

### 3. ПОСТРОЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ АМПЛИТУДНОЙ И ФАЗОВОЙ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК САУ

#### 3.1. Краткие сведения из теории

Динамические свойства любой линейной САУ можно полностью описать с помощью передаточной функции  $W(s)$  или частотной передаточной функции  $W(i\omega)$ . Модуль частотной передаточной функции  $A(\omega)$  называется амплитудной частотной характеристикой (АЧХ), аргумент частотной передаточной функции называется фазовой частотной характеристикой (ФЧХ).

Для анализа свойств системы АЧХ используется редко ввиду ее значительной нелинейности, поэтому намного чаще проводят расчет и исследование логарифмических частотных характеристик системы. Их особенностью является то, что частота  $\omega$  по оси аргументов откладывается в логарифмическом масштабе. Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) измеряется в децибелах (дБ) и непосредственно с АЧХ связана соотношением:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega). \quad (81)$$

Передаточную функцию любой системы можно представить в виде отношения двух полиномов, каждый из которых по известным значениям его корней может быть разложен на множители. Следовательно, любую сложную САУ можно представить как последовательное соединение типовых звеньев:

$$W(s) = K \cdot s^v \cdot (\tau_1 s + 1) \cdot \dots \cdot (\tau_m s + 1) \cdot \frac{1}{T_1 s + 1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{T_n s + 1}. \quad (82)$$

Известно, что при последовательном соединении логарифмические характеристики складываются. Достоинством ЛАЧХ является ее «значительная линейность», т. е. возможность заменить точную формулу реальной характеристики приближенной кусочно-линейной зависимостью с несущественной погрешностью. В конечном итоге приближенная ЛАЧХ, представленная в виде кусочно-линейной аппроксимации, будет состоять из отрезков прямых линий, расположенных между соседними частотами сопряжения, а также будет содержать резонансные пики на частотах сопряжения звеньев второго порядка. Суммарная логарифмическая ФЧХ системы в свою очередь является нелинейной характеристикой и не может быть заменена линейными отрезками – она строится по точкам.

### 3.2. Пример решения задачи

**Пример 4.** Динамические свойства САУ заданы передаточной функцией в виде последовательного соединения типовых звеньев:

$$W(s) = \frac{K(T_3^2 s^2 + 2\xi T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)^2}, \quad (83)$$

где  $K = 40$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $T_1 = 0,005$  с;  $T_2 = 3$  с;  $T_3 = 0,08$  с;  $T_4 = 40$  с.

Требуется построить логарифмические частотные характеристики (амплитудную и фазовую) рассматриваемой системы. Логарифмическую амплитудную характеристику следует представить в асимптотическом виде с резонансными областями при их наличии.

**Решение.**

Используя значения постоянных времени реальных типовых звеньев, входящих в сложную САУ, определим по формуле (38) из работы [3] все частоты сопряжения:  $\omega_{c1} = 200$  с<sup>-1</sup>;  $\omega_{c2} = 0,3(3)$  с<sup>-1</sup>;  $\omega_{c3} = 12,5$  с<sup>-1</sup>;  $\omega_{c4} = 0,025$  с<sup>-1</sup> – и расположим передаточные функции реальных типовых звеньев в формуле (83) в порядке возрастания их собственных частот сопряжения ( $\omega_{c4} < \omega_{c2} < \omega_{c3} < \omega_{c1}$ ):

$$W(s) = K \cdot \frac{1}{s} \cdot (T_4 s + 1) \cdot \left[ \frac{1}{T_2 s + 1} \cdot \frac{1}{T_2 s + 1} \right] \cdot (T_3^2 s^2 + 2\xi T_3 s + 1) \cdot \frac{1}{T_1 s + 1}. \quad (84)$$

В формулы (83) и (84) входит передаточная функция типового звена в квадрате (с постоянной времени  $T_2$ ) – это означает последовательное соединение двух одинаковых звеньев (куб и более высокая степень по аналогии указывают на большее число подобных звеньев).

Построим асимптотическую ЛАЧХ САУ, пользуясь свойством последовательного соединения типовых звеньев, утверждающим, что в данном случае ЛАЧХ звеньев (см. в табл. 7 работы [3]) складываются:

$$L(\omega) = L_K(\omega) + L_0(\omega) + L_4(\omega) + [L_2(\omega) + L_2(\omega)] + L_3(\omega) + L_1(\omega), \quad (85)$$

где  $L_K(\omega) = 20 \lg K$  – ЛАЧХ пропорционального звена;

$L_0(\omega) = -20 \lg \omega$  – ЛАЧХ идеального интегрирующего звена;

$L_1(\omega) = -20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}$  – ЛАЧХ апериодического звена с постоянной времени  $T_1$ ;

$L_2(\omega) = -20 \lg \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}$  – ЛАЧХ аperiodического звена с постоянной времени  $T_2$  (их два);

$L_3(\omega) = +20 \lg \sqrt{(1 - T_3^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T_3^2 \omega^2}$  – ЛАЧХ форсирующего звена 2-го порядка;

$L_4(\omega) = +20 \lg \sqrt{T_4^2 \omega^2 + 1}$  – ЛАЧХ форсирующего звена.

