b=\sqrt{d_2^2n^2+d_1^2mn}/(m+n)$.

Задача 6. Написать уравнение биссектрисы угла ABC, где $A(1,3)$, $B(-2,0)$, $C(5,-1)$.

Решение. Найдем $\overline{BA}=\{3,3\}$, $\overline{BC}=\{7,-1\}$. Пусть вектор $\vec{a}=\{X,Y\}$ коллинеарен биссектрисе угла ABC. Тогда $\cos(\widehat{\vec{a},\overline{BA}})=\cos(\widehat{\vec{a},\overline{BC}})$; откуда

$$\frac{3\cdot X+3\cdot Y}{\sqrt{3^2+3^2}\sqrt{X^2+Y^2}}=\frac{7\cdot X+(-1)\cdot Y}{\sqrt{7^2+(-1)^2}\sqrt{X^2+Y^2}}$$

или $\sqrt{50}\,3(X+Y)=3\sqrt{2}(7X-Y)$, откуда $3Y=X$. Следовательно, в качестве направляющего вектора биссектрисы можно взять $\{3,1\}$. Тогда $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{1}$ — каноническое уравнение биссектрисы.

Ответ: $y=x/3+2/3$ — уравнение биссектрисы.

Задача 7. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x+2y+3z=4,\\ 2x+2y-z=3,\\ 3x+3y+2z=7.\end{cases}$$

Решение. Сначала систему приводим к ступенчатому виду. Для этого первое уравнение умножаем на -2, -3 и прибавляем ко второму и третьему уравнению соответственно:

$$\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ -3y-7z=-5, \\ -3y-7z=-5 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 3y+7z=5 \end{cases}$$

Далее, вычитая из третьего уравнения второе, получаем ступенчатый вид. Число ненулевых уравнений $(=2)$ меньше, чем число неизвестных $(=3)$; отсюда следует, что система неопределена. Для того, чтобы записать формулу общего решения, объявим неизвестную z свободной; x и y выражаются тогда через z.

Ответ: $\begin{cases} x = 5/3 \cdot z + 2/3, \\ y = -7/3 \cdot z + 5/3, \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}.$

Задача 8. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора пространства $\mathbb{R}^3$, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)-4(1-\lambda)+4(3-\lambda)=0;$$

$$\iff (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)-8(2-\lambda)=0 \iff (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-5)=0,$$

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=5.$$

Определяем собственные векторы $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$, соответствующие найденным характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, из системы однородных уравнений $(A-\lambda_i E)\vec{p}_i=0 \ (i=1,2,3)$.

Получаем

I) $\lambda_1=2$

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+2y=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

$x=2t,\ y=-t,\ z=-2t$;

$\vec{p}_1=\{2,-1,-2\}\cdot t$;

2) $\lambda_2=-1$

$$\begin{cases} 4x+2y=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ 2y+2z=0 \end{cases}$$

$x=t,\ y=-2t,\ z=2t$;

$\vec{p}_2=\{1,-2,2\}t$;

3) $\lambda_3=5$

$$\begin{cases} -2x+2y=0 \\ 2x-3y+2z=0 \\ 2y-4z=0 \end{cases}$$

$x=2t,\ y=2t,\ z=t$;

$\vec{p}_3=\{2,2,1\}t$.

Ответ. Собственные числа – $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=5$; соответствующие им собственные векторы – $\vec{p}_1=\{2,-1,-2\}t$, $\vec{p}_2=\{1,-2,2\}t$, $\vec{p}_3=\{2,2,1\}t$, $(t\in\mathbb{R},\ t\neq 0)$.

ЗАДАНИЯ

I. Даны декартовы прямоугольные координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти:

1) угол α между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
2) площадь S грани $A_1A_2A_3$;
3) объем V пирамиды;
4) уравнение плоскости π грани $A_1A_2A_3$;
5) угол β между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;
6) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Вариант	A_1	A_2	A_3	A_4
I	2	3	4	5
I	(-2; 0; 2)	(2; 3; I4)	(-6; -3; I4)	(I; -4; I4)
2	(-I; -I; 0)	(II; 2; -4)	(II; -4; 4)	(I; 3; 3)
3	(-2; 0; 0)	(-I; 2; -2)	(-I2; -2; II)	(I; -3; 3)
4	(-2; 0; I)	(0; I; -I)	(-4; 2; 0)	(-I; 3; 2)
5	(2; -I; I)	(I; I; -I)	(4; -2; -I)	(2; 3; 2)
6	(2; I; -2)	(4; -4; I2)	(-8; -I0; 0)	(3; -3; -I)
7	(-2; -I; -2)	(-I; I; 0)	(0; -3; -I)	(I; 0; -3)
8	(0; I; I)	(2; 0; -I)	(2; -9; -I0)	(2; -2; 6)
9	(-2; 0; 2)	(-4; -I; 4)	(0; -2; 3)	(0; 5; 5)
I0	(-2; 2; 0)	(I2; 4; 5)	(-4; -9; I0)	(0; -4; -2)
II	(0; I; I)	(2; -4; -I3)	(I0; I2; 3)	(3; -I; 0)
I2	(I; 2; -2)	(3; 3; -4)	(2; 4; 0)	(3; -3; 2)
I3	(0; -I; 2)	(I2; -2I; II)	(I6; -22; I4)	(-3; 0; 6)
I4	(0; -I; 2)	(-I; -3; 4)	(-5; I3; 0)	(3; 4; I)
I5	(-2; 0; -2)	(-3; 2; -4)	(-7; -I4; 0)	(-I; 2; 7)
I6	(2; 0; -2)	(-2; 8; -3)	(9; 4; 2)	(I0; I; -8)
I7	(0; -2; -2)	(-4; I0; -5)	(-I2; 6; -II)	(-9; 6; I0)
I8	(-2; I; 0)	(-4; 0; -2)	(-I2; -I0; 2)	(-2; 2; 7)
I9	(2; 2; 0)	(4; 3; 2)	(-8; -9; 2)	(2; -2; -I)
20	(2; I; 2)	(-3; -I3; 4)	(I2; -I; I3)	(-I; 3; 7)
2I	(-I; I; 0)	(0; 3; 2)	(I; 2; -2)	(5; -3; -2)
22	(3; 0; 2)	(2; 2; 0)	(5; -I; 0)	(3; 4; 3)
23	(-I; 2; 0)	(I; 3; 2)	(-6; 4; -I4)	(-I; 5; 3)
24	(2; 2; I)	(4; -3; I5)	(-8; -9; 3)	(3; -2; 2)
25	(2; 0; -2)	(6; 2; -6)	(-2; 4; -4)	(-2; -I0; -8)

Окончание таблицы

I	2	3	4	5
26	(0; I; 2)	(4; 3; -2)	(-4; 5; 0)	(2; 7; 4)
27	(-I; I; 2)	(3; 3; -2)	(-5; 5; 0)	(I; 7; 4)
28	(-I; 3; 2)	(I; 4; 4)	(-6; 5; -I2)	(-I; 6; 5)
29	(-I; -2; -2)	(I; -I; -4)	(0; 0; 0)	(4; -3; 4)
30	(-2; -I; -2)	(-I; I; -4)	(-I2; -3; 9)	(I; -4; I)

2. Заданы плоскость π и точка M. Написать уравнение плоскости γ, проходящей через точку M параллельно плоскости π.
Найти расстояние ρ между плоскостями.

Вариант	π	M
I	2	3
I	$11x-16y-8z-16=0$	(I; I; 0)
2	$-3x-6y+2z-1=0$	(2; 2; -I)
3	$3x+4z+3=0$	(I; -I; I)
4	$-10x-25y+2z+3=0$	(-2; 0; 2)
5	$9x-2y-6z+6=0$	(2; I; 0)
6	$-6x-13y-18z+22=0$	(-I; 0; -I)
7	$-13x-16y+4z-24=0$	(2; 0; 2)
8	$19x-4y+8z+20=0$	(2; 2; -I)
9	$-18x-3y-14z+24=0$	(0; 2; -2)
I0	$-x-4y+8z+18=0$	(-I; -2; 0)
II	$20x+21z+10=0$	(2; 2; -I)
I2	$15x+12y-16z-23=0$	(-I; -I; 0)
I3	$-9x+8y-12z+11=0$	(-2; 0; I)
I4	$-6x-17y+6z-5=0$	(-2; 0; 2)
I5	$-12x+12y-21z-3=0$	(0; -2; 0)
I6	$-8x-12y+9z+9=0$	(-I; 0; 0)
I7	$-4x-8y+z+6=0$	(-I; -I; 0)
I8	$6x-22y-3z-14=0$	(-I; 0; I)
I9	$-7x-4y+4z+17=0$	(-2; -I; -2)
20	$13x-4y-16z-5=0$	(2; 0; 0)
2I	$x+4y+8z+19=0$	(0; 2; 0)
22	$4x+20y+5z+10=0$	(I; -2; I)
23	$-3x+14y-18z-19=0$	(-2; -2; -I)
24	$-3x-4y-12z+12=0$	(2; I; -2)

Окончание таблицы

I	2	3
25	$x+4y+8z+26=0$	(I; 0; 0)
26	$12x-21y+16z+9=0$	(-I; 0; 2)
27	$20x+9y-12z+9=0$	(2; 0; 2)
28	$16x+12y-21z-13=0$	(-I; 0; 0)
29	$11x+16y-8z+20=0$	(2; 0; 0)
30	$18x-y-6z-26=0$	(-I; I; 2)

3. Написать уравнение плоскости γ, проходящей через точки M_1 и M_2 перпендикулярно заданной плоскости π.

Вариант	π	M_1	M_2
I	2	3	4
I	$-20x-9y+12z-24=0$	(2; 2; 0)	(I4; I; I2)
2	$4x+3y-12z-6=0$	(-2; 2; 2)	(-5; -I4; 26)
3	$18x+y+6z-8=0$	(-I; 2; 0)	(-2; -I6; 6)
4	$2x+3y-6z-17=0$	(2; I; -2)	(-4; -I; -5)
5	$x+2y+2z+19=0$	(I; I; I)	(-I; 0; 3)
6	$15x-12y-16z+23=0$	(2; 0; -I)	(5; -I2; -5)
7	$-12x-16y-15z+22=0$	(0; 2; I)	(-II; -22; -II)
8	$6x-6y+17z+16=0$	(-I; I; 0)	(-2; -I7; -6)
9	$15x-12y-16z-8=0$	(0; -I; I)	(I2; 2; 5)
I0	$14x-23y-2z+27=0$	(I; -I; -2)	(-6; -3; -28)
II	$16x+12y-15z-14=0$	(I; 0; I)	(I3; -I; I3)
I2	$7x+22y+14z+10=0$	(I; I; -2)	(3; I5; -25)
I3	$16x-12y+15z-4=0$	(0; -I; -I)	(3; -I7; -25)
I4	$10x+2y-25z+27=0$	(0; 2; I)	(I0; -23; 3)
I5	$11x+12y-24z+3=0$	(I; -I; -I)	(2; -I3; -I3)
I6	$3x+12y+4z+10=0$	(0; I; I)	(3; -II; 5)
I7	$24x+11y-12z+24=0$	(0; -2; -I)	(-I2; -5; -5)
I8	$2x-2y-z-25=0$	(-I; 0; -I)	(I; I; I)
I9	$-2x-10y-10z+9=0$	(I; 0; -2)	(2; 2; -4)
20	$6x-6y-7z-8=0$	(0; -2; I)	(2; 7; -5)
2I	$-11x-2y+10z-14=0$	(2; I; 0)	(0; 2; -2)
22	$6x+6y+17z-17=0$	(0; -2; -2)	(I; -20; 4)
23	$9x-20y+12z+6=0$	(-2; I; -I)	(-6; I3; -4)

Окончание таблицы

I	2	3	4
24	$10x - 11y + 2z + 1 = 0$	(0; I; -I)	(2; 0; -3)
25	$2x - y - 2z + 27 = 0$	(-I; 0; -2)	(-2; 2; -4)
26	$-10x - 11y - 2z + 7 = 0$	(-2; I; 0)	(3; -I; -I4)
27	$11x + 24y - 12z - 8 = 0$	(-I; -2; I)	(-25; I; -I5)
28	$-24x - 3y - 16z - 25 = 0$	(-2; 0; -2)	(-I; I2; -I4)
29	$12x - 15y - 16z - 8 = 0$	(0; -I; I)	(-I; II; -II)
30	$9x - 12y - 20z + 6 = 0$	(-2; 0; I)	(22; 3; -I5)

4. Даны прямая ℓ и точка M.

I) Написать уравнение плоскости π, проходящей через прямую ℓ и точку M.

2) Написать уравнение плоскости τ, проходящей через точку M перпендикулярно прямой ℓ.

3) Написать канонические уравнения прямой h, проходящей через точку M перпендикулярно к ℓ.

Вариант	ℓ	M
I	2	3
I	$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$	(2; 0; 2)
2	$\frac{x}{4} = \frac{y}{-7} = \frac{z-1}{-4}$	(I; -I; -3)
3	$\frac{x}{25} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-10}$	(I; -3; I)
4	$\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{10} = \frac{z-1}{11}$	(-4; I; 2)
5	$\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$	(-I; 3; -I)
6	$\frac{x}{-25} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{10}$	(-I; 0; 0)
7	$\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-2}$	(-I; I; 0)
8	$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{+2} = \frac{z}{-2}$	(3; 2; -I)
9	$\frac{x+1}{18} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-6}$	(0; -I; 0)

Продолжение таблицы

I	2	3
I0	$\frac{x+2}{10} = \frac{y+1}{-11} = \frac{z+1}{-2}$	(-I; -3; -3)
II	$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-2}$	(-2; 2; -4)
I2	$\frac{x+2}{1} = \frac{y}{8} = \frac{z+1}{-4}$	(-I; I; -I)
I3	$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-10} = \frac{z+1}{-11}$	(2; I; -3)
I4	$\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{14}$	(I; 3; 0)
I5	$\frac{x+2}{-2} = \frac{y+2}{-14} = \frac{z+1}{5}$	(-I; -2; 0)
I6	$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-2}{-14}$	(0; I; -2)
I7	$\frac{x-2}{-9} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{6}$	(I; 0; -2)
I8	$\frac{x+2}{9} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{6}$	(-I; -I; -2)
I9	$\frac{x+2}{16} = \frac{y+2}{12} = \frac{z+2}{15}$	(2; I; -I)
20	$\frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{4}$	(-I; 0; 0)
2I	$\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{14} = \frac{z-1}{-5}$	(I; 2; 0)
22	$\frac{x-1}{12} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{4}$	(I; 0; -5)
23	$\frac{x-2}{-7} = \frac{y}{-4} = \frac{z+2}{4}$	(I; -4; -I)
24	$\frac{x}{-5} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{14}$	(-I; I; I)
25	$\frac{x-1}{-6} = \frac{y}{18} = \frac{z}{1}$	(I; I; -I)
26	$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$	(2; -5; 0)
27	$\frac{x}{-6} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-18}$	(0; -I; I)

Окончание таблицы

I	2	3
28	$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{2}$	(-3; I; -2)
29	$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-2}$	(-3; I; I)
30	$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z-2}{-14}$	(2; 0; 0)

5. Даны уравнения прямых ℓ_1 и ℓ_2.

I) Убедиться в том, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 окрещивающиеся.

2) Составить уравнение плоскости π, проходящей через ℓ_1 параллельно ℓ_2.

3) Найти расстояние ρ между прямыми ℓ_1 и ℓ_2.

4) Составить канонические уравнения общего перпендикуляра h прямых ℓ_1 и ℓ_2.

Вариант	ℓ_1	ℓ_2
I	2	3
I	$\frac{x-0}{-2}=\frac{y-2}{14}=\frac{z-1}{-5}$	$\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{-14}=\frac{z-6}{2}$
2	$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-2}$	$\frac{x+16}{-14}=\frac{y-13}{2}=\frac{z-7}{-5}$
3	$\frac{x-1}{-9}=\frac{y-2}{12}=\frac{z}{-20}$	$\frac{x+6}{12}=\frac{y-3}{-16}=\frac{z+1}{21}$
4	$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-2}$	$\frac{x-14}{14}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-5}$
5	$\frac{x}{10}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{25}$	$\frac{x-23}{10}=\frac{y-38}{-25}=\frac{z-15}{-2}$
6	$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{-12}$	$\frac{x-25}{8}=\frac{y}{-9}=\frac{z-2}{12}$
7	$\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-2}{-12}$	$\frac{x+3}{12}=\frac{y-28}{-8}=\frac{z-7}{-9}$
8	$\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{9}=\frac{z}{-2}$	$\frac{x-8}{6}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z+17}{9}$

Продолжение таблицы

I	2	3
9	$\frac{x}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{6}$	$\frac{x+13}{2}=\frac{y-12}{6}=\frac{z+3}{-3}$
I0	$\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-2}$	$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+8}{2}$
II	$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-8}$	$\frac{x-2}{7}=\frac{y+10}{4}=\frac{z+11}{4}$
I2	$\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{2}$	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+3}{-2}$
I3	$\frac{x-1}{-6}=\frac{y-2}{-9}=\frac{z+1}{-2}$	$\frac{x+18}{7}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z}{6}$
I4	$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{-6}$	$\frac{x-9}{3}=\frac{y-1}{6}=\frac{z+6}{-2}$
I5	$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{12}=\frac{z+1}{12}$	$\frac{x-1}{11}=\frac{y+39}{-24}=\frac{z-2}{12}$
I6	$\frac{x-1}{-8}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{4}$	$\frac{x-12}{1}=\frac{y+9}{8}=\frac{z+11}{4}$
I7	$\frac{x-2}{2}=\frac{y}{14}=\frac{z+2}{5}$	$\frac{x-15}{-5}=\frac{y+5}{-14}=\frac{z-5}{-2}$
I8	$\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-1}$	$\frac{x+7}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+17}{-2}$
I9	$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{2}$	$\frac{x-10}{2}=\frac{y+11}{-5}=\frac{z-10}{14}$
20	$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-2}{8}$	$\frac{x-4}{4}=\frac{y-9}{8}=\frac{z-13}{1}$
2I	$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{-8}$	$\frac{x-9}{4}=\frac{y-4}{8}=\frac{z-13}{1}$
22	$\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$	$\frac{x-15}{10}=\frac{y+12}{2}=\frac{z-11}{11}$
23	$\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-12}=\frac{z}{3}$	$\frac{x-18}{-9}=\frac{y}{12}=\frac{z+7}{-8}$
24	$\frac{x+2}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{-8}$	$\frac{x+1}{-7}=\frac{y-11}{4}=\frac{z+9}{-4}$
25	$\frac{x+2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$	$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{-1}$

Окончание таблицы

I	2	3
26	$\frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{1}$	$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-13}{-1}=\frac{z-11}{8}$
27	$\frac{x+2}{-12}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{12}$	$\frac{x-3}{9}=\frac{y-1}{-12}=\frac{z-29}{8}$
28	$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{12}$	$\frac{x-17}{3}=\frac{y-6}{-4}=\frac{z}{-12}$
29	$\frac{x-1}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-8}$	$\frac{x-3}{8}=\frac{y-4}{9}=\frac{z-14}{4}$
30	$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{4}$	$\frac{x-1}{-4}=\frac{y+9}{-1}=\frac{z-14}{8}$

6. В ромб с диагоналями d_1 и d_2 вписан эллипс так, что больший из диаметров эллипса лежит на большей из диагоналей ромба. Сторона ромба в точке касания с эллипсом делится в отношении $n:m$.

Вычислить:

I) координаты фокусов эллипса;

2) полуоси эллипса;

3) эксцентриситет эллипса;

4) длины фокальных радиусов, проведенных в точку касания;

5) с точностью до I градуса угол между указанными фокальными радиусами;

6) координаты точки касания в I-м квадранте.

Написать уравнения прямых, проходящих через указанную точку касания и фокусы эллипса.

Вариант	n	m	d_1	d_2	Вариант	n	m	d_1	d_2	Вариант	n	m	d_1	d_2
I	2	3	4	5	I	2	3	4	5	I	2	3	4	5
I	I	7	80	I6	8	I	4	70	I0	I5	I	7	80	I6
2	5	4	36	I8	9	5	3	80	48	I6	I	I5	I28	32
3	2	3	20	I0	I0	9	II	I60	I20	I7	2	7	72	I8
4	I	3	I6	8	II	I	I	I2	4	I8	5	4	90	I8
5	I	8	54	I8	I2	I	4	30	I0	I9	2	3	80	I0
6	2	7	36	I8	I3	I	9	I40	20	20	5	II	64	32
7	8	I	90	36	I4	4	5	54	36	2I	I	7	48	I6

Окончание таблицы

I	2	3	4	5	I	2	3	4	5	I	2	3	4	5
22	5	II	96	64	25	I6	9	250	200	28	4	I	70	40
23	2	3	40	30	26	I	I	36	28	29	5	I3	I80	I08
24	I	3	56	32	27	2	7	I44	I8	30	4	I	90	20

7. Даны координаты вершин четырехугольника (XA ; YA), (XB ; YB), (XC ; YC), (XD ; YD).

I) Проверить без построения чертежа, что четырехугольник выпуклый.

2) В каком отношении диагонали делятся в точке пересечения?

Вариант	XA	YA	XB	YB	XC	YC	XD	YD
I	2	3	4	5	6	7	8	9
I	5	-I	I	-I	2	5	22	I3
2	I7	6	0	-3	-I6	-5	-4	9
3	-I	7	-I4	7	I7	-I7	I4	0
4	-I	23	I2	5	6	-5	-I2	-I
5	0	-3	-I0	-5	-9	6	0	5
6	-I	9	-9	I5	-5	-3	-2	I
7	2	8	8	0	-7	-I0	-I6	-8
8	-I	2	I5	-5	-II	-3	-I8	6
9	-3	-I0	6	-I3	5	-2	-I	8
I0	-2	-6	2	-4	4	I2	-6	I2
II	-2	3	II	I6	2	-9	-I6	-20
I2	-I2	-8	-5	I	I2	0	5	-9
I3	-6	-I2	II	-I0	2	4	-I6	8
I4	-6	-I4	I2	-I0	I	0	-I5	8
I5	-4	I	-4	-6	2	-5	20	I2
I6	4	3	-3	4	-4	-5	5	-4
I7	3	-5	-II	-I7	0	4	I3	I9
I8	-9	-I	-I	8	27	-I0	7	-I6
I9	3	I3	I0	-3	-6	-5	-I0	7
20	6	8	2	8	-5	-I4	6	-28
2I	0	I	2	-I5	-2I	-6	-5	6
22	6	4	20	-7	-4	-6	-24	4
23	I3	I3	3	-2	-20	-9	-5	6
24	-I0	0	I	7	6	-8	-8	-II

О к о н ч а н и е   т а б л и ц ы

I	2	3	4	5	6	7	8	9
25	-2	-2	-6	4	4	4	I8	-I2
26	-I2	-I9	3	-I4	I0	I4	-5	2
27	-I0	-3	-3	I0	I8	4	4	-4
28	-I0	2	-7	-4	8	-7	0	3
29	-I	I2	-5	I	-I0	-24	-2	-2
30	2	-I	I	2	8	5	I9	-4

8. Дана гипербола $y = (ax+b)/(cx+d)$.

I) Построить график;

2) привести уравнение к каноническому виду и вычислить параметры гиперболы;

3) найти координаты фокусов в исходной системе координат.

Вариант	a	b	c	d	Вариант	a	b	c	d	Вариант	a	b	c	d
I	8	-38	I	-5	II	8	-54	I	-7	2I	-3	I4	I	6
2	-8	80	I	-9	I2	-9	27	I	-I	22	-6	-4	I	6
3	2	34	I	8	I3	-7	-24	I	6	23	-8	72	I	-8
4	7	-54	I	-8	I4	-3	35	I	-I	24	-4	38	I	-5
5	-5	-I7	I	7	I5	2	48	I	8	25	4	-I8	I	-9
6	2	4	I	I	I6	-5	I7	I	3	26	-2	-8	I	5
7	-2	26	I	-4	I7	-4	-4	I	3	27	-8	42	I	-5
8	-3	53	I	-7	I8	-9	44	I	-4	28	7	30	I	4
9	-8	I8	I	-2	I9	8	42	I	3	29	8	-54	I	-9
I0	-6	-22	I	4	20	-3	39	I	-7	30	-4	20	I	-3

9. Дана парабола $y = ax^2 + bx + c$. Найти координаты фокуса и указать систему координат, в которой уравнение параболы имеет канонический вид.

Вариант	a	b	c	Вариант	a	b	c	Вариант	a	b	c
I	2,5	5,0	4,5	II	-I,5	-I,5	3,0	2I	0,5	2,5	3,0
2	I,0	-3,0	2,0	I2	2,5	-2,5	-5,0	22	-I,0	-4,0	-9,0
3	-I,5	-3,0	-2,5	I3	0,5	-3,5	5,0	23	-0,5	-2,0	-6,0
4	-0,5	2,0	6,0	I4	I,0	4,0	6,0	24	-I,0	5,0	-4,0
5	0,5	-4,0	8,0	I5	-I,0	-2,0	-6,0	25	2,5	-5,0	5,5
6	2,0	6,0	4,0	I6	-0,5	I,0	-3,5	26	0,5	-0,5	-6,0
7	-0,5	-2,0	-0,5	I7	-I,0	2,0	-2,0	27	-2,5	-5,0	-3,5
8	-I,0	2,0	8,0	I8	0,5	-2,0	3,0	28	0,5	3,0	4,0
9	-0,5	I,0	7,5	I9	I,0	-4,0	-5,0	29	0,5	-2,0	5,0
I0	I,0	4,0	3,0	20	-2,0	-8,0	-6,0	30	-0,5	I,0	-5,5

I0. Даны три точки $(XA; YA)$, $(XB; YB)$, $(XC; YC)$.

I) Проверить, что эти три точки не лежат на одной прямой, т.е. образуют треугольник;

2) вычислить параметры треугольника (площадь, периметр, величину угла (C) с точностью до одного градуса);

3) написать уравнение описанной окружности;

4) написать уравнение биссектрисы угла (C);

5) написать уравнения двух перпендикуляров, опущенных из точек A и B на биссектрису угла (C) и вычислить расстояние между ними.

Вариант	XA	YA	XB	YB	XC	YC	Вариант	XA	YA	XB	YB	XC	YC
I	2	3	4	5	6	7	I	2	3	4	5	6	7
I	I5	-I3	7	-I3	I4	I4	II	-I5	I3	-7	I3	-I4	I4
2	24	I	I8	7	I2	-5	I2	-23	-2	-5	-2	-I4	I
3	6	2I	0	2I	-I	I4	I3	-4	-22	2	-22	-I	-I3
4	-I	-2	-I9	-2	-I0	-5	I4	II	6	I7	0	3	-2
5	I	-3	-I7	9	-I0	8	I5	-22	8	-I6	2	-I0	I4
6	I	-8	7	-2	I3	-4	I6	5	2I	-I3	9	-2	I2
7	-I8	2	-I0	-6	I4	0	I7	7	2	-9	I8	-5	6
8	-4	5	-I2	5	-8	7	I8	I4	I	20	-5	8	-I
9	-I5	I4	-7	-I0	-5	4	I9	I5	II	2I	II	I4	I2
I0	-6	-I9	0	-I9	I	-I2	20	-3	20	3	20	4	I3

Окончание таблицы

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
21	-4	9	-12	-15	-2	-5	26	7	11	-3	1	1	7
22	2	-18	20	-12	6	-14	27	-16	-4	2	-10	-2	-6
23	16	16	8	16	7	13	28	-5	-19	-13	-19	-9	-11
24	-2	-5	-8	-5	-9	-6	29	9	-13	21	-1	10	-4
25	18	9	6	3	10	3	30	8	-18	0	6	10	-4

II. Решить системы линейных уравнений:

1. $\begin{cases} 3x+7y-z=-2 \\ x+4y+5z=3 \\ 2x-y+3z=8 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x-3z=0 \\ 2x-y+z=10 \\ 3x+y-4z=-10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x-y+2z=5 \\ x+3y-z=2 \\ 3x+2y+7z=19 \end{cases}$; $\begin{cases} 8x+y+z=19 \\ 5x-y+2z=16 \\ 3x+2y-z=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x+y-z=14 \\ 2x-y+4z=10 \\ 8x+3y-2z=22 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x-y+4z=22 \\ 4x+2y-z=1 \\ 10x+7z=45 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x+y-2z=-7 \\ 3x+7y+z=13 \\ 2x-3y+4z=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x+2y+5z=23 \\ 2x-y+10z=13 \\ x+3y-5z=9 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-2y+4z=7 \\ 2x+y-z=10 \\ -x+7y+2z=4 \end{cases}$; $\begin{cases} 7x+8y-z=0 \\ 2x-5y+8z=0 \\ 9x+3y+7z=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-2y+7z=25 \\ x+3y-z=-13 \\ 5x-y+4z=17 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x+2y-4z=3 \\ x+5y-3z=8 \\ 4x+7y-7z=10 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x+5y-7z=12 \\ 3x-y+4z=7 \\ x+7y-3z=20 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-3y-7z=0 \\ 9x-7y+z=0 \\ -x-y-z=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} -x+4y-z=9 \\ 3x+2y+z=-9 \\ 5x+y-4z=-6 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x+y+2z=2 \\ x+5y+7z=-12 \\ 2x-4y-5z=14 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x+y-3z=-22 \\ 4x+3y+z=2 \\ 3x-y+5z=41 \end{cases}$; $\begin{cases} 8x-y+z=0 \\ 5x+3y-z=0 \\ 13x+2y=1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x+2y-7z=3 \\ 5x-3y+z=5 \\ 2x+4y+5z=17 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x+z=5 \\ 2x-2y+3z=0 \\ 7x-2y+4z=5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x+3y-5z=-4 \\ 3x-2y+7z=-5 \\ 2x+5y-z=10 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x+2y-z=6 \\ -3x+y+10z=8 \\ -x+4y+19z=22 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x-y-3z=0 \\ 3x+2y-7z=-13 \\ 2x+y+4z=17 \end{cases}$; $\begin{cases} 9x-6y+5z=-11 \\ 4x-y+z=-2 \\ 13x-7y+6z=-12 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x-2y+5z=-7 \\ 3x+5y-2z=-1 \\ 2x+3y+z=-7 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+y+5z=9 \\ 7x+3y-z=29 \\ 3x+y-11z=11 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+5y-z=-15 \\ 3x+2y+4z=8 \\ 5x-y+2z=17 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x+3y+5z=23 \\ -2x+y+3z=6 \\ x+4y+8z=29 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 8x-10y+z=24 \\ 5x+y+3z=3 \\ 2x+3y-5z=11 \end{cases}$; $\begin{cases} x+4y-z=5 \\ 2x-3y+5z=13 \\ 4x+5y+3z=23 \end{cases}$

16. $\begin{cases} -5x+4y-z=13 \\ 2x-3y+5z=13 \\ x+4y-z=5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+3y-5z=11 \\ 5x+y+3z=3 \\ 3x-2y+8z=-8 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 7x - 3y + 4z = -4 \\ 3x + 3y + 5z = 23 \\ -2x + y + 3z = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x - y + 2z = 17 \\ 3x + 2y + 4z = 8 \\ 8x + y + 6z = 25 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x - y + 4z = 1 \\ 7x + 3y - z = 29 \\ 2x + y + 5z = 9 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + 3y + z = -7 \\ 3x - 5y - 2z = -1 \\ 5x + 8y - z = -8 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 9x - 6y + 5z = -11 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 4x - y + z = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + y + 4z = 17 \\ 3x + 2y - 7z = -13 \\ 5x + 3y - 3z = 4 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 8x - 6y + 7z = 9 \\ 5x + 2y - z = 6 \\ -3x + y + 10z = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + 5y - z = 10 \\ 3x - 2y + 7z = -5 \\ 8x + y + 13z = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x - 7y + 6z = -3 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \\ 5x + z = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + 4y + 5z = 0 \\ 3x - 2y + 7z = -5 \\ 8x + 19z = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x + 5y - 9z = -4 \\ 8x - y + z = 0 \\ 5x + 3y - z = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x - y + 5z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \\ 10x + y + 11z = 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 4x - y + 8z = -8 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ x + 5y + 7z = -12 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x + y - 4z = -6 \\ 3x + 2y + z = -9 \\ 2x - y - 5z = 3 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 9x - 7y + z = 18 \\ 6x + 5y - 2z = 27 \\ 2x - 3y - 7z = 17 \end{cases}$; $\begin{cases} x + 7y - 3z = 20 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 5x + 13y - 2z = 47 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 10x - y + z = 9 \\ x + 5y - 3z = 8 \\ 3x + 2y - 4z = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x - y + 4z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \\ 6x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x + 7y - 2z = 4 \\ 2x - 5y + 8z = 31 \\ 7x + 8y - z = 26 \end{cases}$; $\begin{cases} -x + 7y + 2z = 4 \\ 2x + y - z = 10 \\ 3x + 9y = 24 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x - y + 10z = 13 \\ 3x + 2y + 5z = 23 \\ 9x - y + 7z = 62 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ 3x + 7y + z = 13 \\ 7x + y + 9z = 13 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + 4z = 22 \\ 2x + 4y - z = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 8x + 3y - 2z = 22 \\ 2x - y + 4z = 10 \\ 4x + 5y - 10z = 2 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 5x - y + 2z = 16 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 9x - y + 4z = 30 \end{cases}$; $\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 3x + 2y + 7z = 19 \\ x - 4y + 9z = 15 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x - y + z = 10 \\ 3x + y - 4z = -10 \\ 4x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ x + 4y + 5z = 3 \\ 5x + 2y + 11z = 19 \end{cases}$

12. Вычислить определитель

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & -4 & -10 \\ 4 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 22 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 31 \\ 7 & 8 & -1 & 26 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 9 & -7 & 1 & 18 \\ 6 & 5 & -2 & 27 \\ 2 & -3 & -7 & 17 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -9 & -4 \\ 8 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 & 16 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 9 & -1 & 4 & 30 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 & 13 \\ 3 & 2 & 5 & 23 \\ 9 & -1 & 7 & 62 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 10 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 8 & -8 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 7 & -12 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 8 & -6 & 7 & 9 \\ 5 & 2 & -1 & 6 \\ -3 & 1 & 10 & 8 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & -1 & 29 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} -5 & 4 & -1 & -13 \\ 2 & -3 & 5 & 13 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 & -15 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \\ 5 & -1 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -7 & -13 \\ 2 & 1 & 4 & 17 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 17 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & -9 \\ 5 & 1 & -4 & -6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 14 \\ 2 & -1 & 4 & 10 \\ 8 & 3 & -2 & 22 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 9 & -6 & 5 & -11 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 & -4 \\ 3 & 3 & 5 & 23 \\ -2 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 8 & -10 & 1 & 24 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 11 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 & -4 \\ 3 & -2 & 7 & -5 \\ 2 & 5 & -1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -22 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 41 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 12 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 7 & -3 & 20 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 & 25 \\ 1 & 3 & -1 & -13 \\ 5 & -1 & 4 & 17 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 10 \\ -1 & 7 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 7 & 19 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 & -7 \\ 3 & 7 & 1 & 13 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

13. Найти обратную матрицу

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ -7 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 9 & 1 & -6 \\ 3 & 8 & -6 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -3 & -4 & 6 \\ -7 & -3 & 5 \\ -4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -8 & 0 & 9 \\ -5 & -9 & 0 \\ 9 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ -4 & -2 & 0 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -6 & -4 & -8 \\ 9 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \\ 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 4 & 5 & 0 \\ 9 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 9 & 0 & 2 \\ -5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 9 \\ -5 & 3 & 3 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -9 & -9 & 0 \\ -1 & -9 & -2 \\ 5 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 7 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 3 & -8 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ 21. $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 9 \\ -5 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ 26. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -8 & 8 & -6 \\ -7 & -6 & -7 \\ -4 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ 22. $\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & -5 & -7 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ 27. $\begin{pmatrix} -4 & -5 & 5 \\ 7 & 1 & -8 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & -9 \\ 9 & -9 & -7 \end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & -2 & -7 \\ 6 & -8 & -5 \end{pmatrix}$ 28. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \\ -6 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -9 & 7 & -3 \\ 6 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ 29. $\begin{pmatrix} -7 & -3 & -7 \\ 9 & -6 & 4 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ 25. $\begin{pmatrix} -6 & 5 & 8 \\ -1 & -3 & -3 \\ 9 & -6 & -8 \end{pmatrix}$ 30. $\begin{pmatrix} -9 & -8 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \\ -7 & -7 & -6 \end{pmatrix}$

14. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 21. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$ 26. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 22. $\begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & 5 & -2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$ 27. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ 28. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 29. $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

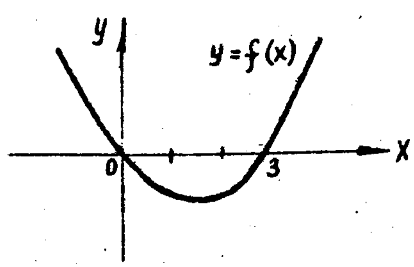
20. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ 25. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 30. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

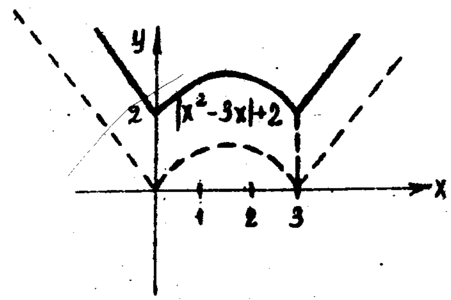
РАЗДЕЛ 2. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Напомним, что графики функций а) $f(-x)$, б) $-f(x)$, в) $f(x-a)$, г) $f(x)+A$, д) $f(kx)$, е) $|f(x)|$ получаются из графика функции $f(x)$ следующими геометрическими преобразованиями: а) отражением относительно оси OY, б) отражением относительно оси OX, в) сдвигом вдоль оси OX на a единиц, г) сдвигом вдоль оси OY на A единиц, д) гомотетией вдоль оси OX в $1/k$ раз ($k \neq 0$), е) отражением относительно оси OX той части графика, которая лежит ниже этой оси.

Задача I. Используя элементарные преобразования, построить график функции $y = |x^2-3x|+2$.

Решение. Сначала строим график параболы $f(x)=x^2-3x$. Затем применяем последовательно преобразования е) и г) – сдвиг по оси на 2 единицы.





Приведем некоторые арифметические формулы, которые можно доказать методом математической индукции:

$$1+2+3+\ldots+n = 1/2\cdot n\cdot(n+1);$$

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2;$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = 1/6\, n(n+1)(2n+1);$$

$$1+a+a^2+\ldots+a^n = (a^{n+1}-1)/(a-1),\ (a\neq 1).$$

Задача 2. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

Решение. Используя третью из формул, приведенных выше, получим:

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3} = \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: I/3.

Напомним, что порядком малости бесконечно малой величины (далее б.м.) $\beta(x)$ относительно бесконечно малой $\alpha(x)$ ($x\to a$) называется такое натуральное число n, что существует и не равен 0 предел отношения $\beta(x)/\alpha(x)^n$ при $x\to a$. Обозначим через $V_\alpha(\beta)$ порядок малости б.м. β относительно б.м. α.

Тогда

$$V_\alpha(\beta_1\beta_2) = V_\alpha(\beta_1)+V_\alpha(\beta_2) \qquad \text{(I)}$$

для любых б.м. β_1, β_2, для которых определены порядки малости относительно α. Действительно, если $n_1 = V_\alpha(\beta_1)$, $n_2 = V_\alpha(\beta_2)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha^{n_1+n_2}} = \lim_{x\to a}\frac{\beta_1}{\alpha^{n_1}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta_2}{\alpha^{n_2}} \neq 0,$$

что доказывает равенство (I).

Задача 3. Определить порядок малости б.м. $\beta(x) = (\cos 2x-1)\times(e^x-e^{-x})\cdot(\sin x - tg x)$ тносительно $\alpha(x)=x$ при $x\to 0$.

Решение. Имеем: $\cos 2x - 1 = -2\sin^2 x$. Так как $V_x(\sin x)=1$ согласно первому замечательному пределу, то $V_x(\cos 2x-1) = V_x(\sin x)+V_x(\sin x) = 2$. Далее, $e^x - e^{-x} = e^{-x}(e^{2x}-1)$ и так как $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-1)/x = 2$, то $V_x(e^x-e^{-x}) = 1$. Функцию $\sin x - tg x$ преобразуем так: $\sin x - tg x = \frac{1}{\cos x}(\cos x-1)\sin x$. Уже доказано, что $V_x(\cos x-1)=2$. Так как $\lim\limits_{x\to 0} 1/\cos x = 1$ в силу непрерывности функции $\cos x$ и $V_x(\sin x)=1$, то $V_x(\sin x - tg x) = 2+1=3$ ввиду равенства (I). Окончательно $V_x(\beta) = V_x(\cos 2x-1)+V_x(e^x-e^{-x})+V_x(\sin x - tg x) = 2+1+3 = 6$.

Ответ: порядок малости $\beta(x)$ относительно x $(x \to 0)$ равен 6.

Задача 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$.

Решение. Обозначим $\alpha(x)=\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}$, $\beta(x)=\frac{\sin x}{x}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\alpha(x)=\frac{0^2-2\cdot 0+3}{0^2-3\cdot 0+2}=3/2, \quad \lim_{x\to 0}\beta(x)=1$$

в силу непрерывности функции $\alpha(x)$ и первого замечательного предела. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\alpha(x)^{\beta(x)}\right)=\lim_{x\to 0}[\beta(x)\ln\alpha(x)]=1\cdot\ln 3/2=\ln 3/2;$$

$$\lim_{x\to 0}\alpha(x)^{\beta(x)}=e^{\ln 3/2}=3/2,$$

где использована непрерывность функций $\ln x$ и e^x.

Ответ: 3/2.

Задача 5. Локализовать какой-либо корень уравнения $e^x=x+2$ с точностью до 0,I.

Решение. Локализовать корень x_0 с точностью до ε, это значит найти такое число x^*, что $x_0\in(x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon)$. Тогда $x_0\approx x^*$ с точностью ε. Заметим, что $e^x/_{x=0}<x+2/_{x=0}$ и $e^x/_{x=2}>x+2/_{x=2}$. Так как функции e^x и $x+2$ непрерывны, то по теореме Больцано-Коши существует корень $x_0\in(0,2)$ уравнения $e^x=x+2$. Для локализации этого корня будем использовать метод дихотомии (деления пополам). Вычисления сведем в таблицу.

x	0	2	I	I,5	I,25	I,I25	...
e^x	I	7,39	2,72	4,48	3,49	3,08	...
$x+2$	2	4	3	3,5	3,25	3,I25	...
e^x ? $x+2$	<	>	<	>	>	<	...

В этой таблице, начиная со столбца $x=1$, выбор значения осуществляется по правилу $x=(a+b)/2$, где a, b – значения переменной x в предыдущих столбцах с условием, что неравенства в последней строке, соответствующие a и b, разного смысла и разность $|b-a|$ при этом наименьшая. Так как $x_0\in$ (I,I25; I,25) и интервал (I,I25; I,25) содержится в интервале (I,I5 – 0,I; I,I5 + 0,I)

то x^* = I,I5 – искомая точка.

Ответ: один из корней уравнения $e^x=x+2$ содержится в интервале (I,I5 – 0,I; I,I5 + 0,I).

ЗАДАНИЯ

I. Для заданной функции $f(x)$ и числа x_0

I) найти область допустимых значений (ОДЗ) функции $f(x)$;

2) элементарными преобразованиями (см. задачу I) построить график функции $f(x)$;

3) если x_0 принадлежит ОДЗ, то найти число δ такое, что $|f(x)-f(x_0)|<0,1$ как только $|x-x_0|<\delta$; если же x_0 не принадлежит ОДЗ, то найти число δ такое, что $|f(x)|>50$ как только $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0$.

I. $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$; -1

2. $\sin\left|2x+\frac{\pi}{3}\right|$; $\frac{\pi}{6}$

3. $x^2-3|x|+2$; 0

4. $\frac{|x-1|}{x+1}$; -1

5. $\sin\left|\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right|$; $\frac{\pi}{3}$

6. $|x^2-3x+2|$; 2

7. $\frac{x-1}{|x+1|}$; -1

8. $\sin\left(2|x|-\frac{\pi}{3}\right)$; $\frac{\pi}{4}$

9. $x^2+|3x-2|$; 1

I0. $\frac{|x|-1}{x+1}$; 1

II. $\left|\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right|$; $\frac{\pi}{6}$

I2. $|x^2+3x|-2$; -2

I3. $\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$; 2

I4. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$; $-\frac{2\pi}{3}$

I5. $|x^2+5x-6|$; 0

I6. $\frac{|x+2|}{x-2}$; 2

I7. $\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right|$; 0

I8. $x^2+5|x|-6$; -1

I9. $\frac{x+2}{|x-2|}$; 2

20. $\cos\left(|x|+\frac{\pi}{4}\right)$; $\frac{\pi}{4}$

2I. $x^2-|5x-6|$; 1

22. $\frac{|x|+3}{x-2}$; 3

23. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2|x|\right)$; $-\frac{\pi}{6}$

24. $|x^2+5x|-6$; -3

25. $\frac{x+2}{|x|-2}$; 2

26. $\sqrt{x^2}$; 0

27. $\operatorname{tg}|x|$; 0

28. $\left|\frac{x+1}{x-2}\right|$; 2

29. $e^{-|x|}$; 0

30. $e^{-\frac{1}{x}}$; 1.

2. Вычислить предел последовательноости

I. $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

2. $\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$

3. $\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(2k+1)-\frac{2n+3}{2}$

4. $\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

5. $\frac{1}{\sqrt{9n^4+1}}\sum_{k=1}^{n}(k+1)$

6. $\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{1+2+\ldots+n}$

7. $\frac{1}{n+3}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)-n$

8. $\frac{1+4+\ldots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$

9. $\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$

I0. $\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(n-1)\cdot(3n)!}$

II. $\frac{2^n-5^{-n+1}}{2^{n+1}+5^{-n+2}}$

I2. $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k \Big/ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k$

I3. $\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(4k+3)$

I4. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(2k+1)$

I5. $\frac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$

I6. $\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$

I7. $\frac{2}{3}-\frac{1}{(n+2)^3}\sum_{k=1}^{n}k$

I8. $\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k+2^k}{6^k}$

I9. $\frac{1}{n+3}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(3k+2)$

20. $\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$

2I. $\frac{2+4+\ldots+2n}{1+3+\ldots+(2n-1)}$

22. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k+1}{4^k}$

23. $\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(5n-3)$

24. $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k+5^k}{10^k}$

25. $\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}$

26. $\frac{5^{-n+2}+3^{n+2}}{5^n+3^n}$

27. $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$

28. $\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2+4+6+\ldots+2n}$

29. $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(3k+2)$

30. $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\cdot k^2$

3. Дана числовая последовательность α_n.

I) Исследовать α_n на монотонность.

2) Найти $A=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$.

3) Указать натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, начиная с которого выполняется неравенство $|\alpha_n - A| < \varepsilon$.

I. $\frac{3-n^2}{1+2n^2}$

2. $\frac{4n-1}{2n+1}$

3. $\frac{1-2n^2}{2+4n^2}$

4. $\frac{-5n}{n+1}$

5. $\frac{4+2n}{1-3n}$

6. $\frac{5n+15}{6-n}$

7. $\frac{1+3n}{6-n}$

8. $\frac{2n+1}{7n-1}$

9. $\frac{7n+4}{2n+1}$

I0. $\frac{2n-5}{3n+1}$

II. $\frac{n+1}{1-2n}$

I2. $\frac{2n+1}{3n-5}$

I3. $\frac{3n-2}{2n+1}$

I4. $\frac{2n-1}{2-3n}$

I5. $\frac{3n-1}{2n+1}$

I6. $\frac{8-3n^3}{1+2n^3}$

I7. $\frac{n+1}{7n-1}$

I8. $\frac{4n^2+1}{3n^2+2}$

I9. $\frac{1-2n^3}{n^2+3}$

20. $\frac{3n^2}{2-n^2}$

2I. $\frac{3n-1}{5n+1}$

22. $\frac{4n-3}{2n+1}$

23. $\frac{5n+1}{3n-5}$

24. $\frac{4n^3}{n^3+1}$

25. $\frac{9-n^3}{1+2n^3}$

26. $\frac{4n-3}{2n+1}$

27. $\frac{n}{3n-1}$

28. $\frac{3n^3}{n^3-2}$

29. $\frac{2-3n}{5n^2+4}$

30. $\frac{3n^3+2}{4n^3-1}$

4. Вычислить предел последовательности

I. $\left(\frac{3n^2+4n}{3n^2-2n}\right)^{2n+5}$

2. $\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$

3. $\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$

4. $\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$

5. $\left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$

6. $\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^2}$

7. $\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n^2}$

8. $\left(\frac{10n-3}{10n+1}\right)^{2n+1}$

9. $\left(\frac{n^2+21n-7}{n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$

I0. $\left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$

II. $\left(\frac{n+4}{n+2}\right)^{2n-1}$

I2. $\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$

13. $\left(\frac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$

14. $\left(\frac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+2}\right)^{n+3}$

15. $\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$

16. $\left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n}\right)^{-n+1}$

17. $\left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

18. $\left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$

19. $\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$

20. $\left(\frac{2n^2+2}{2n^2-1}\right)^{n^2}$

21. $\left(\frac{2n^2-3n+7}{2n^2-5n+1}\right)^{-n^2}$

22. $\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$

23. $\left(\frac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$

24. $\left(\frac{n-7}{n+5}\right)^{\frac{n}{6}+1}$

25. $\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}$

26. $\left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{n-4}$

27. $\left(\frac{n^2+1}{n^2-3}\right)^{-n^2}$

28. $\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{n+2}$

29. $\left(\frac{n+2}{n+4}\right)^{2n+1}$

30. $\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+4}$

5. Вычислить предел функции

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+4x^2+3x}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$

6. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1-3x}{x^2+x}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$

10. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+5x^2+9x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$

12. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$

13. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-4}$

14. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$

15. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x^4-2x+1}$

17. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{2x^3-x^2-1}$

18. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$

19. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$

20. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$

21. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

22. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$

23. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$

24. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$

25. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$

26. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+4x^2+3x}{(2x^2-x+1)^2}$

27. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^4-x^2-1}{x^4-1}$

28. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3-3x-2}$

29. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+x^2}{x^3-3x-2}$

30. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$

6. Вычислить предел функции

1. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

2. $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

5. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

6. $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{4-\sqrt{x}}$

7. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x+x^2}-1-x}{x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x^2+x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}$

13. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}$

14. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$

15. $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$

16. $\lim\limits_{x\to8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$

17. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{11x-1}}{\sqrt[3]{x}}$

18. $\lim\limits_{x\to16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{(\sqrt{x}-4)^{\frac{2}{3}}}$

19. $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2-16}}$

20. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$

21. $\lim\limits_{x\to8} \dfrac{\sqrt{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

22. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt[3]{8+x^3}}{2-\sqrt{x+6}}$

23. $\lim\limits_{x\to-8} \dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$

24. $\lim\limits_{x\to8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{9+2x}-5}$

25. $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{1+2x}-3}$

26. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x-6}+2}$

27. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{1-x^2}$

28. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$

29. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-x}{\sqrt[4]{x}-1}$

30. $\lim\limits_{x\to16} \dfrac{4-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-2}$

7. Вычислить предел выражения $[\alpha(x)]^{\beta(x)}$ при $x\to0$.

Окончание таблицы

Вариант	$\alpha(x)$	$\beta(x)$
I	2	3
I	$1-\ln(1+x^3)$	$\frac{3}{x^2\sin x}$
2	$\cos(\sqrt{x})$	$\frac{1}{x}$
3	$\frac{1+x\cdot2^x}{1+x\cdot3^x}$	$\frac{1}{x^2}$
4	$2-(3)^{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}$	$2\,\mathrm{cosec}\,x$
5	$1+\sin x(\cos x-\cos2x)$	ctg^3x
6	$5-4\sec x$	$(\mathrm{cosec}\,3x)^2$
7	$1-\ln(1+\sqrt[3]{x})$	$x(\mathrm{cosec}\sqrt[3]{x})^4$
8	$2-\exp(\arcsin\sqrt{x})$	$\frac{3}{x}$
9	$\cos\pi x$	$\frac{1}{x\sin\pi x}$
10	$1+\sin^2 3x$	$(\ln\cos x)^{-1}$
II	$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-x)$	$\mathrm{ctg}\,x$
I2	$1-x\sin^2x$	$(\ln(1+\pi x^3))^{-1}$
I3	$2-(5)^{\sin x^3}$	$\frac{\mathrm{cosec}^2x}{x}$
I4	$2-\cos3x$	$(\ln(1+x^2))^{-1}$
I5	$2-\exp(\sin x)$	$\mathrm{ctg}\,\pi x$
I6	$\cos x$	$(\ln(1+\sin^2x))^{-1}$
I7	$2-\exp(x^2)$	$\mathrm{ctg}^2(\frac{\pi x}{3})$
I8	$3-2\cos x$	$-\mathrm{cosec}^2x$
I9	$2-(3)^{\sin^2x}$	$(\ln\cos x)^{-1}$
20	$2-\cos x$	$\frac{1}{x^2}$
2I	$6-5\sec x$	ctg^2x
22	$3-2\sec x$	$\mathrm{cosec}(x^3)$
23	$2-\exp(x^2)$	$1-\cos\pi x$
24	$1-\ln\cos x$	ctg^2x
25	$1-\sin^2 2x$	$(\mathrm{arctg}\,3x)^{-2}$
26	$1+\sin x$	$\frac{1}{x}$
27	$\cos x$	$\frac{1}{x}$
28	$\cos x$	$\frac{1}{x^2}$
29	$\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}$	$\frac{\sin x}{x}$
30	x^2	$\frac{2}{(x+1)}$

8. Определить порядок малости беоконечно малой величины $\beta(x)$ тносительно $\alpha(x)=x$ при $x\to 0$

1. $\cos 7x-\cos 3x$
2. $1-\cos^3(2x)$
3. $\ln(1-\arcsin 7x^2)$
4. $1-\sqrt{3x+1}$
5. $\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x$
6. $(e^{\pi x}-1)(\sqrt[3]{x+1}-1)$
7. $\sin 3x(1-\cos 3x)$
8. $e^x+e^{-x}-2$
9. $\ln(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-2x))$
10. $\operatorname{tg}x-\sin x$
11. $\operatorname{tg}(\pi(x+2))$
12. $\operatorname{arctg}(e^{x^2}-1)$
13. $\sin 3x(3x^2-5x)$
14. $\ln(1-2x)\operatorname{arctg}3x$
15. $\ln(e-x^2)-1$
16. $(1-\cos 2x)(\operatorname{tg}x-\sin x)$
17. $7^{2x}-5^{3x}$
18. $2-\sqrt{\cos x}-3^x$
19. e^x-e^{-x}
20. $\sqrt{4+x}-2$
21. $\sqrt{2+x}-\sqrt{2}$
22. $\sin(2\pi(x+10))$
23. $\operatorname{tg}x\cos(x+\frac{5\pi}{2})$
24. $\sin(e^{3x}-1)$
25. $\ln(x^2+1)(\sqrt{x^2+1}-1)$
26. $\operatorname{tg}(\pi(1+\frac{x}{2}))-\ln(x+1)$
27. $\sin 3x-\sin 5x$
28. $(4^x-9^{-x})(x+\operatorname{tg}x^2)$
29. $\cos 2x-\cos x$
30. $\operatorname{tg}(e^{2x}-1)$

9. Локализовать с точностью до 0,1 какой-либо корень уравнения

1. $x^3+2x-8=0$
2. $x^4-4x+1=0$
3. $x=\sqrt[3]{5-x}$
4. $x^2\cdot\operatorname{arctg}x=1$
5. $x=2+\sqrt[4]{x}$
6. $x^2=\ln(x+1)$
7. $x=\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})$
8. $x^3+60x-80=0$
9. $e^{-x}=\ln x$
10. $e^x=3x$
11. $x=10\lg x$
12. $x^2=-\ln x$
13. $x^2=\cos x$
14. $(x+1)^3=2x$
15. $x^5+x+1=0$
16. $x^2-2=e^x$
17. $x^3-2x-5=0$
18. $x^4+2x-24=0$
19. $x^3-3x+1=0$
20. $\frac{x}{3}=\ln x$
21. $x+\sin x=2$
22. $4x=2^x$
23. $\ln x=\operatorname{arctg}x$
24. $x^3-6x+1=0$
25. $x=2-\lg x$
26. $x=\cos 2x$
27. $x^4-2x=2$
28. $x^6-3x^2=1-x$
29. $\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$
30. $x^x=10$

10. Исследовать точки разрыва функции и дать охематический чертеж в окреоности исследуемой точки

1. $\left(2^{\frac{x}{1-x}}-1\right)^{-1}$
2. $(x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$
3. $(x+1)\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$
4. $\frac{\cos x-1}{x^2}$
5. $\frac{1}{\lg|x-2|}$
6. $\exp(\sec x)$
7. $(x+2)\operatorname{cosec}(x^2-4)$
8. $[\ln(\sin x)]^{-1}$
9. $\frac{-x^3+\pi x^2}{(2)^{\sin x}-(2)^{\operatorname{tg}x}}$

10. $\sin\frac{1}{x}$
11. $\frac{(x+1)^2}{\sin(x+1)}$
12. $\frac{3^{1/x}-1}{3^{1/x}-\sqrt{3}}$
13. $\frac{|x-4|\sin(x+4)}{\arcsin(16-x^2)}$
14. $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$
15. $(1-2^{\operatorname{tg}x})^{-1}$
16. $(7)^{\frac{1}{2-x^2}}$
17. $\frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-2}$
18. $\frac{\arcsin(\pi x)}{\operatorname{tg}(x^2-1)}$
19. $e^{-\frac{1}{x}}$
20. $\frac{e^x-1}{x}$
21. $\operatorname{arctg}\left(\frac{11+x}{x-1}\right)$
22. $\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
23. $(x-\frac{\pi}{2})\sec x$
24. $(4)^{\frac{1}{3+x}}$
25. $\frac{\arccos x}{x^2-1}$
26. $\frac{\ln(1-x^2)}{\cos 2x-1}$
27. $\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{2(1-x)}\right)$
28. $\frac{1}{x^2}(\cos 3x-\cos x$
29. $e^{-\frac{1}{x^2}}$
30. $[\ln(\cos x)]^{-1}$

РАЗДЕЛ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задача 1. Вычислить производную функции $y = x^{3^x}\cdot x^{\sqrt{x}}$.

Решение. Найдем сначала логарифмическую производную функции y

$$(\ln y)' = (3^x \ln x + \sqrt{x}\ln x)' =$$

$$= (3^x + \sqrt{x})'\ln x + \frac{3^x+\sqrt{x}}{x} = \left(3^x\ln 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ln x + \frac{3^x+\sqrt{x}}{x}.$$

Так как $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, то $y' = y\cdot(\ln y)'$.

Ответ: $y' = x^{3^x+\sqrt{x}}\left[\left(3^x\ln 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ln x + \frac{3^x+\sqrt{x}}{x}\right]$.

Задача 2. Найти y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

Решение. Имеем:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{2t/(1+t^2)} = \frac{1+t^2-1}{2t} = \frac{t}{2};$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{1/2}{2t/(1+t^2)} = \frac{1+t^2}{4t}.$$

Ответ: $y''_{xx} = (1+t^2)/4t$.

Задача 3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $y(1{,}77)$, где $y(x) = \sqrt{4x+3}$.

Решение. Рассмотрим точку $x_0 = 1{,}75$, в которой $y(1{,}75) = \sqrt{4\cdot 1{,}75+3} = \sqrt{9} = 3$ и $\Delta x = 1{,}77 - 1{,}75$ мало. Заменяя $\Delta y = y(1{,}77) - y(1{,}75)$ на дифференциал в точке $x_0 = 1{,}75$ и при $\Delta x = 0{,}02$ получим:

$$y(1{,}77) \approx y(1{,}75) + dy = 3 + y'_x(1{,}75)\cdot 0{,}02 =$$

$$= 3 + \left.\frac{2}{\sqrt{4x+3}}\right|_{x=1{,}75}\cdot 0{,}02 = 3 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}02 \approx 3{,}01.$$

Ответ: 3,01.

В задании 13 предлагается следующий план исследования функции с параллельным построением графика:

а) общие особенности функции – область допустимых значений, четность – нечетность, периодичность, ограниченность, положительность и т.п.;

б) точки разрыва функции и их классификация;

в) исследование функции по первой производной – участки возрастания и убывания, точки экстремума;

г) исследование функции по второй производной – участки выпуклости – вогнутости, точки перегиба;

д) асимптотическое поведение функции на $\pm\infty$.

Задача 4. Исследовать функцию $y = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ и построить ее график.

Решение. а) Функция $\frac{x-1}{x+1}$ не определена в точке $x=-1$. Так как функция $\ln z$ определена, только если $z>0$, а $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \geq 0$, причем $\frac{x-1}{x+1} = 0$ лишь в одной точке $x=1$, то получаем еще одну особенность – $x=1$ – функции $y(x)$. Итак, ОДЗ – вся числовая ось кроме точек ± 1.

Далее

$$y(-x) = \ln\left|\frac{-x-1}{-x+1}\right| = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = -\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = -y(x),$$

поэтому $y(x)$ – нечетная функция, а ее график симметричен относительно начала координат. Найдем точки пересечения графика функции $y(x)$ с осью OX:

$$y(x) = 0 \iff \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 1 \iff \frac{x-1}{x+1} = \pm 1 \iff x = 0.$$

Определим знаки функции $y(x)$ в интервалах знакопостоянства $(-\infty, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, 1)$; $(1, +\infty)$

$$\begin{array}{ccccccccc} & + & & + & & - & & - & y(x) \\ \hline & & -1 & & 0 & & 1 & & x \end{array};$$

б) Так как $\lim\limits_{x\to -1}\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = +\infty$ и $\ln z$ – монотонно возрастающая неограниченная функция, то $x=-1$ – вертикальная асимптота и $\lim\limits_{x\to -1} y(x) = +\infty$. В силу нечетности $x=1$ – также вертикальная асимптота и $\lim\limits_{x\to 1} y(x) = -\infty$.

в) Находим решения уравнения $y'(x)=0$. Имеем:

$$\frac{x-1}{x+1} \geq 0 \iff x > 1 \quad \text{или} \quad x < -1 \iff |x| > 1.$$

Тогда $y'(x)=\frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{2}{x^2-1}$.

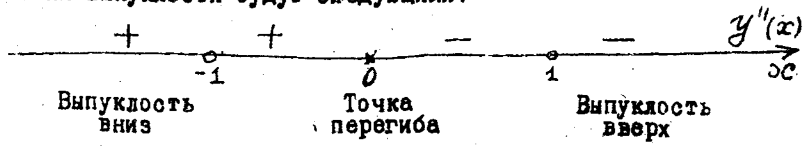
Если же $|x|<1$, то

$$y'(x)=\frac{1+x}{1-x}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=\frac{1+x}{x-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{2}{x^2-1}.$$

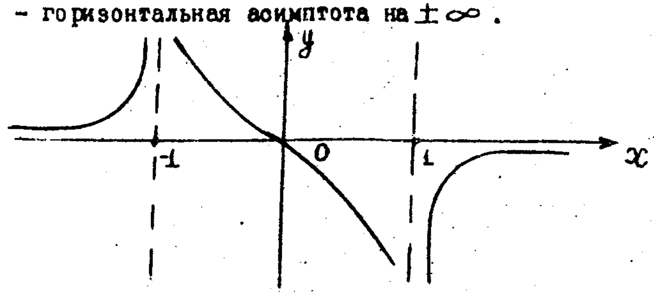
Следовательно, $y'(x)\neq 0$ в области допустимых значений. Знаки производной $y'(x)$, значит, и участки монотонности функции $y(x)$ будут следующими

Заметим, что $y'(0)=2$ – тангенс угла наклона касательной графика функции $y(x)$ в точке (0, 0).

г) Вычисляем $y''=\left(\frac{2}{x^2-1}\right)'=\frac{-2\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$ и находим решения уравнения $y''(x)=0$. Имеем один корень: $x=0$. Знаки y'' и участки выпуклости будут следующими:



д) Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=1$, то $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x)=\ln 1=0$ и поэтому $y=0$ – горизонтальная асимптота на $\pm\infty$.



ЗАДАНИЯ

1. Найти производную функции

1. $\sin^2 3x+\frac{\sin^2 4x}{3\cos 6x}$

2. $\operatorname{tg}\ln x-\frac{\sin^2 3x}{4\cos 8x}$

3. $\cos(x^2)-\frac{\sin^2 2x}{4\cos 4x}$

4. $\operatorname{tg}\sqrt{x}-\frac{\sin^2 7x}{7\cos 10x}$

5. $\operatorname{ctg}\sqrt{x}+\frac{\sin^2 6x}{6\cos 8x}$

6. $\sin\ln x+\frac{\sin^2 10x}{5\cos 6x}$

7. $\sin\sqrt{x}+\frac{\sin^2 5x}{5\cos 10x}$

8. $\ln(\cos x)-\frac{\cos^2 16x}{4\sin 4x}$

9. $\sin\frac{1}{\sqrt{x^3}}+\frac{\sin^2 17x}{17\cos 34x}$

10. $\operatorname{ctg}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sin^2 19x}{19\cos 38x}$

11. $\operatorname{ctg}\frac{\sqrt{x^3}}{1}+\frac{\sin^2 21x}{7\cos 7x}$

12. $\sqrt[3]{\sin x}+\frac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}$

13. $\sqrt{\cos x}+\frac{\sin^2 25x}{10\cos 10x}$

14. $\sqrt[3]{\ln x}+\frac{\sin^2 27x}{9\cos 9x}$

15. $\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}$

16. $\cos\ln x+\frac{\cos^2 3x}{2\sin 6x}$

17. $\operatorname{ctg}(x^3)-\frac{\cos^2 4x}{3\sin 7x}$

18. $\sin(x^3)+\frac{2\cos^2 3x}{\sin 4x}$

19. $\cos\ln x-\frac{\cos^2 8x}{16\sin 4x}$

20. $\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-\frac{\cos^2 10x}{10\sin 2x}$

21. $\ln(\sin x)-\frac{4\cos^2 2x}{\sin 8x}$

22. $\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\cos^2 14x}{7\sin 7x}$

23. $\ln(\sin x)+\frac{\sin^2 15x}{5\cos 3x}$

24. $\operatorname{tg}\sqrt{x^3}-\frac{\cos^2 18x}{9\sin 9x}$

25. $\sin\sqrt{x^3}-\frac{\cos^2 20x}{10\sin 10x}$

26. $\sqrt{\ln x}-\frac{\cos^2 22x}{11\sin 11x}$

27. $\sqrt{\sin 2x}-\frac{\cos^2 24x}{6\sin 6x}$

28. $\sqrt{\operatorname{tg}x}-\frac{\cos^2 26x}{2\sin 2x}$

29. $\frac{1}{\ln x}-\frac{\cos^2 28x}{14\sin 14x}$

30. $\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos^2 30x}{10\sin 10x}$

2. Найти производную функции

1. $\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{2}}$

2. $\arcsin\frac{e^x-2}{\sqrt{5}\,e^x}$

3. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}$

4. $\arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$

5. $\frac{1}{4}\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}e^x$

6. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{x}$

7. $\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\frac{3e^x-1}{\sqrt{6e^x}}$

8. $\frac{(x-4)\sqrt{8x-x^2-7}}{2}-9\arccos\sqrt{\frac{x-1}{6}}$

9. $\frac{\operatorname{arctg}2^x}{4^x}+\frac{1}{3\cdot 8^x}$

10. $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1+x}{2x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$

11. $\frac{4+x^4}{x^3}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}+\frac{4}{x}$

12. $\frac{\sqrt{1-9^x}}{2}-\frac{\arccos 3^x}{2\cdot 9^x}$

13. $\frac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2-8}+\arcsin\sqrt{\frac{x-2}{2}}$

14. $\frac{2\sqrt{1-4^x}\arcsin 2^x}{4^x}+2^{1-x}$

15. $\operatorname{arctg}2^x+\frac{5}{6}\ln\frac{4^x+1}{4^x+4}$

16. $\sqrt{1-\ln^2x}-\ln x\arcsin\sqrt{1-\ln^2x}$

17. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-9^x}}{1-3^x}$

18. $\frac{x}{2\sqrt{1-4x^2}}\arcsin 2x+\frac{1}{8}\ln(1-4x^2)$

19. $\sqrt{1+2x-x^2}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{x+1}-\sqrt{2}\ln(1+x)$

20. $\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}$

21. $\frac{3+x}{2}\sqrt{2x-x^2}+3\arccos\sqrt{\frac{x}{2}}$

22. $\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$

23. $6\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{6+x}{2}\sqrt{4x-x^2}$

24. $\frac{(1+3^{2x})\operatorname{arctg}3^x-3^x}{3^{2x}}$

25. $\frac{2x-5}{4}\sqrt{5x-4-x^2}+\frac{9}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-1}{3}}$

26. $\arcsin\frac{3^x-2}{(3^x-1)\sqrt{2}}$

27. $\sqrt{\ln x}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\ln x}-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\ln x}}{2}$

28. $(2x^2+6x+5)\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-x$

29. $(2x^2-x+\frac{1}{2})\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}-\frac{x^3}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

30. $\operatorname{arctg}\frac{e^{x/2}-1}{2}+e^{x/2}\sqrt{e^x-1}$

3. Найти производную функции

1. $\arcsin^3(\ln x)\arccos^2\frac{1}{\ln x}$

2. $\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\arccos^2\sqrt{x}}$

3. $\operatorname{ctg}^4 8x\cdot\sqrt[4]{\operatorname{arctg}^5\frac{1}{8x}}$

4. $\sqrt{\arcsin^3(\ln x)}\cdot e^{-\operatorname{tg}^3x}$

5. $\arcsin^2(4^x)\cdot 4^{\sqrt{\operatorname{tg}2x}}$

6. $\operatorname{tg}^5\frac{3}{x^2}\cdot\operatorname{arctg}^3(3x^2)$

7. $\sqrt[3]{\arcsin^4\frac{2}{x}}\cdot\arccos^7\frac{x}{2}$

8. $\sqrt{\operatorname{arctg}^3(\ln x)}\operatorname{arcctg}^5\left(\frac{1}{\ln x}\right)$

9. $\operatorname{tg}^5(4^x)\ln^2(\sin 4x)$

10. $\sqrt{\ln(\operatorname{arctg}2x)}\cdot\operatorname{arcctg}^2(2x)$

11. $2^{-\operatorname{tg}^3 2x}\cdot\arcsin^4\frac{1}{2x}$

12. $\operatorname{arctg}^5\left(\frac{1}{5x}\right)\sqrt{\ln^3(10x)}$

13. $\operatorname{tg}^4(2^{-x^2})\arcsin^3\left(\frac{2}{x^2}\right)$

14. $\sqrt[3]{\arccos^5\left(\frac{2}{x}\right)}\cdot e^{-2\cos 2x}$

15. $\arcsin^3(\ln^2x)\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^9 3x}$

16. $\arccos^4\left(\frac{7}{x}\right)\cdot\sqrt{\operatorname{arctg}7x}$

17. $\sqrt{\arccos^3(2\ln x)}\cdot e^{-\operatorname{tg}^4 4x}$

18. $\ln^5(\arccos 3x)\cdot\arccos^3\frac{3}{\ln x}$

19. $\sqrt[3]{\ln^2(3\arcsin x)}\cdot\arccos^3\frac{3}{x}$

20. $4^{-\operatorname{arctg}^4 4x}\cdot\operatorname{arcctg}\frac{4}{x^2}$

21. $\arcsin^6\sqrt{\ln x}\cdot\arccos^2\left(\frac{1}{\ln x}\right)$

22. $\sqrt[4]{\operatorname{arctg}^5\frac{5}{x^2}}\cdot\operatorname{arcctg}^2(5x^2)$

23. $3^{-\sqrt{\operatorname{ctg}3x}}\cdot\operatorname{arctg}^3\left(\frac{3}{x^3}\right)$

24. $2^{\operatorname{tg}^3(2x)}\cdot\arcsin^4(\operatorname{ctg}2x)$

25. $\operatorname{tg}^5(3\ln x)\arcsin^2\sqrt{\ln x}$

26. $2^{-\sqrt{\operatorname{ctg}2x}}\cdot\arcsin^3\left(\frac{1}{2x}\right)$

27. $3^{\operatorname{tg}^3(3x)}\cdot\sqrt[3]{\arccos^2\frac{1}{3x}}$

28. $2^{\operatorname{ctg}^4 8x}\cdot\arcsin^4\left(\frac{1}{8x}\right)$

29. $\sqrt[5]{\ln^4(1+\operatorname{tg}2x)}\cdot\operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{2x}\right)$

30. $\arcsin^5(3\ln^3x)\cdot\arccos^3\left(\frac{3}{\ln x}\right)$

4. Найти производную функции

1. $x^{2^x}\cdot 2^x$

2. $(\operatorname{arctg}3x)^{\ln\sqrt[3]{x}}$

3. $\dfrac{x^{x}}{x^{\ln x}}$

4. $(\mathrm{arctg}\,x)^{\frac{1}{2}\ln \mathrm{arctg}\,2x}$

5. $(\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$

6. $(\mathrm{arctg}\sqrt{x})^{e^{-\frac{1}{x}}}$

7. $(\mathrm{tg}\,3^{x})^{e^{\cos^2\frac{1}{x}}}$

8. $(x\cdot\sin x)^{\sin(x\cdot\sin x)}$

9. $(\cos x^3)^{\ln\cos x^3}$

10. $(1-x^2)^{\mathrm{ctg}^2 3x}$

11. $\left(\sin\frac{2}{x}\right)^{5^{\frac{x}{2}}}$

12. $x^{\frac{1}{x}}\cdot x^{\frac{1}{\ln x}}$

13. $(\sin\sqrt{x})^{e^{\frac{1}{x}}}$

14. $(\mathrm{tg}\,2x)^{\frac{1}{4}\ln\mathrm{tg}\,2x}$

15. $(\cos 2x)^{\frac{1}{4}\ln\cos 2x}$

16. $\left(\arcsin\frac{3x}{\sqrt{3}}\right)^{\sin 3x}$

17. $\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{\arcsin\sqrt{x}}$

18. $x^{e^{\cos^2\sqrt{x}}}$

19. $(\sin\sqrt{2x})^{e^{2x}}$

20. $(\arcsin 2x)^{e^{\sqrt{2x}}}$

21. $(\cos\sqrt{1-5x})^{\mathrm{tg}\,x}$

22. $(\sin 2x)^{\mathrm{tg}\,2x}$

23. $(\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}$

24. $x^{x^2}\cdot x^2$

25. $(\mathrm{arctg}\,2x)^{\sin\frac{3}{x}}$

26. $x^{3^{x^2}}\cdot 2^{\frac{1}{x}}$

27. $(\arcsin\sqrt{1-x^2})^{\mathrm{ctg}\,x}$

28. $\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}$

29. $x^{e^{\mathrm{arctg}\,x}}$

30. $x^{2^x}\cdot x^{\frac{1}{x}}$

5. Найти производную y'_x

1. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t} \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\mathrm{tg}\sqrt{1+t} \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}} \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}) \\ y=\sqrt{1+t^2}-\ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t} \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \\ y=t\cdot\sqrt{t^2+1} \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2} \\ y=\arcsin(t-1) \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=\mathrm{ctg}(2e^t) \\ y=\ln\mathrm{tg}\,e^t \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=\ln\mathrm{ctg}\,t \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=\mathrm{arctg}(e^{t/2}) \\ y=\sqrt{e^t+1} \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=\ln\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}} \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}\right) \\ y=\arcsin\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

12. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$

13. $\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{1-t^2} \\ y=(\arccos t)^2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \end{cases}$

15. $\begin{cases} x=(1+\cos^2 t)^2 \\ y=\dfrac{\cos t}{\sin^2 t} \end{cases}$

16. $\begin{cases} x=\ln\dfrac{1-t}{1+t} \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

17. $\begin{cases} x=\arccos\left(\dfrac{1}{t}\right) \\ y=\sqrt{t^2-1}+\arcsin\dfrac{1}{t} \end{cases}$

18. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\ln t} \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \end{cases}$

19. $\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{t} \\ y=\sqrt{1+\sqrt{t}} \end{cases}$

20. $\begin{cases} x=(\arcsin t)^2 \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x=t\cdot\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t} \end{cases}$

22. $\begin{cases} x=(\mathrm{arctg}\,t) \\ y=\ln\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t+1} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x=\ln(1-t^2) \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

24. $\begin{cases} x=\mathrm{arctg}\,\dfrac{t+1}{t-1} \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

25. $\begin{cases} x=\ln\sqrt{(1-\sin t)/(1+\sin t)} \\ y=\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2 t+\ln\cos t \end{cases}$

26. $\begin{cases} x=\sqrt{t-t^2}-\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{1-t}{t}} \\ y=\sqrt{t}-\sqrt{1-t}\,\arcsin\sqrt{t} \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t} \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2 \cdot \ln t}{1-t^2} + \ln\sqrt{1-t^2} \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t + \ln\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = e^{\sec^2 t} \\ y = \operatorname{tg} t \cdot \ln\cos t + \operatorname{tg} t - t \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t + \ln\sqrt{1-t^2} \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$

6. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически

1. $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = 2\sec^2 t \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t \\ y = 1/\operatorname{ch}^2 t \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \dfrac{y}{\sqrt{1-t}} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sec t \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \dfrac{1}{\sin 2t} \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1} \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{t-1}} \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t} \\ y = \sqrt{t-t^2} \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{1+2\cos t} \\ y = \dfrac{\sin t}{1+2\cos t} \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \operatorname{sh} t \\ y = \operatorname{th}^2 t \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg}^2 t \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \sqrt{t-3} \\ y = \ln(t-3) \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln\cos t \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 + \cos t \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \ln\sin t \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin^4\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 4(2 + \cos t) \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t \\ y = \cos t + t\sin t \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

7. Найти производную y'_x функции $y(x)$, заданной неявно

1. $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$
2. $\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$
3. $xy^2 = e^{\frac{y}{x}}$
4. $x - y + a\sin y = 0$
5. $x - y + e^y \operatorname{arctg} x = 0$
6. $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$
7. $\cos(x-y) - 2x + 4y = 0$
8. $\cos(xy) = \frac{y}{x}$
9. $e^{x+y} = \sin\frac{y}{x}$
10. $y\ln x - x\ln y = x + y$
11. $x\sin y + y\sin x = 0$
12. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$
13. $xy = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$
14. $e^x \sin y - e^y \cos x = 0$
15. $\sqrt{x^2+y^2} = ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$
16. $y\sin x = \cos(x-y)$
17. $e^{x-y} = x \cdot y$
18. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
19. $\ln y = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$
20. $x\sin y - y\cos x = 0$
21. $y\sin x + \cos(x-y) = \cos y$
22. $xe^y + ye^x = xy$
23. $xy + \ln y - 2\ln x = 0$
24. $\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = \ln(x^2+y^2)$
25. $x^y = y^x$
26. $e^x + e^y - 2^{xy} = 1$

27. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

28. $e^{xy}=x+y$

29. $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$

30. $y\sin x-\cos(x-y)=0$

8. Найти производную второго порядка от функции $y(x)$, заданной неявно

1. $e^{x+y}=xy$
2. $y=1+xe^{y}$
3. $xy-\ln y=1$
4. $e^{x+y}=x$
5. $y=\cos(x+y)$
6. $y=\operatorname{tg}(x+y)$
7. $x^2y=e^{y}$
8. $e^{y}+xy=e$
9. $\cos(x+y)+x=0$
10. $\ln(x+y)=x-y$
11. $\operatorname{arctg}(x+y)-y=0$
12. $y=x+\ln y$
13. $x+y=e^{x-y}$
14. $\ln(x+y)=y+a$
15. $e^{x}-e^{y}=y-x$
16. $\ln(y-x)=x-y$
17. $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$
18. $e^{x-y}=x\cdot y$
19. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$
20. $xy=\ln y$
21. $x^3+y^3-3xy=0$
22. $xy=e^{y}$
23. $x-y+\operatorname{arctg}y=0$
24. $ye^{x}+e^{y}=0$
25. $\ln(x\cdot y)=x+y$
26. $x-y=e^{x+y}$
27. $\operatorname{arctg}y=x+y$
28. $x+y=e^{x+y}$
29. $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=\ln(x^2+y^2)$
30. $e^{x-y}=y$

9. Найти дифференциал функции $y(x)$

1. $x\arcsin\frac{1}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2-1})$
2. $\sqrt{1+2x}-\ln(x+\sqrt{1+2x})$
3. $\arccos\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$
4. $x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $\ln(\cos^2x+\sqrt{1+\cos^4x})$
6. $\arcsin\frac{a}{x}+\ln\sqrt{x^2+a^2}$
7. $x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2}$
8. $\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x}$
9. $e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$
10. $x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$
11. $\ln(2x+2\sqrt{x^2+x}+1)$, $x>0$
12. $x\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\sqrt{x^2+a^2}$

13. $x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}$
14. $x\ln(x+\sqrt{x^2+3})-\sqrt{x^2+3}$
15. $\arccos\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}$
16. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arctg}x$
17. $\ln(e^{x}+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}$
18. $\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{x}{\sin x}$
19. $\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\ln(1+x\sqrt{1-x^2})$
20. $\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x}$
21. $\operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
22. $e^{-\cos^2(1-\frac{1}{x})^3}$
23. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$
24. $x(\sin\ln x-\cos\ln x)$
25. $\cos x\ln\operatorname{tg}x-\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$
26. $\sqrt{x}-(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$
27. $e^{x}(\cos2x+2\sin2x)$
28. $e^{x}\operatorname{arctg}e^{x}-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$
29. $\sqrt{3+x^2}-x\ln(x+\sqrt{3+x^2})$
30. $\operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arccos x$

10. Для заданной функции $y(x)$ и заданного числа $\bar{x}$ вычислить приближенно $y(\bar{x})$ с помощью дифференциала первого порядка

1. $\sqrt[3]{x}$; 27,54
2. $\sqrt[3]{x}$; 7,76
3. $\frac{1}{2}(x+\sqrt{5-x^2})$; 0,98
4. $\sqrt[3]{x^2+2x+5}$; 0,97
5. $\operatorname{arctg}x$; 0,98
6. $\sqrt[3]{x}$; 26,46
7. x^{11}; 1,021
8. $\sqrt[3]{x^2}$; 1,03
9. x^{6}; 2,01
10. x^{7}; 1,996
11. $\frac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$; 1,016
12. $\frac{1}{\sqrt{x}}$; 4,16
13. $\sqrt[3]{3x+\cos x}$; 0,01
14. x^{5}; 2,997
15. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$; 1,58
16. $\sqrt[4]{x}$; 15,68
17. $\sqrt[3]{x^3+7x}$; 1,012
18. $\arcsin x$; 0,08
19. $\sqrt[3]{x}$; 7,64
20. $\sqrt{x^2+x+3}$; 1,97
21. $\operatorname{arctg}x$; 1,05
22. $\sqrt[3]{x}$; 1,21
23. x^{21}; 0,998
24. $\sqrt[3]{x}$; 8,24

25. $\sqrt{4x-1}$; 2,56

26. $\sqrt{1+x+\sin x}$; 0,01

27. x^7; 2,002

28. $\sqrt{x^3}$; 0,98

29. $\sqrt[4]{2x-\sin\frac{\pi x}{2}}$; 1,02

30. $\sqrt{x^2+5}$; 1,97

11. Составить уравнение нормали и касательной к графику заданной функции в заданной точке

1. $(4x-x^2)/4$; 2
2. $x-x^3$; -1
3. $x+\sqrt{x^3}$; 1
4. $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; 4
5. $2x^2-3x+1$; 1
6. $\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$; 64
7. $2x^2+3$; -1
8. x^2-4x; 1
9. $\dfrac{x^5-1}{x^4+1}$; 1
10. $3(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x})$; 1
11. $\dfrac{x}{x^2+1}$; -2
12. $\dfrac{2x}{x^2+1}$; 1
13. $\dfrac{1+3x^2}{2+x^2}$; 1
14. $3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}$; 1
15. $\dfrac{x^2}{10}+3$; 2
16. $2x^2+3x-1$; -2
17. $x^2+8\sqrt{x}-32$; 4
18. $\sqrt[3]{x^2}-20$; -8
19. $8\sqrt[4]{x}-70$; 16
20. $\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$; 3
21. $\dfrac{x^3+2}{x^3-2}$; 2
22. $\dfrac{x^{10}+6}{x^4+1}$; 1
23. $2x+\dfrac{1}{x}$; 1
24. $\dfrac{x^{16}+9}{1-5x^2}$; 1
25. $\dfrac{1}{3x+2}$; 2
26. $\frac{1}{3}(x^2-3x+3)$; 3
27. $-2(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x})$; 1
28. $14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+2$; 1
29. $\frac{1}{3}(3x-2x^3)$; 1
30. $\frac{1}{4}(x^2-2x-3)$; 4

12. Применяя правило Лопиталя, найти предел функции

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2}{\sin^2 x}$

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\ln\sin 3x}{(6x-\pi)^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{(x-2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x-1)}$

6. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x-e^{-x})}{e^{x^2+1}-e}$

9. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\ln\cos 2x}{\left(1-\frac{\pi}{x}\right)^2}$

10. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}$

11. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$

12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\cdot\sin x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 3x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$

23. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1-\cos\sqrt{x})}{1-\cos x}$

29. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$

30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$

13. Провести полное исследование функций и построить графики

I. $\frac{3x^2-6x}{x-1}$; xe^{x+1}

2. $x^2\ln x$; $\frac{(x-1)(x-2)}{x}$

3. $\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$; $x\ln x$

4. $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $\sqrt[3]{12x-4x^3}$

5. e^{x^2-6x}; $\frac{4x-8}{(x-1)^2}$

6. $\sqrt[3]{1-x^3}$; $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

7. $\frac{x^2}{x^2+3}$; $\operatorname{arctg} x - x$

8. $-\frac{x^3}{(x+1)^2}$; $(x-1)e^{x-1}$

9. $\frac{x^2}{x^2-4}$; $\frac{4x}{4+x^2}$

I0. $\frac{x}{x^2+1}$; $\frac{(x+1)(2-x)}{2x-3}$

II. $\frac{x^3}{x^2+3}$; $\frac{1}{x^2-6x+5}$

I2. $\frac{x^2+8}{(x+2)^2}$; $2^{\frac{1}{x}}$

I3. $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$; $\sqrt{4x^2+4}$

I4. $x+2\operatorname{arctg} x$; $(x-1)e^{1-x}$

I5. $\frac{x^2-8}{(x-2)^2}$; $(x-3)\sqrt{x}$

I6. $\frac{x+\sqrt{2}}{x^2-1}$; $\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

I7. $\frac{x}{x^2-1}$; $(1+x^2)e^{-x^2}$

I8. $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$; $(13+4x^2)e^{-x^2}$

I9. $\frac{e^{-x^2}}{x^2}$; $\frac{x-1}{(2x-1)(2-x)}$

20. $\sqrt[3]{6x^2-x^3}$; $\frac{8x-2x^2}{(x-2)^2}$

2I. $\frac{x^3}{x^2-3}$; $x-\ln(x+1)$

22. $(x-1)^2e^x$; $\sqrt[3]{4x^3-12x}$

23. $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; x^2e^x

24. $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; $\frac{18x-3x^2}{(x-3)^2}$

25. $\frac{16}{x^2(x-4)}$; $\frac{x}{\ln x}$

26. $\frac{x^3}{(1-x^2)}$; xe^{-x}

27. $\frac{2x-1}{x^2}$; $\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{x^3-1}$

28. $\frac{|x-1|}{x}$; $\frac{1}{1+x^2}$

29. x^3-3x; $\frac{(2x+1)x}{(x+3)(1-x)}$

30. $\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}$; $(3x+5)e^{-3x-2}$

РАЗДЕЛ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задача I. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-3xy$.

Решение. Найдем частные производные I-го порядка и воспользуемся необходимым условием экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2-3y=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2-3x=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-y=0 \\ y^2-x=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим две стационарные точки: $P_1(0,0)$ и $P_2(I,I)$. Найдем частные производные 2-го порядка:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3,\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

Затем вычислим дискриминант $\mathcal{D}=AC-B^2=36xy-9$ для каждой стационарной точки:

$$\mathcal{D}/P_1 = 36\cdot 0\cdot 0-9=-9<0;$$

$$\mathcal{D}/P_2 = 36\cdot 1\cdot 1-9=27>0;\quad A/P_2=6>0.$$

Следовательно, в силу достаточного условия экстремума в точке P_1 экстремума нет, а в точке P_2 локальный минимум.

Ответ: (I,I) – точка локального минимума.

Точка $P(x_0, y_0)$ называется условным максимумом (минимумом) функции $z=f(x,y)$ с условием связи $\varphi(x,y)=0$, если существует окрестность U точки P такая, что $f(x_1,y_1)\le f(x_0,y_0)$ $(f(x_1,y_1)\ge f(x_0,y_0))$ как только $\begin{cases}(x_1,y_1)\in U \\ \varphi(x_1,y_1)=0.\end{cases}$

Задача о вычислении условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум функции Лагранжа $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$. Итак, система трех уравнений $\frac{\partial L}{\partial x}=0$, $\frac{\partial L}{\partial y}=0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$ выражает необходимое условие условного экстремума. Пусть (x_0,y_0,λ_0) – решение этой системы, а

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(P) & \varphi'_y(P) \\ \varphi'_x(P) & L''_{xx}(P,\lambda_0) & L''_{xy}(P,\lambda_0) \\ \varphi'_y(P) & L''_{xy}(P,\lambda_0) & L''_{yy}(P,\lambda_0) \end{vmatrix}$$

Если $\Delta < 0$, то $P(x_0, y_0)$ – условный максимум; в случае $\Delta > 0$ $P(x_0,y_0)$ – условный минимум.

Задача 2. Найти условный экстремум функции $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$

Решение. Составим функцию Лагранжа $L(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2+y^2-5)$ и воспользуемся необходимым условием условного экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1/(2\lambda) \\ y = -1/\lambda \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Решая эту систему, получим две точки: $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $\lambda_1 = 1/2$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, $\lambda_2 = -1/2$. Так как

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda, \quad \varphi'_x = 2x, \quad \varphi'_y = 2y;$$

то

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = -8(-x^2\lambda - y^2\lambda) = 8\lambda(x^2 + y^2).$$

Имеем: $\Delta(x_1, y_1, \lambda_1) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+4) = 20 > 0$ и $\Delta(x_2, y_2, \lambda_2) = 8 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (1+4) = -20 < 0$. Следовательно, P_1 (-I,-2) – точка условного минимума, а P_2 (I,2) – точка условного максимума.

Ответ: (-I,-2) – точка условного минимума, (I,2) – точка условного максимума.

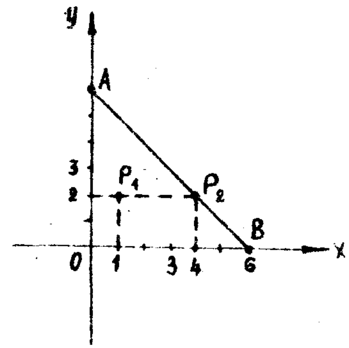
Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y(4 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x + y = 6$, $x = 0$, $y = 0$.

Решение. Во-первых, отметим, что z – непрерывная функция, а $\Delta\, OAB$ (см. рисунок) – ограниченная замкнутая область.

Следовательно, по теореме Вейерштрасса существуют наибольшее и наименьшее значения функции z в $\Delta\, OAB$. Точка, в которой достигается наибольшее (наименьшее) значение, является либо стационарной точкой функции z, лежащей внутри $\Delta\, OAB$, либо стационарной точкой сужения функции z на одну из сторон $\Delta\, OAB$, либо, наконец, совпадает с одной из вершин O, A, B.

Найдем стационарные точки внутри $\Delta\, OAB$:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 8xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 - x^3 - 2x^2y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 8 - 3x - 2y = 0 \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$



Ввиду того, что $x > 0$ и $y > 0$ внутри $\Delta\, OAB$, мы смогли сократить на x и y. Точка P_1 (I,2) действительно лежит внутри $\Delta\, OAB$ и $z(1,2) = 4$.

Далее, сужая функцию z на стороны OA и OB, находим, что $z/_{OA} = z/_{OB} = 0$. На стороне AB зависимость y от x такова: $y = 6 - x$; поэтому

$$z/_{AB} = x^2(6-x)(4-x-6+x) = -12x^2 + 2x^3.$$

Находим стационарные точки этой функции в интервале (0,6):

$$(-12x^2 + 2x^3)' = 0 \Longleftrightarrow -24x + 6x^2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

Из этих двух точек интервалу (0,6) принадлежит только вторая, для которой $y_2 = 6 - 4 = 2$ и $z(x_2, y_2) = 4^2 \cdot 2 \cdot (4-4-2) = -64$.

Наибольшее значение функции z в $\Delta\, OAB$ совпадает с наибольшим значением в точках P_1, P_2, O, A, B, а также значением 0 в любой из внутренних точек сторон OA и OB. Последнее наибольшее значение не составляет труда вычислить: $z_{max} = 4$, так как $z(0) = z(A) = z(B) = 0$ и $0 < 4$; $-64 < 4$. Аналогично, $z_{min} = -64$.

Ответ: $z_{max} = z(1,2) = 4$; $z_{min} = z(4,2) = -64$.

Заметим, что при решении 3-й задачи мы не пользовались достаточным условием экстремума.

ЗАДАНИЯ

I. Найти дифференциал второго порядка

I. $z = e^{xy}$	4. $z = x\cos y + y\sin x$
2. $z = e^x \cos y$	5. $z = x^2 + 2y^2 - 3xy + 4x + 2y$
3. $z = \frac{x}{y}$	6. $z = \operatorname{arctg} xy$

7. $z = x^y$
8. $z = \ln xy$
9. $z = \arcsin xy$
10. $z = \arccos xy$
11. $z = \ln(x^2+y^2)$
12. $z = \sin xy^2$
13. $z = \cos x^2 y$
14. $z = \operatorname{tg} xy$
15. $z = e^y \sin x$
16. $z = e^x \sin y$
17. $z = \frac{x}{y^2}$
18. $z = \operatorname{tg}(x^2+y^2)$
19. $z = \operatorname{ctg}(x^2-y^2)$
20. $z = x \arcsin y^2$
21. $z = y \arccos x^2$
22. $z = yx^y$
23. $z = xy^x$
24. $z = \frac{x}{x^2+y^2}$
25. $z = \frac{y}{x^2+y^2}$
26. $z = \frac{x+y}{x-y}$
27. $z = \frac{x-y}{x+y}$
28. $z = \sin \frac{xy}{x+y}$
29. $z = \cos \frac{xy}{x-y}$
30. $z = 5x^3+4y^3+5x^2y-7xy^2-2xy$

2. Исследовать на экстремум функции двух переменных

1. $(2x+1)^2+y^2$
2. x^2+xy+y^2-2x-y
3. $e^{x+y}(x^2+xy)$
4. $2x^2-2xy+y^2-x+1$
5. $3x^2+2xy+x-y$
6. $3x^2y-2xy^2-x$
7. $-2x^2-xy-2x+3y$
8. $-x^2+xy-y^2+x-2y$
9. $(1-2x)^2-y^2+y-2x$
10. $2x^2-3xy-y^2+5x-4y$
11. $(x+2)^2+(2y-1)^2-x$
12. $3x^2-3xy+6y^2-x$
13. $4x^2+2xy-4y^2+16x-16y$
14. $-2x^2+8xy+8y^2+8x+16y$
15. $-x^2-xy+8y^2+6x-9y$
16. $e^{x-y}(x^2-y^2)$
17. $3x^2-2xy+y^2+x-y$
18. x^2+y^2-2x+y
19. $-x^2+xy-y^2+y+2$
20. $x^3y^2(a-x-y)$
21. $x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$
22. $4x^2-2y^2+3xy+2x-y$
23. $-2x^2+3xy-y^2-y+2$
24. $xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$ $(x>0, y>0)$
25. $x^2-(3y+2)^2-x-y$
26. $(3x-1)^2-y^2+2x+y$
27. $-x^2+4xy-2y^2+y$
28. $-3x^2-6xy-12y^2-6x+6y$
29. $5x^2-10xy+5y^2+10x-16y$
30. $-6x^2+12xy-6y^2-6x+6y$

3. Определить наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в указанных областях

1. $z=1+x+2y$; $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1$
2. $z=1-x+3y$; $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1$
3. $z=2+2x-y$; $0\le x\le 2$; $-1\le y\le 2$
4. $z=3-x+y$; $-1\le x\le 2$; $0\le y\le 2$
5. $z=\frac{1}{2}+2x-3y$; $x\ge 0,\ y\le 0,\ x-y\le 1$
6. $z=1-x+2y$; $0\le x\le 3,\ -2\le y\le 2$
7. $z=5+3x-2y$; $x\le 0,\ y\ge 0,\ -x+y\le 1$
8. $z=-2+2x-3y$; $x\le 0,\ y\le 0,\ -x-y\le 2$
9. $z=-1+x-2y$; $x\ge 0,\ y\le 0,\ x-y\le 2$
10. $z=xy$; $0\le x\le 1$; $0\le y\le 1$
11. $z=2-xy$; $x\le 0,\ y\ge 0,\ -x+y\le 3$
12. $z=5-x-y$; $-1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$
13. $z=1+xy$; $0\le x,\ y\ge 0,\ x+y\le 3$
14. $z=1-2xy$; $-2\le x\le 2,\ 0\le y\le 2$
15. $z=-3+2x-y$; $x\le 0,\ y\ge 0,\ -x+y\le 1$
16. $z=2-x+3y$; $x\ge 0,\ y\le 0,\ x-y\le 5$
17. $z=(x-1)^2+y$; $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 2$
18. $z=x-(y+2)^2$; $0\le x\le 1$; $0\le y\le 3$
19. $z=2x+3y-1$; $x\ge 0,\ y\le 0,\ x-y\le 2$
20. $z=3x-2y+1$; $x\le 0,\ y\le 0,\ -x-y\le 2$
21. $z=4x+2y-5$; $x\le 0,\ y\ge 0,\ -x+y\le 5$
22. $z=x+(2y-3)^2$; $-1\le x\le 3,\ 0\le y\le 1$
23. $z=4x-5y+2$; $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 3$
24. $z=-x-y-6$; $0\le x\le 3,\ -1\le y\le 1$
25. $z=-2x+4y-1$; $0\ge x,\ y\le 0,\ -x-y\le 4$
26. $z=xy+x$; $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$
27. $z=xy+y$; $0\le x\le 1,\ -1\le y\le 0$

28. $z = xy - 2x$; $\quad -1 \le x \le 0, \quad 0 \le y \le 1$

29. $z = 2xy - y$; $\quad -3 \le x \le 0, \quad -1 \le y \le 3$

30. $z = 2xy + x + y$; $\quad x \le 0, \quad y \ge 0, \quad -x + y \le 10$

4. Определить условные экстремумы функции двух переменных

I. $z = xy$ при условии $x + y = 2$
2. $z = x + 3y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$
3. $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 1$
4. $z = 2x - y + 1$ при условии $x^2 - y = 1$
5. $z = x^2 - y^2$ при условии $-x + y = 2$
6. $z = -x^2 + y^2$ при условии $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
7. $z = x^2 - y^2 + 2y$ при условии $-x + y = 2$
8. $z = -x^2 + y^2 + 3x$ при условии $x - 2y = 1$
9. $z = x - 3y + 2$ при условии $x^2 + y^2 = 3$
I0. $z = xy + x + y$ при условии $x + y = 1$
II. $z = xy - x + 2y$ при условии $x - y = 2$
I2. $z = x^2 - y^2 + 2x - y$ при условии $-x + y = 1$
I3. $z = x^2 + y^2 - x + y$ при условии $2x + y = 2$
I4. $z = 2x^2 - y^2 + x$ при условии $2x - 2y = 1$
I5. $z = 2x - 2y + 3$ при условии $x^2 + 2y^2 = 1$
I6. $z = 3x + 2y + 1$ при условии $x^2 - y^2 = 2$
I7. $z = -x + 3y + 2$ при условии $2x^2 + 3y^2 = 1$
I8. $z = 2xy + 3x - y$ при условии $2x - 3y = 2$
I9. $z = xy - 3x + 2y + 1$ при условии $-x + 2y = 2$
20. $z = -2xy + 2x - 3y - 1$ при условии $2x - 3y = 3$
2I. $z = 3x^2 + 2y^2 - x - y$ при условии $x + y = 3$
22. $z = -4x^2 + 4y^2 + 2y$ при условии $x - y = 2$
23. $z = 4x^2 - 4y^2 - 2x$ при условии $-x - 2y = 2$
24. $z = 5x - 3y + 2$ при условии $x^2 + y^2 = 1$
25. $z = -2x + 4y + 1$ при условии $x^2 + y^2 = 2$

26. $z = x + 4y + 8$ при условии $2x^2 + 3y^2 = [illegible]$
27. $z = 1 - 2x - 3y - xy$ при условии $x + 2y = 1$
28. $z = 2 + y + 3xy$ при условии $2x - 3y = [illegible]$
29. $z = -1 - x - 2y + 3xy$ при условии $-x + 6y = [illegible]$
30. $z = x^2 - xy + y^2$ при условии $x + y = 1$

5. Найти производные сложных функций

I. $z = x^2 + xy + y^2$, $\quad x = t^2, \ y = t$
2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad x = \sin t, \ y = \cos t$
3. $z = \frac{y}{x}$, $\quad x = e^t, \ y = 1 - e^{2t}$
4. $z = xe^y$, $\quad y = x^2$
5. $z = x^3 - 3yx$, $\quad y = e^x$
6. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$, $\quad y = \cos x$
7. $z = \frac{x^2}{y}$, $\quad x = u - 2v, \ y = v + 2u$
8. $z = \frac{x}{y^2}$, $\quad x = u + 2v, \ y = v - 2u$
9. $z = 2y + x\,l$, $\quad x = 2u - v, \ y = 3v + u$
I0. $z = 3x^3 - 2xy + 3$, $\quad x = 3t - 1, \ y = 2t^2 + t$
II. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ $\quad x = t; \ y = t^2$
I2. $z = \arcsin(xy)$ $\quad x = 2t, \ y = 3t - 1$
I3. $z = \frac{x+y}{x-y}$, $\quad y = e^{2x}$
I4. $z = x^2 - 4y^2$, $\quad y = \ln x$
I5. $z = \frac{xy+1}{x}$, $\quad y = 3x^2 + 2x - 1$
I6. $z = \frac{2y+3}{x}$, $\quad y = \frac{1}{x}$
I7. $z = x^2 - y$, $\quad x = 3u - 4v, \ y = 2u^2$
I8. $z = xy$ $\quad x = \frac{u}{v}, \ y = u - v$
I9. $z = \sqrt{x + y}$ $\quad x = u^2 + v, \ y = 2u + 3v$
20. $z = \frac{xy}{x - y}$ $\quad x = uv, \ y = u - v$
2I. $z = e^{xy}$ $\quad x = t, \ y = 2t$
22. $z = \arcsin \frac{x}{y}$ $\quad x = t + 1, \ y = t^2$
23. $z = xe^y$ $\quad x = 5t^2 - t, \ y = e^t$

24. $z = \frac{xy}{x-y}$, $x = \cos t,\ y = \sin t$

25. $z = e^{\frac{x}{y^2}}$, $x = 3t+1,\ y = 2t-1$

26. $z = \ln \sin (x-y)$, $y = x^3$

27. $z = \frac{x}{3y-2x}$, $y = 6x+3$

28. $z = x \ln y$, $y = x$

29. $z = y \ln x$, $y = x^2$

30. $z = x^y$, $x = u+v,\ y = u-v$

6. Найти производные z'_x, z'_y (либо y'_x) неявно заданных функций

I. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$

2. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$

3. $z^2 = xy$

4. $x^2 - 4y^2 = 4$

5. $xy + \ln y + \ln x = 0$

6. $y + x = e^{y/x}$

7. $2\cos(x-2y) = 2y - x$

8. $x^2 + y^2 + z^2 - 2zx = a^2$

9. $\cos(ax + by - cz) = ax + by - cz$

I0. $xyz = a^3$

II. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

I2. $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$

I3. $\operatorname{tg} xy = y$

I4. $\operatorname{arctg} y = x + y$

I5. $\ln(x+y) = xy$

I6. $\arcsin(x+y) = 2x - y$

I7. $3x^3 - 6xy^2 + 5x^2y - 6y = 0$

I8. $z^5 = x + y + z$

I9. $y^2 = \ln(x+y)$

20. $\arccos(x+z) = z^2 + x - y$

2I. $x^4 - 2xz^2 + 3y^2 - 4xz = 0$

22. $z + xy = z^2 - x + y$

23. $z^2 - 3z + y - x = 0$

24. $\operatorname{ctg} \frac{x}{y} = \sin x$

25. $3x^2 - 6xy + y^2 - z^2 - z = 0$

26. $\frac{x+y}{x} = y^2$

27. $\frac{x+y}{x-y} = y - 1$

28. $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$

29. $x^3 - 7x^2y + y^2 - 2y = 0$

30. $5x^2 + 6y^2 - 3x + y = 0$

О Г Л А В Л Е Н И Е