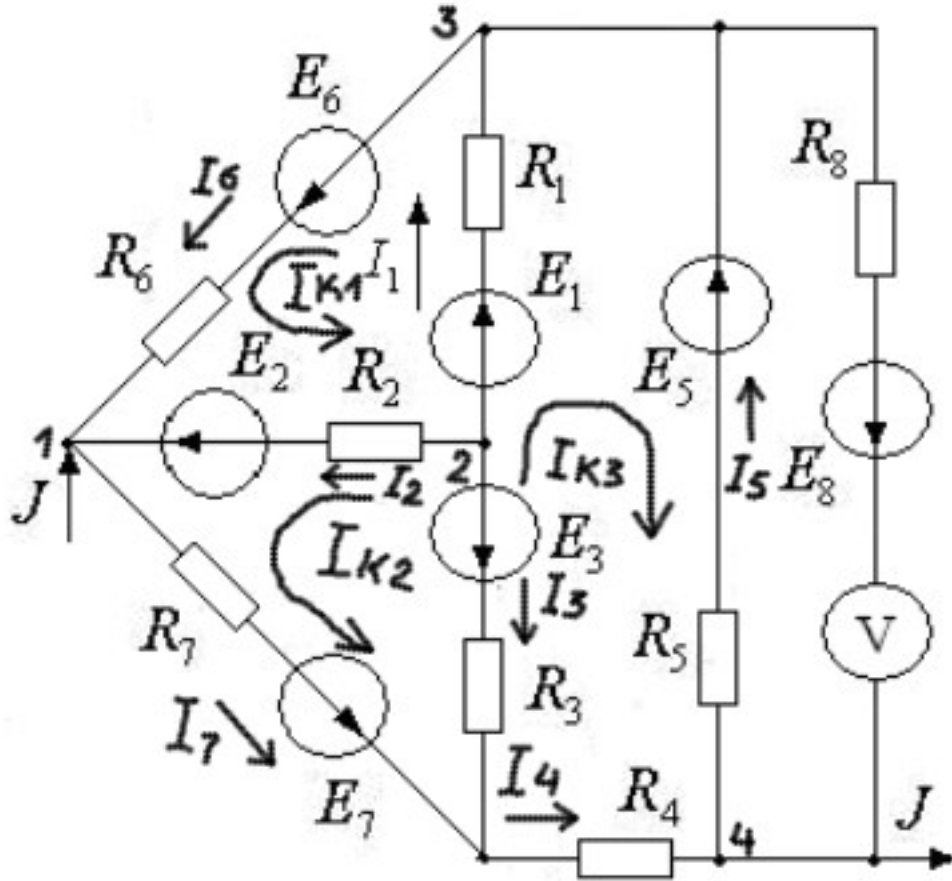


Электрическая схема цепи постоянного тока:



1. Система уравнений цепи на основании законов Кирхгофа имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 - E_2 + E_6 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_6 I_6 \\ E_2 - E_3 + E_7 = R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_7 I_7 \\ E_1 - E_3 - E_5 = R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_5 I_5 \\ J = -I_2 - I_6 + I_7 \\ 0 = I_1 + I_2 + I_3 \\ 0 = -I_1 - I_5 + I_6 \\ -J = -I_4 + I_5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -R_1 I_1 - E_2 + E_6 = -E_1 - R_2 I_2 + R_6 I_6 \\ E_2 - E_3 + E_7 = R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_7 I_7 \\ -R_1 I_1 - E_3 - E_5 = -E_1 - R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_5 I_5 \\ J = -I_2 - I_6 + I_7 \\ -I_1 = I_2 + I_3 \\ I_1 = -I_5 + I_6 \\ -J = -I_4 + I_5 \end{array} \right. \quad (1)$$

2. Система уравнений цепи согласно методу контурных токов:

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_1 + R_2 + R_6) \cdot I_{\kappa 1} - R_2 I_{\kappa 2} + R_1 I_{\kappa 3} = E_1 - E_2 + E_6 \\ -R_2 I_{\kappa 1} + (R_2 + R_3 + R_7) \cdot I_{\kappa 2} + R_3 I_{\kappa 3} = E_2 - E_3 + E_7 - R_7 \cdot J \\ R_1 I_{\kappa 1} + R_3 I_{\kappa 2} + (R_1 + R_3 + R_4 + R_5) \cdot I_{\kappa 3} = E_1 - E_3 - E_5 + R_4 \cdot J \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (R_1 + R_2 + R_6) \cdot I_{\kappa 1} - R_2 I_{\kappa 2} + R_1 I_{\kappa 3} - E_1 = -E_2 + E_6 \\ -R_2 I_{\kappa 1} + (R_2 + R_3 + R_7) \cdot I_{\kappa 2} + R_3 I_{\kappa 3} = E_2 - E_3 + E_7 - R_7 \cdot J \\ R_1 I_{\kappa 1} + R_3 I_{\kappa 2} + (R_1 + R_3 + R_4 + R_5) \cdot I_{\kappa 3} - E_1 = -E_3 - E_5 + R_4 \cdot J \\ I_{\kappa 1} + I_{\kappa 3} = I_1 \end{array} \right.$$

Подставив в систему уравнений, значения известных параметров и электрических величин, получаем:

$$\begin{cases} 16 \cdot I_{\kappa 1} - 4 I_{\kappa 2} + 5 I_{\kappa 3} - E_1 = 0 \\ -4 I_{\kappa 1} + 12 \cdot I_{\kappa 2} + 6 I_{\kappa 3} = 10 \\ 5 I_{\kappa 1} + 6 I_{\kappa 2} + 24 \cdot I_{\kappa 3} - E_1 = -90 \\ I_{\kappa 1} + I_{\kappa 3} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{\kappa 1} = 5,215 \text{ A} \\ I_{\kappa 2} = 3,846 \text{ A} \\ I_{\kappa 3} = -3,215 \text{ A} \\ E_1 = 51,98 \text{ B} \end{cases} \quad (2)$$

По известным контурным токам находим токи ветвей:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2,0 \text{ A}; \\ I_2 &= I_{\kappa 2} - I_{\kappa 1} = -1,369 \text{ A}; \\ I_3 &= -I_{\kappa 2} - I_{\kappa 3} = -0,631 \text{ A}; \\ I_4 &= J - I_{\kappa 3} = 5,215 \text{ A}; \\ I_5 &= -I_{\kappa 3} = 3,215 \text{ A}; \\ I_6 &= I_{\kappa 1} = 5,215 \text{ A}; \\ I_7 &= J + I_{\kappa 2} = 5,846 \text{ A}. \end{aligned}$$

3. Определим потенциалы узлов исходной цепи по известным значениям токов ветвей, приняв потенциал узла 5 равным θ :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= R_7 I_7 - E_7 = 2 \cdot 5,846 - 20 = -8,3077 \text{ B}; \\ \varphi_2 &= -E_3 + R_3 I_3 = -40 - 6 \cdot 0,631 = -43,78 \text{ B}; \\ \varphi_3 &= \varphi_1 - E_6 + R_6 I_6 = -8,3077 - 30 + 7 \cdot 5,215 = -1,803 \text{ B}; \\ \varphi_4 &= -R_4 \cdot I_4 = -26,077 \text{ B}. \end{aligned}$$