В пояснениях к формуле (85) приведены точные формулы ЛАЧХ динамических звеньев. Нас же интересуют приближенные характеристики – асимптотические, которые актуальны только для реальных звеньев (с постоянной времени) и имеют вид кусочно-линейных функций:

для аperiodических звеньев ( $i = 1, 2$ ) –

$$L_i(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_{ci}; \\ -20 \lg T_i \omega, & \omega \geq \omega_{ci} \end{cases} \text{ или } L_i(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_{ci}; \\ -20 \lg T_i - 20 \lg \omega, & \omega \geq \omega_{ci}; \end{cases} \quad (86)$$

для форсирующего звена –

$$L_4(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_{c4}; \\ +20 \lg T_4 \omega, & \omega \geq \omega_{c4} \end{cases} \text{ или } L_4(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_{c4}; \\ +20 \lg T_4 + 20 \lg \omega, & \omega \geq \omega_{c4}; \end{cases} \quad (87)$$

для форсирующего звена 2-го порядка дополнительно на частоте сопряжения необходимо вычесть поправочную характеристику  $L_n(\omega)$ , поскольку на этой частоте погрешность асимптотической характеристики может в зависимости от коэффициента затухания  $\xi$  значительно превышать допустимую погрешность в 6 дБ для звена 2-го порядка:

$$L_3(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_{c3}; \\ +40 \lg T_3 + 40 \lg \omega, & \omega \geq \omega_{c3}; \end{cases} - L_n(\omega; \xi = 0,05). \quad (88)$$

Подставим полученные выражения для асимптотических ЛАЧХ в исходную формулу (85):

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega + \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_{c4} \\ +20 \lg T_4 + 20 \lg \omega, & \omega \geq \omega_{c4} \end{cases} + 2 \cdot \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_{c2} \\ -20 \lg T_2 - 20 \lg \omega, & \omega \geq \omega_{c2} \end{cases} + \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_{c3} \\ +40 \lg T_3 + 40 \lg \omega, & \omega \geq \omega_{c3} \end{cases} - L_n(\omega; 0,05) + \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_{c1} \\ -20 \lg T_1 - 20 \lg \omega, & \omega \geq \omega_{c1} \end{cases}. \quad (89)$$

Таким образом, ЛАЧХ САУ представляет собой сумму кусочно-линейных функций. С учетом коммутативного и ассоциативного законов сложения поправочную характеристику  $L_{\pi}(\omega; 0,05)$  вычтем из общей суммы в последнюю очередь (это вычитание имеет значение только в окрестности частоты сопряжения форсирующего звена 2-го порядка):

$$L(\omega) = \left[ 20\lg K - 20\lg \omega + \begin{cases} 0, \omega \leq \omega_{c4} \\ +20\lg T_4 + 20\lg \omega, \omega \geq \omega_{c4} \end{cases} + 2 \cdot \begin{cases} 0, \omega \leq \omega_{c2} \\ -20\lg T_2 - 20\lg \omega, \omega \geq \omega_{c2} \end{cases} + \begin{cases} 0, \omega \leq \omega_{c3} \\ +40\lg T_3 + 40\lg \omega, \omega \geq \omega_{c3} \end{cases} + \begin{cases} 0, \omega \leq \omega_{c1} \\ -20\lg T_1 - 20\lg \omega, \omega \geq \omega_{c1} \end{cases} \right] - L_{\pi}(\omega; 0,05). \quad (90)$$

Известно, что кусочно-линейные функции можно сложить на каждом интервале аргумента (в нашем случае – частоты  $\omega$ ), где выражение для всех (!) суммируемых функций остается постоянным. Границами таких интервалов являются частоты сопряжения. В задаче определены четыре частоты сопряжения, следовательно, рассматриваемых интервалов будет пять. Отметим еще раз, что ЛАЧХ идеальных звеньев постоянны на всех отдельно рассматриваемых интервалах. Значение каждой ЛАЧХ на конкретном интервале зависит от условия, указанного после формулы в каждой строке фигурной скобки. Выполним сложение асимптотических ЛАЧХ типовых звеньев на всех частотных диапазонах (поправочную характеристику пока не рассматриваем):

$$1) 0 \leq \omega \leq \omega_{c4} : L^{(1)}(\omega) = 20\lg K - 20\lg \omega + 0 + 0 + 0 + 0 = 20\lg K - 20\lg \omega; \quad (91)$$

По свойству логарифма преобразуем  $L^{(1)}(\omega)$  следующим образом:

$$L^{(1)}(\omega) = 20\lg \frac{K}{\omega}. \quad (92)$$

$$2) \omega_{c4} \leq \omega \leq \omega_{c2} : L^{(2)}(\omega) = (20\lg K - 20\lg \omega) + (20\lg T_4 + 20\lg \omega) + 0 + 0 + 0 = L^{(1)}(\omega) + (20\lg T_4 + 20\lg \omega) = 20\lg K + 20\lg T_4; \quad (93)$$

$$L^{(2)}(\omega) = 20\lg K T_4. \quad (94)$$

$$3) \omega_{c2} \leq \omega \leq \omega_{c3} : L^{(3)}(\omega) = (20\lg K - 20\lg \omega) + (20\lg T_4 + 20\lg \omega) + (-40\lg T_2 - 40\lg \omega) + 0 + 0 = L^{(2)}(\omega) - 40\lg T_2 - 40\lg \omega = 20\lg K + 20\lg T_4 - 40\lg T_2 - 40\lg \omega = 20\lg \frac{K T_4}{T_2^2} - 40\lg \omega; \quad (95)$$

