

### 3. ПОСТРОЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ АМПЛИТУДНОЙ И ФАЗОВОЙ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК САУ

#### 3.1. Теоретические сведения

Динамические свойства любой линейной САУ можно полностью описать с помощью передаточной функции  $W(s)$ . По известной передаточной функции системы определяются ее различные характеристики как во временной, так и в частотной области. Для расчета частотных характеристик производят замену аргумента функции  $s = i\omega$  и получают частотную передаточную функцию, называемую также амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ),

$$W(i\omega) = W(s)|_{s=i\omega}, \quad (30)$$

которую можно представить в показательной форме комплексной функции:

$$W(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}, \quad (31)$$

где  $A(\omega) = |W(i\omega)|$  – модуль АФЧХ,

$\varphi(\omega) = \arg W(i\omega)$  – аргумент АФЧХ.

Модуль частотной передаточной функции  $A(\omega)$  называется амплитудной частотной характеристикой (АЧХ) и показывает отношение амплитуды  $y_m$  выходного гармонического сигнала определенной частоты, полученного путем прохождения через линейную динамическую систему входного гармонического воздействия той же частоты, к амплитуде  $x_m$  этого воздействия:

$$A(\omega_0) = \frac{y_m(\omega_0)}{x_m(\omega_0)} \quad \text{при } 0 \leq \omega_0 < \infty. \quad (32)$$

Аргумент частотной передаточной функции называется фазовой частотной характеристикой (ФЧХ) и определяет сдвиг фаз между выходным и входным гармоническими сигналами рассматриваемой линейной динамической системы на заданной частоте (измеряется в градусах или радианах):

$$\varphi(\omega_0) = \beta(\omega_0) - \alpha(\omega_0) \quad \text{при } 0 \leq \omega_0 < \infty. \quad (33)$$

При изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  АЧХ и ФЧХ становятся функциями частоты, т. е.  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ , в этом случае численное значение соотношений (32), (33) в зависимости от частоты в общем случае может изменяться.

Для анализа свойств системы АЧХ используется редко ввиду ее значительной нелинейности, поэтому намного чаще проводят расчет и исследование логарифмических частотных характеристик системы. Их особенностью является то, что частота  $\omega$  по оси аргументов откладывается в логарифмическом масштабе (рис. 8). Однако масштаб можно сделать линейным, если ввести вспомогательную шкалу, выполнив замену  $x = \lg \omega$ , в этом случае начало отсчета новой системы координат будет при значении  $x = 0$  или  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ . В логарифмическом масштабе частота откладывается по декадам и измеряется также в декадах. За одну декаду частота изменяется в 10 раз, все декады представляют собой равные отрезки (именно с этой позиции вспомогательная шкала является линейной). Чтобы отметить на оси аргументов заданное значение частоты, необходимо найти ее десятичный логарифм и полученное значение отметить на вспомогательной шкале. Это значение характеризует количество декад от начала отсчета и может быть дробным, с другой стороны оси на основной шкале для отмеченной точки следует отметить исходное значение частоты. Например, частоте  $\omega = 3 \text{ с}^{-1}$  соответствует  $x = 0,47$  дек; частоте  $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$  —  $x = 2,7$  дек; частоте  $\omega = 0,02 \text{ с}^{-1}$  —  $x = -1,7$  дек и т. д.

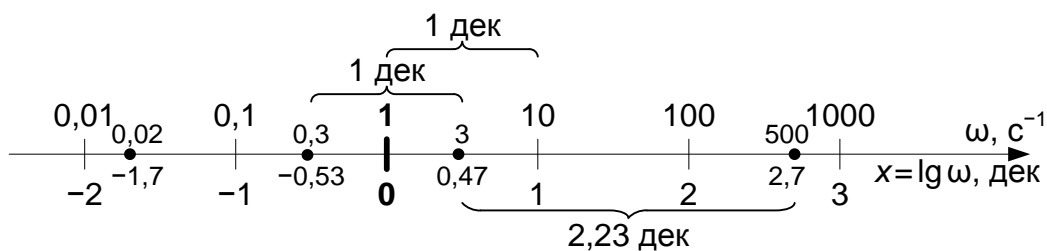


Рис. 8. Логарифмическая шкала оси частот

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) связана непосредственно с АЧХ соотношением

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) \quad (34)$$

и имеет тот же физический смысл, но измеряется в децибелах (дБ).