4. Система уравнений цепи согласно методу узловых потенциалов, при потенциале узла 5 равном θ , примет вид:

$$\begin{cases} G_{11} \cdot \varphi_1 + G_{12} \cdot \varphi_2 + G_{13} \cdot \varphi_3 + G_{14} \cdot \varphi_4 = J + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_6}{R_6} - \frac{E_7}{R_7} \\ G_{21} \cdot \varphi_1 + G_{22} \cdot \varphi_2 + G_{23} \cdot \varphi_3 + G_{24} \cdot \varphi_4 = \frac{-E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3} - I_1 \\ G_{31} \cdot \varphi_1 + G_{32} \cdot \varphi_2 + G_{33} \cdot \varphi_3 + G_{34} \cdot \varphi_4 = I_1 + \frac{E_5}{R_5} - \frac{E_6}{R_6} \\ G_{41} \cdot \varphi_1 + G_{42} \cdot \varphi_2 + G_{43} \cdot \varphi_3 + G_{44} \cdot \varphi_4 = \frac{-E_5}{R_5} - J \end{cases} \quad (3)$$

где:

$$G_{11} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} = 0,893 \text{ См}$$

$$G_{12} = \frac{-1}{R_2} = -0,25 \text{ См}$$

$$G_{13} = \frac{-1}{R_6} = -0,143 \text{ См}$$

$$G_{14} = 0$$

$$G_{21} = G_{12} = -0,25 \text{ См}$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = 0,4167 \text{ См}$$

$$G_{23} = 0$$

$$G_{24} = 0$$

$$G_{31} = G_{13} = -0,143 \text{ См}$$

$$G_{32} = G_{23} = 0$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} = 0,268 \text{ См}$$

$$G_{34} = \frac{-1}{R_5} = -0,125 \text{ См}$$

$$G_{41} = G_{14} = 0$$

$$G_{42} = G_{24} = 0$$

$$G_{43} = G_{34} = -0,125 \text{ См}$$

$$G_{44} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = 0,325 \text{ См}$$

Таким образом, подставив числовые значения в систему уравнений (3), получим:

$$\begin{cases} 0,893 \cdot \varphi_1 - 0,25 \cdot \varphi_2 - 0,143 \cdot \varphi_3 = 3,786 \\ -0,25 \cdot \varphi_1 + 0,4167 \cdot \varphi_2 = -16,167 \\ -0,143 \cdot \varphi_1 + 0,268 \cdot \varphi_3 - 0,125 \cdot \varphi_4 = 3,964 \\ -0,125 \cdot \varphi_3 + 0,325 \cdot \varphi_4 = -8,25 \end{cases}$$

Для проверки адекватности системы подставим в нее найденные в п. 3 значения потенциалов узлов:

$$\begin{cases} 0,893 \cdot (-8,3077) - 0,25 \cdot (-43,78) - 0,143 \cdot (-1,803) = 3,784 \\ -0,25 \cdot (-8,3077) + 0,4167 \cdot (-43,78) = -16,166 \\ -0,143 \cdot (-8,3077) + 0,268 \cdot (-1,803) - 0,125 \cdot (-26,077) = 3,964 \\ -0,125 \cdot (-1,803) + 0,325 \cdot (-26,077) = -8,25 \end{cases}$$

5. Расчитаем суммарные мощности источников и нагрузок и проверим их баланс. Суммарная мощность источников ЭДС будет равна:

$$\begin{aligned} & E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 + E_5 \cdot I_5 + E_6 \cdot I_6 + E_7 \cdot I_7 + J \cdot (R_7 \cdot I_7 - E_7 + R_4 \cdot I_4) = \\ & = 51,98 \cdot 2 + 30 \cdot (-1,369) + 40 \cdot (-0,631) + 50 \cdot 3,215 + 30 \cdot 5,215 + 20 \cdot 5,846 + 2 \cdot (2 \cdot 5,846 - 20 + 5 \cdot 5,215) = \\ & = 507,304 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