$$L^{(3)}(\omega) = 20\lg \frac{KT_4}{T_2^2} - 2 \cdot 20\lg \omega = 20\lg \frac{KT_4}{T_2^2} - 20\lg \omega^2 = 20\lg \frac{KT_4}{T_2^2 \omega^2}; \quad (96)$$

$$\begin{aligned} 4) \omega_{c3} \leq \omega \leq \omega_{c1}: \quad L^{(4)}(\omega) &= (20\lg K - 20\lg \omega) + (20\lg T_4 + 20\lg \omega) + \\ &+ (-40\lg T_2 - 40\lg \omega) + (40\lg T_3 + 40\lg \omega) + 0 = \\ &= L^{(3)}(\omega) + 40\lg T_3 + 40\lg \omega = 20\lg \frac{KT_4}{T_2^2} - 40\lg \omega + \\ &+ 40\lg T_3 + 40\lg \omega = 20\lg \frac{KT_4}{T_2^2} + 40\lg T_3; \end{aligned} \quad (97)$$

$$L^{(4)}(\omega) = 20\lg \frac{KT_4}{T_2^2} + 2 \cdot 20\lg T_3 = 20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2}; \quad (98)$$

$$\begin{aligned} 5) \omega_{c1} \leq \omega < \infty: \quad L^{(5)}(\omega) &= (20\lg K - 20\lg \omega) + (20\lg T_4 + 20\lg \omega) + \\ &+ (-40\lg T_2 - 40\lg \omega) + (40\lg T_3 + 40\lg \omega) + (-20\lg T_1 - 20\lg \omega) = \\ &= L^{(4)}(\omega) - 20\lg T_1 - 20\lg \omega = 20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2} - 20\lg T_1 - 20\lg \omega = \\ &= 20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2 T_1} - 20\lg \omega; \end{aligned} \quad (99)$$

$$L^{(5)}(\omega) = 20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2 T_1} - 20\lg \omega = 20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2 T_1 \omega}. \quad (100)$$

Выражения (91) – (100) представляют собой отрезки прямых линий при условии, что частота задается в логарифмическом масштабе. Для наглядности алгоритм и результаты проведенных расчетов можно занести в табл. 1. Вычислим на всех частотах сопряжения значения асимптотических характеристик для каждого звена и суммарную, а затем полученные значения отметим в табл. 2:

идеальное интегрирующее звено –

$$L_K(\omega_{c1}) = L_K(\omega_{c2}) = L_K(\omega_{c3}) = L_K(\omega_{c4}) = 20\lg K;$$

$$L_K(\omega_{c1}) = L_K(\omega_{c2}) = L_K(\omega_{c3}) = L_K(\omega_{c4}) = 20\lg 40 \approx 32 \text{ дБ};$$

идеальное интегрирующее звено –

$$L_0(\omega_{c1}) = -20\lg \omega_{c1} = -20\lg \frac{1}{T_1} = 20\lg T_1; \quad L_0(\omega_{c1}) = 20\lg 0,005 \approx -46 \text{ дБ};$$

$$L_0(\omega_{c2}) = 20\lg T_2; \quad L_0(\omega_{c2}) = 20\lg 3 \approx 9,5 \text{ дБ};$$

$$L_0(\omega_{c3}) = 20\lg T_3; \quad L_0(\omega_{c3}) = 20\lg 0,08 \approx -21,9 \text{ дБ};$$

$$L_0(\omega_{c4}) = 20\lg T_4; \quad L_0(\omega_{c4}) = 20\lg 40 \approx 32 \text{ дБ};$$

форсирующее звено –

$$L_4(\omega_{c1}) = 20\lg T_4 + 20\lg \omega_{c1} = 20\lg \frac{T_4}{T_1}; \quad L_4(\omega_{c1}) = 20\lg \frac{40}{0,005} \approx 78,1 \text{ дБ};$$

$$L_4(\omega_{c2}) = 20\lg \frac{T_4}{T_2}; \quad L_4(\omega_{c2}) = 20\lg \frac{40}{3} \approx 22,5 \text{ дБ};$$

$$L_4(\omega_{c3}) = 20\lg \frac{T_4}{T_3}; \quad L_4(\omega_{c3}) = 20\lg \frac{40}{3} \approx 54 \text{ дБ};$$

$$L_4(\omega_{c4}) = 20\lg \frac{T_4}{T_4}; \quad L_4(\omega_{c4}) = 20\lg 1 \approx 0 \text{ дБ};$$