Логарифмическая фазовая частотная характеристика (ЛФЧХ) остается такой же, как и ФЧХ, однако частота откладывается также в логарифмическом масштабе. Несмотря на это отличие уместно употребление термина ФЧХ вместо ЛФЧХ.

Принято проводить построение ЛАЧХ и ЛФЧХ на одном графике. При этом у них одна общая ось аргументов  $\omega$ , а значения обеих характеристик откладываются по вертикальной оси: у ЛАЧХ положительное направление указывается вверх, а у ЛФЧХ – вниз. Нулевое значение шкалы ЛАЧХ совпадает с пересечением оси частот, основные отметки шкалы часто принимают кратными 20 дБ. График ЛФЧХ пересекает горизонтальную ось на уровне  $-180^\circ$  ( $-\pi$  рад), основные отметки на шкале кратны  $90^\circ$  ( $\pi/2$  рад). Выполнение данных требований к области построения желательно, так как это связано с удобством дальнейшего анализа получаемых графиков.

Передаточную функцию любой системы можно представить в виде отношения двух полиномов

$$W(s) = \frac{B_m(s)}{A_n(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (35)$$

каждый из которых по известным значениям его корней может быть разложен на множители (будем считать все корни действительными), и передаточная функция будет представлена в виде:

$$W(s) = \frac{K s^v \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}, \quad (36)$$

где  $v$  – любое положительное или отрицательное целое число;

$K$  – коэффициент передачи системы;

$\tau_j, T_i$  – постоянные времени звеньев.

Поскольку выражение (36) содержит множители, то любую сложную САУ можно представить как последовательное соединение типовых звеньев (при таком соединении их передаточные функции именно перемножаются): пропорционального, идеального дифференцирующего ( $v > 0$ ) или интегрирующего ( $v < 0$ ), апериодического, форсирующего:

$$W(s) = K \cdot s^v (\tau_1 s + 1) \dots (\tau_m s + 1) \frac{1}{T_1 s + 1} \dots \frac{1}{T_n s + 1}. \quad (37)$$

Графики ЛАЧХ перечисленных типовых звеньев приведены на рис. 9. У идеальных звеньев (рис. 9, а – в) графики представляют собой прямые линии с одинаковым наклоном на всем диапазоне частот, у реальных (рис. 9, г, д) – состоят из двух асимптот: низкочастотной (НЧА)  $L_H(\omega)$  до частоты сопряжения и высокочастотной (ВЧА)  $L_B(\omega)$  после нее, причем первая из них горизонтальна и проходит на уровне 0 дБ. Обе асимптоты соединяются на частоте сопряжения  $\omega_c$ , которая определяется как величина, обратно пропорциональная постоянной времени звена:

$$\omega_{ck} = \frac{1}{\tau_j} \quad \text{или} \quad \omega_{ck} = \frac{1}{T_i}, \quad k = 1, \dots, m + n. \quad (38)$$

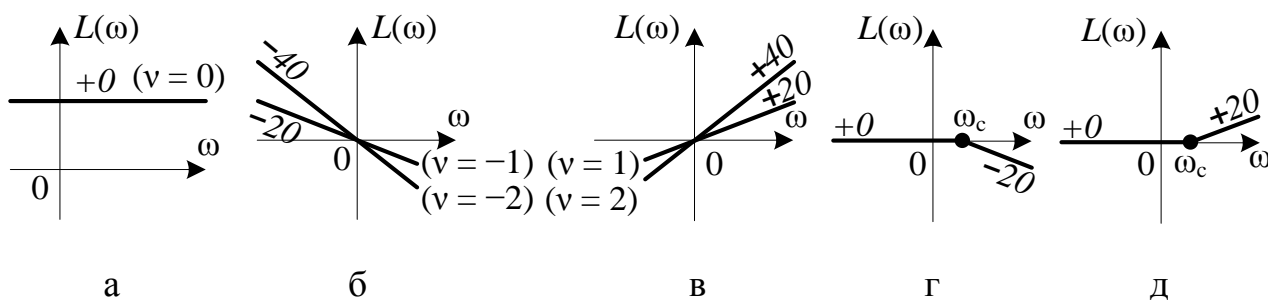


Рис. 9. Асимптотические ЛАЧХ типовых динамических звеньев: пропорционального (а), идеальных дифференцирующего (б) и интегрирующего (в), апериодического (г), форсирующего (д)

Преимуществом ЛАЧХ является ее «значительная линейность», т. е. возможность заменить точную формулу реальной характеристики приближенной кусочно-линейной зависимостью с несущественной погрешностью. При этом на протяжении достаточно больших частотных диапазонов график реальной ЛАЧХ может практически не отличаться от прямой линии.