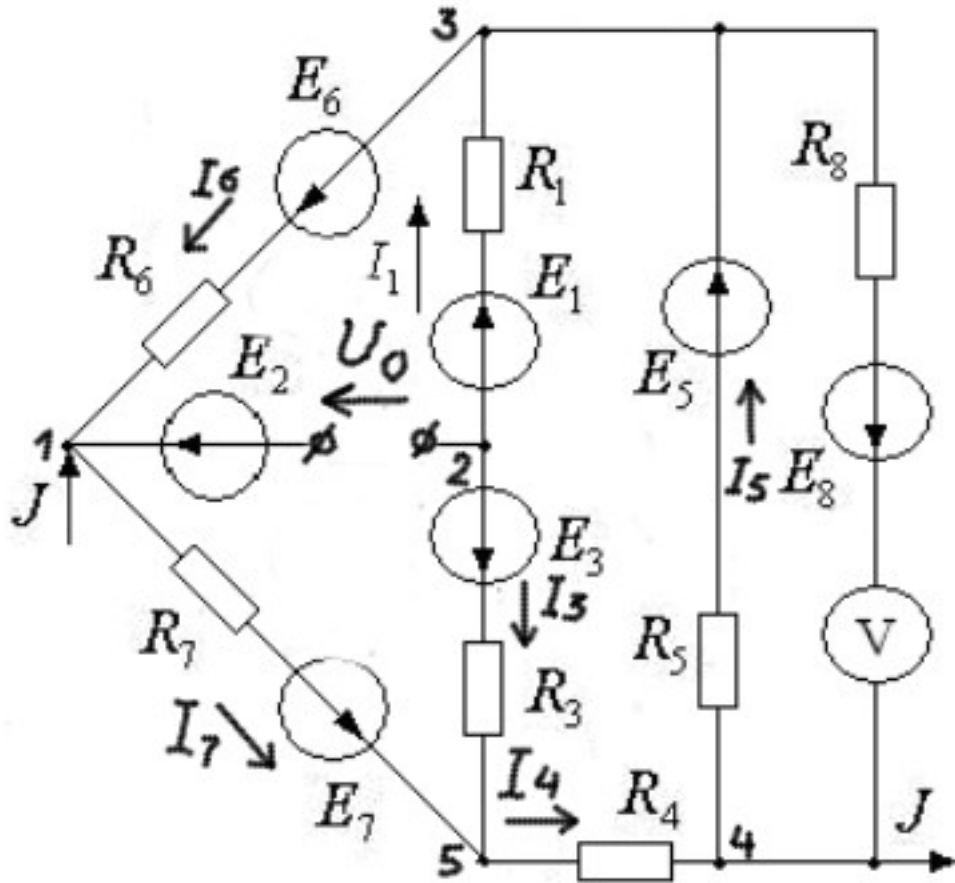
Суммарная мощность всех приемников:

$$R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 + R_5 \cdot I_5^2 + R_6 \cdot I_6^2 + R_7 \cdot I_7^2 =$$

$$= 5 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1,369^2 + 6 \cdot 0,631^2 + 5 \cdot 5,215^2 + 8 \cdot 3,215^2 + 7 \cdot 5,215^2 + 2 \cdot 5,846^2 = 507,28 \text{ Вт.}$$

С точностью до целых значения суммарных мощностей источников и приемников совпадают. Баланс мощностей источников и приемников соблюдается.

6. Определим ток во второй ветви методом эквивалентного генератора. При этом определяется напряжение холостого хода на зажимах сопротивления R2 при его отключении от цепи, а также эквивалентное сопротивление цепи относительно зажимов R2 при закороченных источниках ЭДС и отключенном источнике тока.