апериодическое звено –

$$L_2(\omega_{c1}) = -40\lg T_2 - 40\lg \omega_{c1} = 20\lg \frac{T_1^2}{T_2^2}; \quad L_2(\omega_{c1}) = 20\lg \frac{(0,005)^2}{3^2} \approx -111,1 \text{ дБ};$$

$$L_2(\omega_{c2}) = 20\lg \frac{T_2^2}{T_2^2}; \quad L_2(\omega_{c2}) = 20\lg 1 \approx 0 \text{ дБ};$$

$$L_2(\omega_{c2}) = 20\lg \frac{T_3^2}{T_2^2}; \quad L_2(\omega_{c2}) = 20\lg \frac{(0,08)^2}{3^2} \approx -63 \text{ дБ};$$

$$L_2(\omega_{c4}) \approx 0 \text{ дБ, так как } \omega_{c4} < \omega_{c2};$$

форсирующее звено 2-го порядка –

$$L_3(\omega_{c1}) = 40\lg T_3 + 40\lg \omega_{c1} = 20\lg \frac{T_3^2}{T_1^2}; \quad L_3(\omega_{c1}) = 20\lg \frac{(0,08)^2}{(0,005)^2} \approx 48,2 \text{ дБ};$$

$$L_3(\omega_{c2}) \approx 0 \text{ дБ, так как } \omega_{c2} < \omega_{c3};$$

$$L_2(\omega_{c3}) = 20\lg \frac{T_3^2}{T_3^2}; \quad L_2(\omega_{c3}) = 20\lg 1 \approx 0 \text{ дБ};$$

$$L_3(\omega_{c4}) \approx 0 \text{ дБ, так как } \omega_{c4} < \omega_{c3};$$

апериодическое звено –

$$L_1(\omega_{c1}) = 20\lg \frac{T_1^2}{T_1^2} = 20\lg 1 \approx 0 \text{ дБ};$$

$$L_1(\omega_{c2}) = L_1(\omega_{c3}) = L_1(\omega_{c4}) \approx 0 \text{ дБ, так как } \omega_{c4} < \omega_{c2} < \omega_{c3} < \omega_{c1}.$$

Таблица 1

Сложение кусочно-линейных характеристик звеньев

Частота, с <sup>-1</sup>	ЛЧХ						
	$L_K(\omega)$	$L_0(\omega)$	$L_4(\omega)$	$L_2(\omega)$	$L_3(\omega)$	$L_1(\omega)$	$L(\omega) = \sum L_i(\omega)$
$0 \leq \omega \leq \omega_{c4}$	$20 \lg K$	$-20 \lg \omega$	0	0	0	0	$20 \lg K - 20 \lg \omega$ или $20 \lg \frac{K}{\omega}$
$\omega_{c4} \leq \omega \leq \omega_{c2}$	$20 \lg K$	$-20 \lg \omega$	$20 \lg T_4 + 20 \lg \omega$	0	0	0	$20 \lg K T_4$
$\omega_{c2} \leq \omega \leq \omega_{c3}$	$20 \lg K$	$-20 \lg \omega$	$20 \lg T_4 + 20 \lg \omega$	$-40 \lg T_2 - 40 \lg \omega$	0	0	$20 \lg \frac{K T_4}{T_2^2} - 40 \lg \omega$ или $20 \lg \frac{K T_4}{T_2^2 \omega^2}$
$\omega_{c3} \leq \omega \leq \omega_{c1}$	$20 \lg K$	$-20 \lg \omega$	$20 \lg T_4 + 20 \lg \omega$	$-40 \lg T_2 - 40 \lg \omega$	$40 \lg T_3 + 40 \lg \omega$	0	$20 \lg \frac{K T_4 T_3^2}{T_2^2}$
$\omega_{c1} \leq \omega \leq \infty$	$20 \lg K$	$-20 \lg \omega$	$20 \lg T_4 + 20 \lg \omega$	$-40 \lg T_2 - 40 \lg \omega$	$40 \lg T_3 + 40 \lg \omega$	$-20 \lg T_1 - 20 \lg \omega$	$20 \lg \frac{K T_4 T_3^2}{T_2^2 T_1} - 20 \lg \omega$ или $20 \lg \frac{K T_4 T_3^2}{T_2^2 T_1 \omega}$

Сложение значений ЛАЧХ на частотах сопряжения

ЛАЧХ	Частота, с <sup>-1</sup>			
	$\omega_{c4}$ 0,025	$\omega_{c2}$ 0,03(3)	$\omega_{c3}$ 12,5	$\omega_{c1}$ 200
$L_K(\omega)$	$20\lg K$	$20\lg K$	$20\lg K$	$20\lg K$
$L_0(\omega)$	$20\lg T_4$	$20\lg T_2$	$20\lg T_3$	$20\lg T_1$
$L_4(\omega)$	0	$20\lg \frac{T_4}{T_2}$	$20\lg \frac{T_4}{T_3}$	$20\lg \frac{T_4}{T_1}$
$L_2(\omega)$	0	0	$20\lg \frac{T_3^2}{T_2^2}$	$20\lg \frac{T_1^2}{T_2^2}$
$L_3(\omega)$	0	0	0	$20\lg \frac{T_3^2}{T_1^2}$
$L_1(\omega)$	0	0	0	0
$L(\omega) = \sum L_i(\omega)$	$20\lg KT_4$	$20\lg KT_4$	$20\lg \frac{KT_4T_3^2}{T_2^2}$	$20\lg \frac{KT_4T_3^2}{T_2^2}$