Известно, что при последовательном соединении логарифмические характеристики складываются. Таким образом, в ходе решения задачи необходимо провести суммирование линейных и кусочно-линейных характеристик динамических звеньев (см. рис. 9), из которых согласно условию задачи состоит исходная система.

При решении задачи построения не все корни могут быть только вещественными, часто получаются пары комплексно сопряженных корней. В этом случае для исключения комплексных значений, представленных в выражении передаточной функции в явном виде, два простейших звена с парой комплексно сопряженных корней оставляют в виде одного звена 2-го порядка (рис. 10), для которого вводится еще один параметр –  $\xi$  – коэффициент затухания звена.

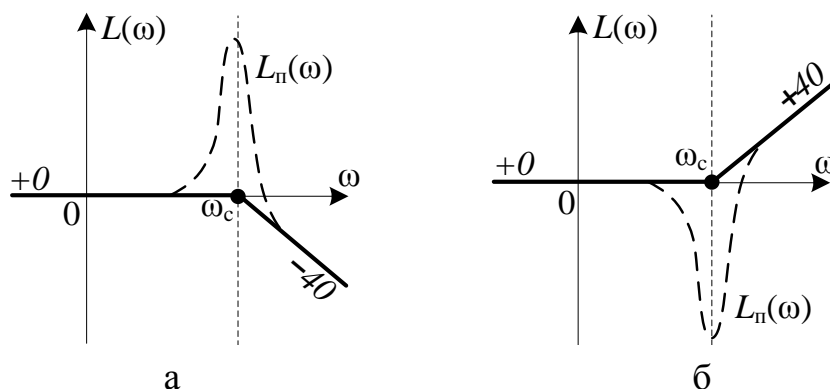


Рис. 10. Асимптотические ЛАЧХ типовых динамических звеньев 2-го порядка: колебательного (а) и форсирующего (б)

Математические модели типовых звеньев приведены в табл. 5. В общем случае асимптотические характеристики реальных звеньев могут быть представлены в виде кусочно-линейных функций, у которых НЧА  $L_n(\omega) = 0$ , а формула ВЧА  $L_b(\omega)$  определяется по табл. 5:

$$L_i(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_{ci} & \text{– НЧА;} \\ L_{bi}(\omega), & \omega \geq \omega_{ci} & \text{– ВЧА.} \end{cases} \quad (39)$$

ЛАЧХ звеньев 2-го порядка помимо двух асимптот имеют еще резонансный пик на частоте сопряжения. Значения этого пика на самой частоте сопряжения и вблизи нее определяются поправочной характеристикой  $L_\pi(\omega; \xi)$ , представленной на рис. 11. На этом графике по горизонтальной оси отложена отно-

сительная частота, поэтому частоте сопряжения соответствует значение 1. При построении графика ЛАЧХ остальные значения аргумента относительно частоты сопряжения  $\omega_{ci}$  (или  $\omega_{cj}$ ) определяются в той же пропорции, что и относительно значения 1 на рис. 11. В случае колебательного звена поправочная характеристика добавляется, в случае форсирующего – вычитается. Использование поправочной характеристики позволяет устранить значительное отклонение реальной ЛАЧХ от асимптотической.

Таблица 5

Математические модели типовых звеньев

Название	Передаточная функция	ЛАЧХ (точная формула)	ВЧА	ЛФЧХ
Пропорциональное	$K$	$20\lg K$	–	$0^\circ$
Идеальное интегрирующее	$\frac{1}{s^{ v }}, v < 0$	$-20\lg \omega$	–	$-90^\circ$
Идеальное дифференцирующее	$s^{ v }, v > 0$	$+20\lg \omega$	–	$+90^\circ$
Апериодическое	$\frac{1}{Ts + 1}$	$-20\lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$	$-20\lg T\omega$	$-\arctg T\omega$
Форсирующее	$\tau s + 1$	$+20\lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$	$+20\lg T\omega$	$+\arctg T\omega$
Колебательное	$\frac{1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$	$-20\lg \left[ \left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2 \right]^{\frac{1}{2}}$	$-40\lg T\omega$	$-\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}$
Форсирующее 2-го порядка	$\tau^2s^2 + 2\xi\tau s + 1$	$+20\lg \left[ \left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2 \right]^{\frac{1}{2}}$	$+40\lg T\omega$	$+\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}$