Расчет цепи с отключенным R2 удобно провести с использованием системы уравнений по методу узловых потенциалов, в которой обнуляется проводимость $1/R_2$ (при $E_1 = 51,98 \text{ В}$):

$$\begin{cases} G_{11} \cdot \varphi_1 + G_{12} \cdot \varphi_2 + G_{13} \cdot \varphi_3 + G_{14} \cdot \varphi_4 = J + \frac{E_6}{R_6} - \frac{E_7}{R_7} \\ G_{21} \cdot \varphi_1 + G_{22} \cdot \varphi_2 + G_{23} \cdot \varphi_3 + G_{24} \cdot \varphi_4 = \frac{-E_1}{R_1} - \frac{E_3}{R_3} \\ G_{31} \cdot \varphi_1 + G_{32} \cdot \varphi_2 + G_{33} \cdot \varphi_3 + G_{34} \cdot \varphi_4 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_5}{R_5} - \frac{E_6}{R_6} \\ G_{41} \cdot \varphi_1 + G_{42} \cdot \varphi_2 + G_{43} \cdot \varphi_3 + G_{44} \cdot \varphi_4 = \frac{-E_5}{R_5} - J \end{cases}$$

$$G_{11} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} = 0,643 \text{ См}$$

$$G_{12} = 0$$

$$G_{13} = \frac{-1}{R_6} = -0,143 \text{ См}$$

$$G_{14} = 0$$

$$G_{21} = G_{12} = 0$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = 0,3667 \text{ См}$$

$$G_{23} = \frac{-1}{R_1} = -0,2$$

$$G_{24} = 0$$

$$G_{31} = G_{13} = -0,143 \text{ См}$$

$$G_{32} = G_{23} = -0,2$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} = 0,468 \text{ См}$$

$$G_{34} = \frac{-1}{R_5} = -0,125 \text{ См}$$

$$G_{41} = G_{14} = 0$$

$$G_{42} = G_{24} = 0$$

$$G_{43} = G_{34} = -0,125 \text{ См}$$

$$G_{44} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = 0,325 \text{ См}$$

$$\begin{cases} 0,643 \cdot \varphi_1 - 0,143 \cdot \varphi_3 = -3,714 \\ 0,3667 \cdot \varphi_2 - 0,2 \varphi_3 = -17,063 \\ -0,143 \cdot \varphi_1 - 0,2 \varphi_2 + 0,468 \cdot \varphi_3 - 0,125 \cdot \varphi_4 = 12,361 \\ -0,125 \cdot \varphi_3 + 0,325 \cdot \varphi_4 = -8,25 \end{cases}$$

Решение системы дает следующие значения потенциалов узлов:

$$\varphi_1 = -6,53 \text{ В};$$

$$\varphi_2 = -48,38 \text{ В};$$

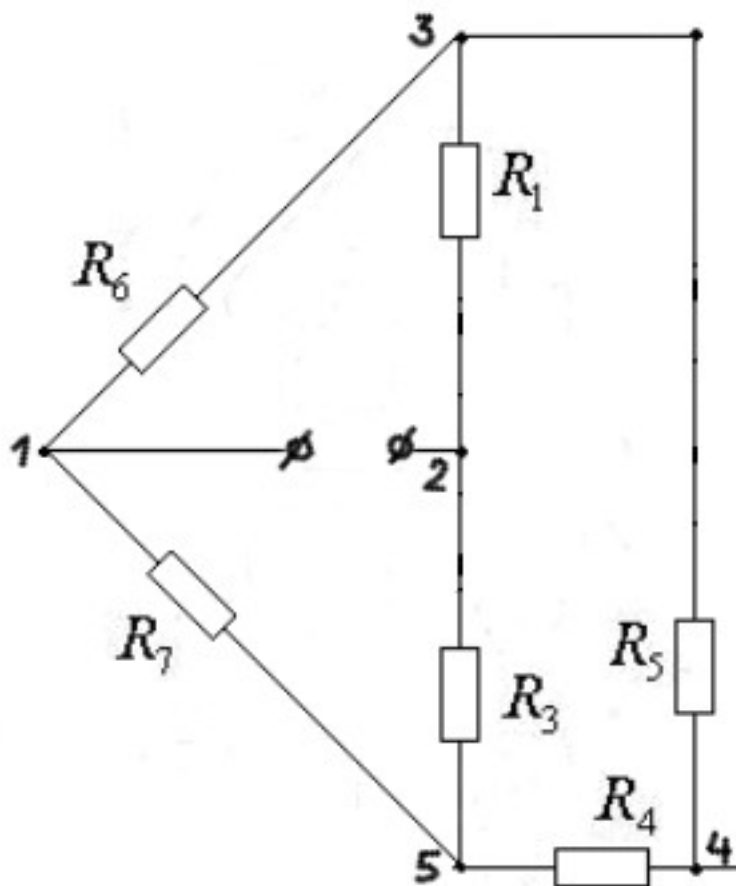
$$\varphi_3 = -3,387 \text{ В};$$

$$\varphi_4 = -26,687 \text{ В}.$$

Искомое напряжение, равное по величине ЭДС эквивалентного генератора, будет равно:

$$U_0 = \varphi_2 - \varphi_1 + E_2 = -48,38 + 6,53 + 30 = -11,854 \text{ В}.$$

Эквивалентное сопротивление цепи относительно зажимов R2 определим анализом цепи без источников:



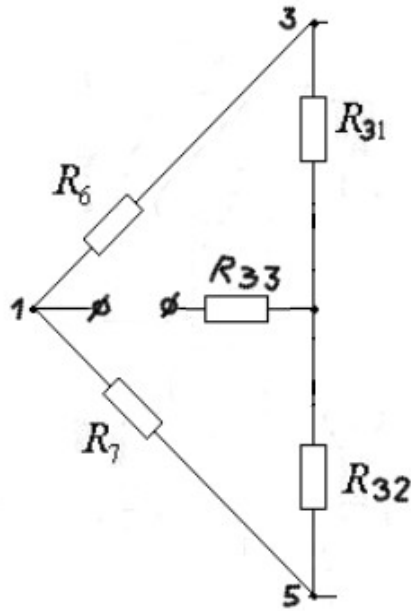
Преобразуем треугольник сопротивлений R_1 , R_3 , R_4+R_5 в эквивалентную звезду:

$$R_{31} = \frac{R_1 \cdot (R_4 + R_5)}{R_1 + R_3 + R_4 + R_5} = 2,7083 \text{ Ом};$$

$$R_{32} = \frac{R_3 \cdot (R_4 + R_5)}{R_1 + R_3 + R_4 + R_5} = 3,25 \text{ Ом};$$

$$R_{33} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3 + R_4 + R_5} = 1,25 \text{ Ом}.$$

В результате схема цепи преобразуется к виду:



Эквивалентное сопротивление находим сверткой элементарных соединений сопротивлений:

$$R_0 = R_{33} + \frac{(R_6 + R_{31}) \cdot (R_7 + R_{32})}{R_6 + R_7 + R_{31} + R_{32}} = -6,53 + \frac{(7 + 2,7083) \cdot (2 + 3,25)}{7 + 2,7083 + 2 + 3,25} = 4,6574 \text{ Ом}$$

Искомый ток второй ветви находится по законам Ома и Кирхгофа для одноконтурной эквивалентной цепи:

$$I_2 = \frac{U_0}{R_0 + R_2} = \frac{-11,854}{4,6574 + 4} = -1,369 \text{ А.}$$

7. Входная проводимость второй ветви:

$$G_{22} = \frac{1}{R_0 + R_2} = \frac{1}{4,6574 + 4} = 0,1155 \text{ См.}$$

Взаимную проводимость 2-й и 3-й ветвей определим отношением тока I_3 к ЭДС E_2 при действии в цепи только источника ЭДС E_2 . При этом удобно воспользоваться системой уравнений цепи по методу контурных токов, исключив из нее все источники, кроме E_2 :