Вычислим значения по смежным асимптотам на частотах сопряжения. Для предыдущей асимптоты на выбранной частоте сопряжения будет получено значение справа, а для последующей это же значение – слева. При этом крайние асимптоты (НЧА и ВЧА) не имеют одного из значений (слева и справа соответственно):

$$\omega_{c4}: \text{справа } L^{(1)}(\omega_{c4}) = 20\lg \frac{K}{\omega_{c4}} = 20\lg \frac{K}{1/T_4} = 20\lg KT_4 = 20\lg 40 \cdot 40 \approx 64,1 \text{ дБ};$$

$$\text{слева } L^{(2)}(\omega_{c4}) = 20\lg KT_4 \approx 64,1 \text{ дБ};$$

$$\omega_{c2}: \text{справа } L^{(2)}(\omega_{c2}) = 20\lg KT_4 \approx 64,1 \text{ дБ};$$

$$\text{слева } L^{(3)}(\omega_{c2}) = 20\lg \frac{KT_4}{T_2^2 \omega_{c2}^2} = 20\lg \frac{KT_4}{T_2^2 (1/T_2)^2} = 20\lg KT_4 \approx 64,1 \text{ дБ};$$

$$\omega_{c3}: \text{справа } L^{(3)}(\omega_{c3}) = 20\lg \frac{KT_4}{T_2^2 \omega_{c3}^2} = 20\lg \frac{KT_4T_3^2}{T_2^2} = 20\lg \frac{40 \cdot 40 \cdot (0,08)^2}{3^2} \approx 1,1 \text{ дБ};$$

$$\text{слева } L^{(4)}(\omega_{c3}) = 20\lg \frac{KT_4T_3^2}{T_2^2} \approx 1,1 \text{ дБ};$$



$$\omega_{c1}: \text{справа } L^{(4)}(\omega_{c1}) = 20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2} \approx 1,1 \text{ дБ};$$

$$\text{слева } L^{(5)}(\omega_{c1}) = 20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2 T_1 \omega_{c1}} = 20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2 T_1 (1/T_1)} = 20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2} \approx 1,1 \text{ дБ}.$$

Этот же результат для всей характеристики можно получить, сложив значения ЛАЧХ каждого типового звена на любой из частот сопряжения по образцу табл. 2. Например, для частоты  $\omega_{c1}$  получим выражение:

$$L(\omega_{c1}) = L_K(\omega_{c1}) + L_0(\omega_{c1}) + L_1(\omega_{c1}) + L_2(\omega_{c1}) + L_3(\omega_{c1}) + L_4(\omega_{c1});$$

$$L(\omega_{c1}) = 32 - 46 + 0 - 111,1 + 48,2 + 78,1 = 1,2 \text{ дБ};$$

Как видно по вычисленным значениям ЛАЧХ на частотах сопряжения по смежным асимптотам, которые оказались равными, асимптотическая ЛАЧХ всей системы не имеет разрывов.

В общем виде определить выражение для суммарной характеристики на всех частотах сопряжения можно также, представив ее в виде суммы ЛАЧХ типовых звеньев, взятых из табл. 2, не подставляя конкретные числовые значения:

$$\omega_{c4}: L(\omega_{c4}) = 20\lg K + 20\lg T_4 + 0 + 0 + 0 + 0 = 20\lg KT_4;$$

$$\omega_{c2}: L(\omega_{c2}) = 20\lg K + 20\lg T_2 + 20\lg \frac{T_4}{T_2} + 0 + 0 + 0 = 20\lg \frac{KT_2 T_4}{T_2} = 20\lg KT_4;$$

$$\omega_{c3}: L(\omega_{c3}) = 20\lg K + 20\lg T_3 + 20\lg \frac{T_4}{T_3} + 20\lg \frac{T_3^2}{T_2^2} + 0 + 0 = 20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2};$$

$$\omega_{c1}: L(\omega_{c1}) = 20\lg K + 20\lg T_1 + 20\lg \frac{T_4}{T_1} + 20\lg \frac{T_1^2}{T_2^2} + 20\lg \frac{T_3^2}{T_1^2} + 0 = 20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2}.$$

Таблицу, похожую на табл. 1, можно составить и для наклонов асимптот ЛАЧХ (т. е. скорости изменения ЛАЧХ по частоте в логарифмическом масштабе). Для этого необходимо из каждой ячейки табл. 1 выписать только множитель, стоящий перед выражением  $\lg \omega$ , с соответствующим знаком. Табл. 3 по сути является вспомогательной и может быть использована для проверки правильности построения характеристики  $L(\omega)$ . Напомним, что у ЛАЧХ реальных динамических звеньев две асимптоты и наклон этих ЛАЧХ меняется на соответствующей частоте сопряжения.

Таблица 3

Данные о наклонах асимптот ЛАЧХ, дБ/дек

Наклон ЛАЧХ	$0 \leq \omega \leq \omega_{c4}$	$\omega_{c4} \leq \omega \leq \omega_{c2}$	$\omega_{c2} \leq \omega \leq \omega_{c3}$	$\omega_{c3} \leq \omega \leq \omega_{c1}$	$\omega_{c1} \leq \omega < \infty$
$\dot{L}_K(\omega)$	0	0	0	0	0
$\dot{L}_0(\omega)$	-20	-20	-20	-20	-20
$\dot{L}_4(\omega)$	0	+20	+20	+20	+20
$\dot{L}_2(\omega)$	0	0	$2 \cdot (-20) = -40$	$2 \cdot (-20) = -40$	$2 \cdot (-20) = -40$
$\dot{L}_3(\omega)$	0	0	0	+40	+40
$\dot{L}_1(\omega)$	0	0	0	0	-20
$\dot{L}(\omega) = \sum \dot{L}_i(\omega)$	-20	0	-40	0	-20

Так как линию можно построить по двум точкам, необходимо определить еще по одному значению ЛАЧХ для крайних асимптот. Остальные же асимптоты в интервалах от первой до последней частоты сопряжения могут быть построены по значениям, определенным на границах частотных диапазонов (т. е. по частотам сопряжения).

Итак, зададим любую частоту  $\omega < \omega_{c4}$ , например,  $\omega = \omega_A = 0,01 \text{ с}^{-1}$ , тогда НЧА  $L^{(1)}(\omega_A) = 20 \lg \frac{K}{\omega_A} = 20 \lg \frac{40}{0,01} \approx 72 \text{ дБ}$  – отметим это значение как точку А

(рис. 16); теперь зададим частоту  $\omega > \omega_{c1}$  (пусть  $\omega = \omega_F = 1000 \text{ с}^{-1}$ ), тогда ВЧА

$$L^{(5)}(\omega_F) = 20 \lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2 T_1 \omega_F} = 20 \lg \frac{40 \cdot 40 \cdot (0,08)^2}{3^2 \cdot 0,005 \cdot 1000} \approx -12,9 \text{ дБ (точка F)}.$$

Рассчитаем дополнительно значение низкочастотной (самой первой) асимптоты  $L^{(1)}(\omega)$  на частоте  $1 \text{ с}^{-1}$ , которое для любой системы должно равняться величине  $20 \lg K$ . В нашей задаче значение этой величины составляет 32 дБ. Именно через эту точку G всегда должна проходить низкочастотная асимптота или ее продолжение, как показано на рис. 16 пунктиром. Выполненное действие позволяет еще раз проверить правильность построения всего графика.

Занесем основные полученные результаты в табл. 4, которая является наиболее удобной и информативной, так как содержит все данные, необходимые для построения асимптотической ЛАЧХ САУ, и исключает избыточные.

Таким образом, в табл. 4 выбраны основные данные, характеризующие ЛАЧХ на различных частотных диапазонах.

Таблица 4

Данные для построения ЛАЧХ

Диапа- зон	Значение слева		Точ- ка	Наклон харак- терис- тики	Уравнение от- резка прямой (асимптоты)	Обозна- чение асим- птоты	Значение слева		Точ- ка
	формула	дБ					формула	дБ	
$0 \leq \omega \leq \omega_{c4}$	— *	72	A	- 20	$20\lg K - 20\lg \omega$	$L^{(1)}(\omega)$	$20\lg KT_4$	64,1	B
$\omega_{c4} \leq \omega \leq \omega_{c2}$	$20\lg KT_4$	64,1	B	+ 0	$20\lg KT_4$	$L^{(2)}(\omega)$	$20\lg KT_4$	64,1	C
$\omega_{c2} \leq \omega \leq \omega_{c3}$	$20\lg KT_4$	64,1	C	- 40	$20\lg \frac{KT_4}{T_2^2} - 40\lg \omega$	$L^{(3)}(\omega)$	$20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2}$	1,1	D
$\omega_{c3} \leq \omega \leq \omega_{c1}$	$20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2}$	1,1	D	+ 0	$20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2}$	$L^{(4)}(\omega)$	$20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2}$	1,1	E
$\omega_{c1} \leq \omega < \infty$	$20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2}$	1,1	E	- 20	$20\lg \frac{KT_4 T_3^2}{T_2^2 T_1} - 20\lg \omega$	$L^{(5)}(\omega)$	— *	- 12,9	F

\* — для НЧА и ВЧА рассчитаны значения  $L^{(1)}(0,01) \approx 72$  дБ (точка A) и  $L^{(5)}(1000) \approx -12,9$  дБ (точка F) соответственно.

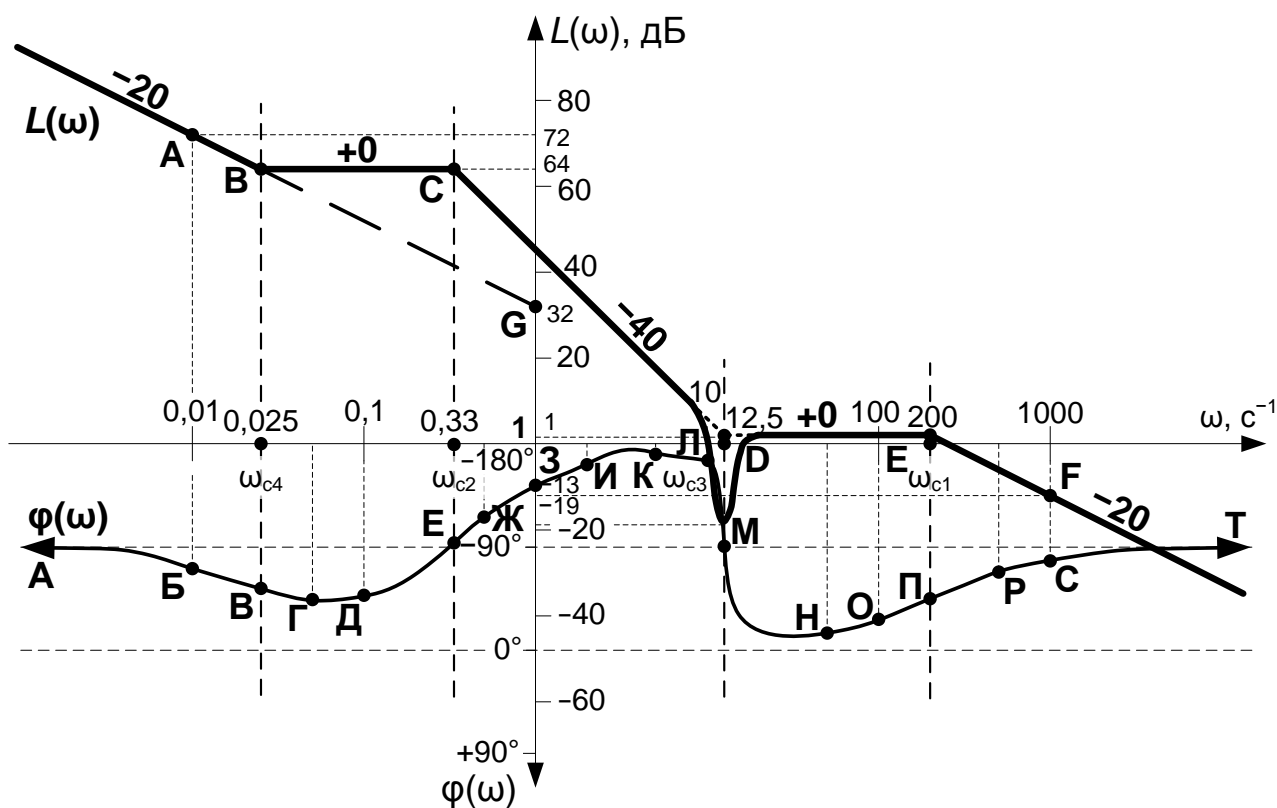


Рис. 16. Графики логарифмических характеристик (ЛАЧХ и ЛФЧХ) для рассматриваемой системы

Далее определим выражение для расчета фазовой характеристики САУ, которая также является суммой ЛФЧХ типовых динамических звеньев, соединенных последовательно. Запишем суммарную ЛФЧХ для каждого типового звена (см. табл. 7 работы [3]):

$$\varphi(\omega) = \varphi_K(\omega) + \varphi_0(\omega) + \varphi_4(\omega) + 2 \cdot \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega) + \varphi_1(\omega), \quad (101)$$

где  $\varphi_K(\omega) = 0$  – ЛФЧХ пропорционального звена;

$\varphi_0(\omega) = -90^\circ$  – ЛФЧХ идеального интегрирующего звена;

$\varphi_1(\omega) = -\arctg T_1 \omega$  – ЛФЧХ апериодического звена с постоянной времени  $T_1$ ;

$\varphi_2(\omega) = -\arctg T_2 \omega$  – ЛФЧХ апериодического звена с постоянной времени  $T_2$  (их два);

$\varphi_3(\omega) = +\arctg \frac{2\xi T_3 \omega}{1 - T_3^2 \omega^2}$  – ЛФЧХ форсирующего звена 2-го порядка;

$\varphi_4(\omega) = +\arctg T_4 \omega$  – ЛФЧХ форсирующего звена.

Тогда результирующая ЛФЧХ всей системы будет иметь вид (исключая нулевые слагаемые и учитывая одинаковые звенья):

$$\varphi(\omega) = \sum \varphi_i(\omega) = -90^\circ + \arctg T_4 \omega - 2\arctg T_2 \omega + \arctg \frac{2\xi T_3 \omega}{1 - T_3^2 \omega^2} - \arctg T_1 \omega. \quad (102)$$

ЛФЧХ в отличие от ЛАЧХ не является линейной характеристикой и не имеет явно выраженных линейных участков, поэтому ее необходимо строить по точкам, задавая значения частоты в качестве аргумента функции и рассчитывая по ним соответствующие значения ЛФЧХ. Чем больше точек будет получено, тем точнее будет построен график характеристики. Из всех возможных значений в диапазоне частот от 0 до  $\infty$  рекомендуется задавать все частоты сопряжения (на каждой из них одно из слагаемых имеет значение  $\pm 45^\circ$  для звена 1-го порядка или  $\pm 90^\circ$  для звена 2-го порядка), а также по несколько значений между ними (три – пять значений) в зависимости от протяженности диапазона между соседними частотами сопряжения.

Процесс вычисления ЛФЧХ удобно оформить в виде табл. 5, в которой расчет на любой задаваемой частоте ведется для каждого слагаемого отдельно, а результат суммируется в последней строке таблицы.

Таблица 5

Данные о ЛФЧХ, градусы

ЛФЧХ	Частота, с <sup>-1</sup>																	
	0	0,01	ω <sub>c4</sub>	0,05	0,1	ω <sub>c2</sub>	0,5	1	2	5	10	ω <sub>c3</sub>	50	100	ω <sub>c1</sub>	500	1000	∞
φ <sub>K</sub> (ω)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
φ <sub>0</sub> (ω)	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90
φ <sub>4</sub> (ω)	0	22	45	63	76	86	87	89	89	90	90	90	90	90	90	90	90	90
φ <sub>2</sub> (ω)·2	0	-3	-9	-17	-33	-90	-113	-143	-161	-172	-176	-177	-179	-180	-180	-180	-180	-180
φ <sub>3</sub> (ω)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	13	90	178	179	180	180	180	180
φ <sub>1</sub> (ω)	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-3	-4	-14	-27	-45	-68	-79	-90
φ(ω) = ∑φ <sub>i</sub> (ω)	-90	-71	-54	-44	-47	-94	-116	-144	-162	-171	-166	-91	-15	-27	-45	-68	-79	-90
Точка на графике	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т

Выбирать можно по несколько значений в разных декадах, кратных друг другу, например 2 и 5 в одной декаде, а также 20 и 50 – в следующей. Если выбираемое значение частоты будет слишком близко к одной из частот сопряжения (например,  $\omega_{с4} = 0,025 \text{ с}^{-1}$  и значение  $0,02 \text{ с}^{-1}$ ), то следует оставить только указанную частоту сопряжения. Граничными значениями рассматриваемого диапазона являются 0 и  $\infty$ . Для минимально-фазовых звеньев при  $\omega = 0$  значение их ЛФЧХ также равно нулю, а при  $\omega = \infty$  составляет  $\pm 90^\circ$  для звена 1-го порядка или  $\pm 180^\circ$  для звена 2-го порядка.

Теперь приступим к построению графиков (см. рис. 16). Для начала разметим область построения: нарисуем оси координат (для ЛАЧХ и ЛФЧХ соответственно вверх и вниз), зададим логарифмическую шкалу по оси частот и шкалу на вертикальной оси справа, кратную 20 дБ, для ЛАЧХ и слева – кратную  $90^\circ$  – для ЛФЧХ. Кроме этого, для разграничения частотных диапазонов, в которых свойства кусочно-линейной ЛАЧХ различаются, проведем на вычисленных частотах сопряжения вертикальные пунктирные линии.

Область определения необходимо выбирать таким образом, чтобы в крайних декадах (справа и слева) не располагались частоты сопряжения. В нашем случае минимальная и максимальная частоты сопряжения равны 0,025 и  $200 \text{ с}^{-1}$  соответственно и располагаются в декадах  $[0,01; 0,1]$  и  $[100; 1000]$ , следовательно, область построения должна быть в пределах от 0,001 до  $10000 \text{ с}^{-1}$ . Вместе с тем сами крайние отметки частот на шкале можно не обозначать. Такой диапазон частот необходим, чтобы реальная характеристика успевала приблизиться к асимптотической, поскольку вблизи частот сопряжения их отклонение друг от друга достаточно велико.

Для построения графика асимптотической ЛАЧХ достаточно отметить точки со значениями, вычисленными на частотах сопряжения (т. е. на пунктирных линиях на нужном уровне по шкале ЛАЧХ), а также две дополнительные точки *A* и *B* для крайних асимптот, а затем соединить их отрезками ломаной линии. Кроме того, крайние асимптоты необходимо продлить, чтобы график ЛАЧХ начинался левее точки *A* и заканчивался правее точки *B* (желательно, чтобы график был изображен над всей осью частот).

После построения асимптотической характеристики необходимо учесть поправочную характеристику  $L_{\text{п}}(\omega; 0,05)$  для форсирующего звена 2-го порядка. Для этого на рис. 9 работы [3] выберем линию, соответствующую значению

$\xi = 0,05$  и, учитывая масштаб, перенесем ее на уже построенный график. Постоянная времени данного звена обозначена как  $T_3$ , следовательно, строить поправочную характеристику необходимо на частоте  $\omega_{сз}$ . Для форсирующего звена 2-го порядка следует вычитать зависимость  $L_{п}(\omega; 0,05)$ , поэтому результат будет отклоняться от асимптотической характеристики в отрицательную сторону и для значения  $\xi = 0,05$  окончательный график, например, на частоте сопряжения  $\omega_{сз}$  будет проходить на 20 дБ ниже асимптотической линии (это максимально возможное отклонение для данных параметров системы). Отметим, что поправочная характеристика приведена для нормированной (относительной) частоты, т. е. пик всех линий на рис. 9 работы [3] находится в области  $\omega/\omega_c = 1$ . Это означает, что если на рис. 9 выбраны три точки на безразмерной относительной частоте 0,8; 1 и 1,2, то для рассматриваемого звена отмеченные значения поправочной характеристики необходимо вычитать соответственно на частоте 10; 12,5 и 15 с<sup>-1</sup>. Очевидно, эти значения находятся в той же пропорции, что и три ранее указанных значения безразмерной частоты, причем второе значение 1 безразмерной частоты соответствует частоте сопряжения  $\omega_{сз} = 12,5$  с<sup>-1</sup>.

Для построения ЛФЧХ необходимо отметить значения, определенные для каждой выбранной частоты и приведенные в табл. 5, а затем соединить все отмеченные точки от А до Т плавной линией. Фазовая характеристика не должна иметь изломов. Кроме того, при малых ( $\omega \rightarrow 0$ ) и больших ( $\omega \rightarrow \infty$ ) частотах график ЛФЧХ должен асимптотически стремиться к линиям, проведенным на уровне значений, кратных 90°, при этом сами точки А и Т на графике отметить невозможно, что и показано на рис. 5 стрелками. Значения в табл. 5, выделенные курсивом, не требуют расчетов, так как они будут равны крайним значениям (при частоте, равной 0 или  $\infty$ ).