В конечном итоге приближенная ЛАЧХ, представленная в виде кусочно-линейной аппроксимации, будет состоять из отрезков прямых линий, расположенных между соседними частотами сопряжения и будет содержать резонансные пики на частотах сопряжения звеньев 2-го порядка.

Суммарная ЛФЧХ системы в свою очередь является нелинейной характеристикой и не может быть заменена линейными отрезками. В этом случае необходимо задаваться определенными значениями частоты и вычислять значение фазовой характеристики для каждого из них, откладывая полученные точки

на области построения. Здесь упростить решение задачи можно, определяя значения ЛФЧХ для каждого из типовых звеньев, а затем суммируя полученные результаты для каждого аргумента частоты. Для удобства такого подхода все выполняемые вычисления могут быть сведены в таблицу. Таким образом, график ЛФЧХ строится исключительно по точкам.

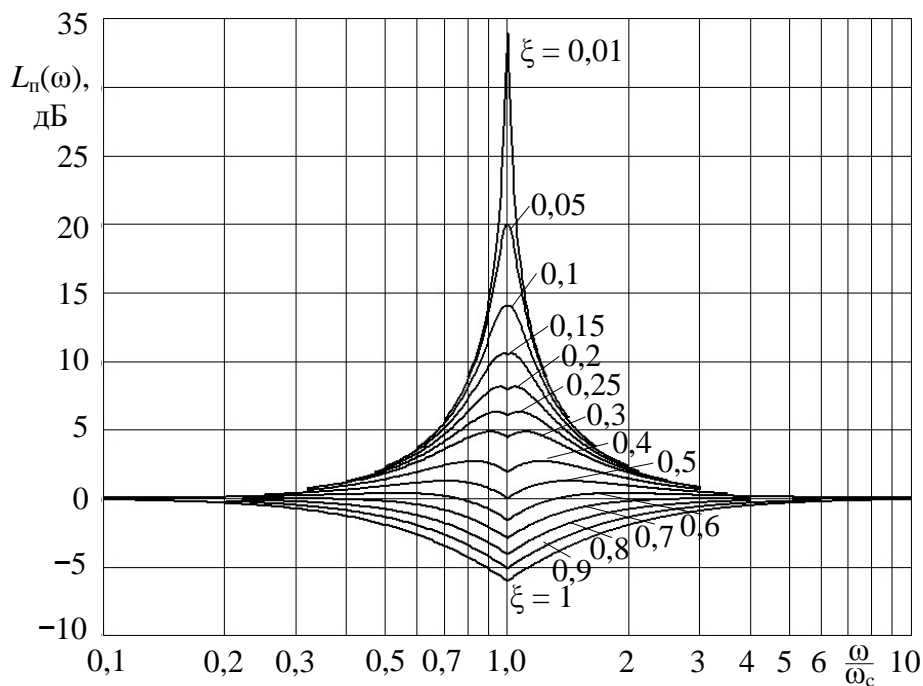


Рис. 11. Поправочная характеристика звеньев 2-го порядка

### 3.2. Задание для самостоятельной работы

Построить логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики системы, передаточная функция и параметры которой приведены в табл. 6.

**Дополнительное задание.** Построить ЛАЧХ и ЛФЧХ системы, передаточные функции которой были получены в решении к заданию 1.

### 3.3. Контрольные вопросы

- 1) Как по известной передаточной функции системы получить ее частотные характеристики?
- 2) В чем заключаются основные особенности построения логарифмических характеристик САУ?

Таблица 6

## Передаточные функции САУ и их параметры

Но- мер вари- анта	Передаточная функция	Параметры						
		$K$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$W(s) = \frac{K(T_4s+1)(T_5s+1)(T_6s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	38	100	0,02	0,005	5	0,03(3)	20
2	$W(s) = \frac{K(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}{s(T_1s+1)^2}$	5	0,005	50	16,(6)	0,02	—	—
3	$W(s) = \frac{Ks(T_5s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$	0,8	0,6(6)	2	0,02	0,001	50	—
4	$W(s) = \frac{K(T_3s+1)(T_4s+1)}{s(T_1s+1)^2(T_2s+1)}$	88	100	0,2	5	33,(3)	—	—
5	$W(s) = \frac{K(T_2s+1)^2}{s^2(T_1s+1)^2}$	8	0,2	5	—	—	—	—
6	$W(s) = \frac{Ks^2(T_4s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	1	20	0,16(6)	0,1	0,002	—	—
7	$W(s) = \frac{K(T_3s+1)(T_4s+1)}{(T_1s+1)^2(T_2s+1)^2}$	57	0,05	50	0,1	1,6(6)	—	—
8	$W(s) = \frac{K(T_2s+1)^2(T_3s+1)}{s(T_1s+1)^2}$	16	0,05	0,3(3)	10	—	—	—
9	$W(s) = \frac{K(T_2s+1)^2(T_3s+1)}{s^2(T_1s+1)}$	186	0,02	5	0,3(3)	—	—	—
10	$W(s) = \frac{K(T_5s+1)(T_6s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$	0,1	20	5	333,(3)	1	66,(6)	0,05
11	$W(s) = \frac{Ks(T_3s+1)}{(T_1s+1)^2(T_2s+1)^2}$	10	0,02	0,005	16,(6)	—	—	—
12	$W(s) = \frac{Ks^2(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)^2}$	68	66,(6)	1	0,03(3)	—	—	—
13	$W(s) = \frac{K(T_4s+1)^2(T_5s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	25	20	0,001	0,005	2	0,06(6)	—
14	$W(s) = \frac{K(T_3s+1)(T_4s+1)}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}$	45	0,002	0,5	33,(3)	16,(6)	—	—



1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	$W(s) = \frac{Ks(T_3s+1)^2}{(T_1s+1)(T_2s+1)^2}$	32	2	50	0,06(6)	—	—	—
16	$W(s) = \frac{K(T_3s+1)(T_4s+1)(T_5s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$	0,02	0,005	0,16(6)	20	0,5	0,001	—
17	$W(s) = \frac{K(T_2s+1)(T_3s+1)}{s^2(T_1s+1)^2}$	13	0,3(3)	6,(6)	0,02	—	—	—
18	$W(s) = \frac{Ks^2}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$	0,3	0,02	20	3,(3)	0,01	—	—
19	$W(s) = \frac{K(T_3s+1)^2(T_4s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$	100	50	0,002	20	0,03(3)	—	—
20	$W(s) = \frac{Ks(T_4s+1)}{(T_1s+1)^2(T_2s+1)(T_3s+1)}$	140	5	20	0,1	0,03(3)	—	—
21	$W(s) = \frac{K(T_5s+1)^2}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$	0,5	0,005	66,(6)	0,02	3,(3)	500	—
22	$W(s) = \frac{K(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}{s^2(T_1s+1)}$	18	0,001	33,(3)	0,5	0,02	—	—
23	$W(s) = \frac{Ks^2}{(T_1s+1)^2(T_2s+1)(T_3s+1)}$	76	10	0,02	0,005	—	—	—
24	$W(s) = \frac{K(T_3s+1)^2(T_4s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)^2}$	0,01	0,3(3)	0,001	16,(6)	5	—	—
25	$W(s) = \frac{Ks(T_4s+1)(T_5s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	162	50	0,3(3)	16,(6)	2	0,005	—
26	$W(s) = \frac{Ks^2}{(T_1s+1)^2(T_2s+1)^2}$	80	5	0,02	—	—	—	—
27	$W(s) = \frac{K(T_4s+1)^2}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	120	0,005	33,(3)	1	0,02	—	—
28	$W(s) = \frac{Ks(T_4s+1)^2}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	0,06	0,1	0,6(6)	0,03(3)	33,(3)	—	—
29	$W(s) = \frac{K(T_4s+1)(T_5s+1)}{(T_1s+1)^2(T_2s+1)(T_3s+1)}$	250	3,(3)	50	0,5	0,16(6)	0,002	—
30	$W(s) = \frac{K(T_3s+1)^2}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}$	12	0,03(3)	1	2	—	—	—