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_6) \cdot I_{\kappa 1} - R_2 I_{\kappa 2} + R_1 I_{\kappa 3} = -E_2 \\ -R_2 I_{\kappa 1} + (R_2 + R_3 + R_7) \cdot I_{\kappa 2} + R_3 I_{\kappa 3} = E_2 \\ R_1 I_{\kappa 1} + R_3 I_{\kappa 2} + (R_1 + R_3 + R_4 + R_5) \cdot I_{\kappa 3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 \cdot I_{\kappa 1} - 4 I_{\kappa 2} + 5 I_{\kappa 3} = -30 \\ -4 I_{\kappa 1} + 12 \cdot I_{\kappa 2} + 6 I_{\kappa 3} = 30 \\ 5 I_{\kappa 1} + 6 I_{\kappa 2} + 24 \cdot I_{\kappa 3} - E_1 = 0 \end{cases}$$

Контурные токи $I_{\kappa 2}$ и $I_{\kappa 3}$:

$$I_{\kappa 2} = 2,249 \text{ А;}$$

$$I_{\kappa 3} = -0,3089 \text{ А.}$$

Ток I_3 :

$$I_3 = I_{\kappa 2} + I_{\kappa 3} = 1,94 \text{ А.}$$

Взаимная проводимость второй и третьей ветвей:

$$G_{23} = \frac{I_3}{E_2} = \frac{1,94}{30} = 0,06467 \text{ См.}$$

9. Дополнительную ЭДС второй ветви для увеличения тока этой ветви в два раза (для найденного значения $E_1 = 51,98 \text{ В}$) определим из отношения:

$$2 \cdot (-I_2) = \frac{E_{\text{доп}} + U_0}{R_2 + R_0} \Rightarrow E_{\text{доп}} = 2 \cdot (-I_2) \cdot (R_2 + R_0) - U_0 = 2 \cdot 1,369 \cdot (4,6574 + 4) + 11,854 = 35,558 \text{ В.}$$

По отношению к E_2 ЭДС $E_{\text{доп}}$ направлена согласно.

Дополнительную ЭДС третьей ветви для увеличения тока во второй ветви в два раза определим из следующих соображений:

$$G_{23} = \frac{-2I_2}{E_3 + E'_{\text{доп}}}$$

откуда:

$$E'_{\text{доп}} = \frac{-2I_2}{G_{23}} - E_3 = \frac{-2 \cdot 1,369}{0,06467} - 40 = -82,338 \text{ В.}$$

Дополнительная ЭДС направлена встречно к E_3 .

10. В общем виде зависимость тока 3-й ветви от тока 2-й линейна и может быть определена из выражений:

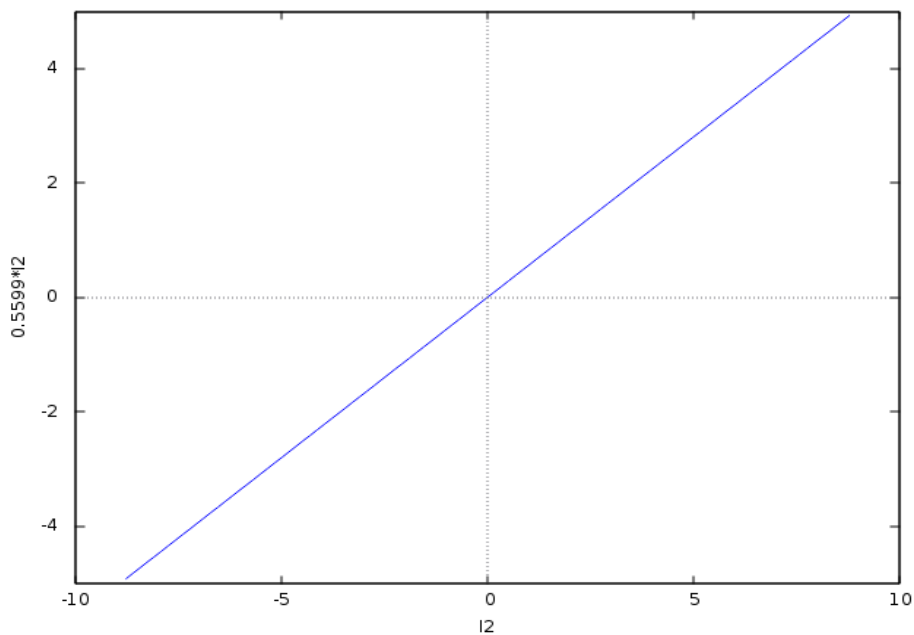
$$I_3 = G_{23} \cdot E_2;$$

$$I_2 = G_{22} \cdot E_2$$

откуда:

$$\frac{I_3}{G_{23}} = \frac{I_2}{G_{22}} \Rightarrow I_3 = \frac{G_{23}}{G_{22}} \cdot I_2 = 0,5599 \cdot I_2$$

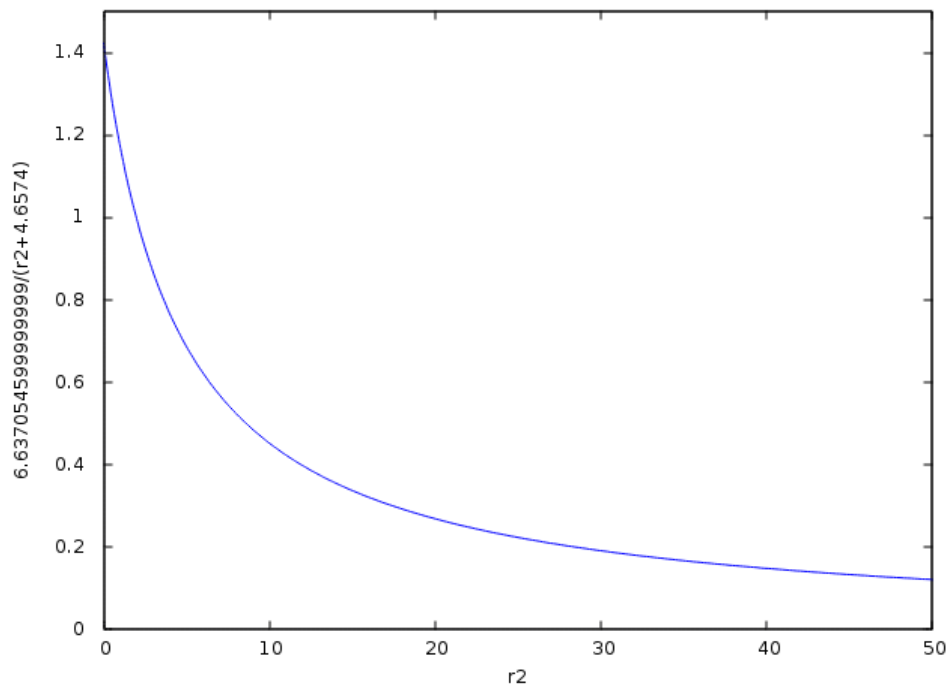
График зависимости $I_3 = 0,5599 I_2$:



Используя функцию $I_3 = 0,5599 I_2$ найдем зависимость тока 3-й ветви от сопротивления R_2 :

$$I_3(r_2) = \frac{G_{23}}{G_{22}} \cdot \frac{U_0}{R_0 + r_2} = \frac{6,637}{4,6574 + r_2}$$

График функции $I_3(r_2)$:



11. Зависимость мощности, выделяемой в сопротивлении R_2 от его величины можно найти с применением уравнения по методу эквивалентного генератора:

$$I_2 = \frac{U_0}{R_0 + R_2};$$

$$P_2 = R_2 \cdot I_2^2 = R_2 \cdot \left(\frac{U_0}{R_0 + R_2} \right)^2;$$

$$P_2(r_2) = r_2 \cdot \left(\frac{-11,854}{4,6574 + r_2} \right)^2$$

График функции $P_2(r_2)$:

