МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тульский государственный университет»

Институт высокоточных систем им. В.П. Грязева
Кафедра «Приборы управления»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

по дисциплине

«Моделирование динамических систем»

Направление подготовки: 140400 «Электроэнергетика и электротехника»
Профили подготовки: «Электрооборудование летательных аппаратов», «Электрооборудование и электрохозяйство предприятий, организаций и учреждений», «Электроснабжение», «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов»

Форма обучения: *очная*

Тула 2011 г.

ВВЕДЕНИЕ

Контрольная работа заочника (КРЗ) имеет целью закрепление полученных знаний в области применения компьютерных технологий, углубление навыков, полученных на практических и лекционных занятиях по курсу «Моделирование динамических систем».

1. Целью работы является проведение численного моделирования системы, описанной системой дифференциальных уравнений (передаточной функцией). Для этого нужно решить следующие задачи:

– построить систему дифференциальных уравнений первого порядка;

– получить передаточную функцию;

– составить схемы моделирования методом последовательного (непосредственного) интегрирования, методом вспомогательной переменной и методом канонической формы;

– построить системы уравнений, соответствующие методам последовательного (непосредственного) интегрирования, вспомогательной переменной и канонической формы;

– провести моделирование составленных схем;

– получить матрицы пространства состояний в нормальной форме, канонической форме и форме простых сомножителей;

– определить значения коэффициентов для всех схем моделирования;

– смоделировать переходные процессы в системе для всех схем моделирования и сделать вывод о результатах моделирования.

– для нелинейной системы необходимо построить схему моделирования и привести результаты моделирования для заданных входных воздействий.

2. Организация работы

КРЗ выполняется в течение одного семестра. Вариант задания назначается преподавателем (приведены в приложениях 1, 2).

Исходные данные для работы:

– вид дифференциального уравнения (передаточной функции);

– значения коэффициентов дифференциального уравнения;

3. Требования к оформлению контрольной работы

Пояснительная записка должна состоять из следующих разделов: введение, задание, схемы моделирования, которые должны сопровождаться расчетом машинных коэффициентов, результаты моделирования, библиографический список.

Пояснительная записка оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ 2.105-95. Пример титульного листа пояснительной записки приведен в приложении 3.

4. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделированием называется замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели. Таким образом, моделирование может быть определено как представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путем проведения экспериментов с его моделью.

Если результаты моделирования подтверждаются и могут служить основой для прогнозирования процессов, протекающих в исследуемых объектах, то говорят, что модель адекватна объекту. При этом *адекватность* модели зависит от цели моделирования и принятых критериев.

Эксперименты с реальными изделиями дорогостоящи, кроме того искусственное создание условий моделирования на действительной системе может быть затруднено или привести к катастрофическим последствиям, поэтому моделирование проводят на всем жизненном цикле изделия: это этапы проектирования, внедрения и эксплуатации.

Целью моделирования является задача изучения какой-либо стороны функционирования объекта. Условием правильного функционирования модели является подобие процесса, протекающего в модели, реальному процессу. В основе моделирования лежит *теория подобия,* которая утверждает, что абсолютное подобие может иметь место лишь при замене одного объекта другим точно таким же. По степени полноты модели делятся на полные, неполные и приближенные. В основе полного моделирования лежит полное подобие, которое проявляется как во времени, так и в пространстве. Для неполного моделирования характерно неполное подобие модели изучаемому объекту. В основе приближенного моделирования лежит приближенное подобие, при котором некоторые стороны функционирования реального объекта не моделируются совсем. Классификация видов моделирования систем приведена на рис. 1.

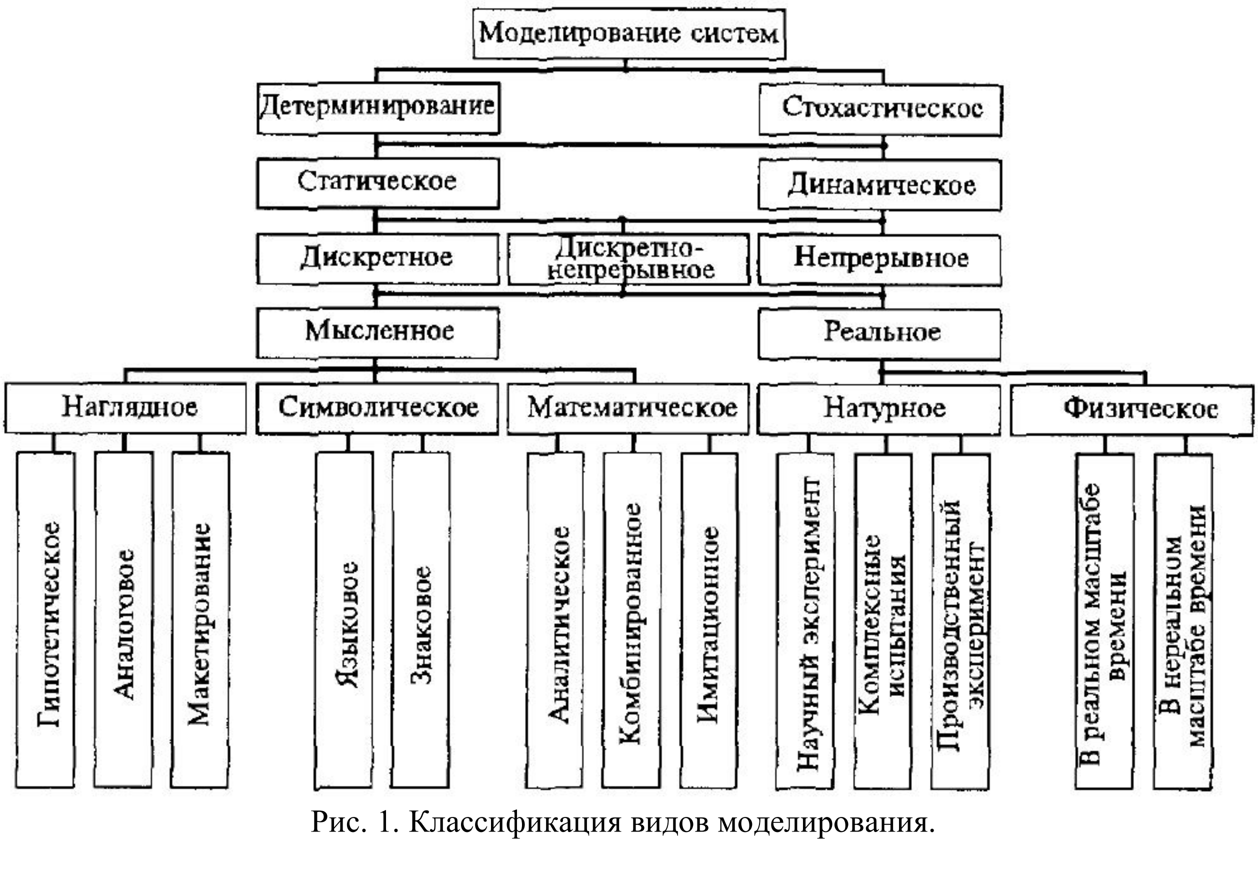


Рис. 1. Классификация видов моделирования.

Все виды моделирования могут быть разделены на детерминированные и стохастические, статические и динамические, дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные. *Детерминированное моделирование* отображает детерминированные процессы, т. Е. процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий; *стохастическое моделирование* отображает вероятностные процессы и события. В этом случае анализируется ряд реализаций случайного процесса и оцениваются средние характеристики, т. Е. набор однородных реализаций. *Статическое моделирование* служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени, а *динамическое моделирование* отражает поведение объекта во времени. *Дискретное моделирование* служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными, соответственно непрерывное моделирование позволяет отразить непрерывные процессы в системах, а *дискретно-непрерывное моделирование* используется для случаев, когда хотят выделить наличие как дискретных, так и непрерывных процессов.

Под *математическим моделированием* понимается процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта. Любая математическая модель, как и всякая другая описывает реальный объект лишь с некоторой степенью приближения к действительности. Математическое моделирование для исследования характеристик процесса функционирования систем можно разделить на аналитическое, имитационное и комбинированное.

Для *аналитического моделирования* характерно то, что процессы функционирования элементов системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, интегродифференпиальных, конечно-разностных и т. П.) или логических условий. Такие модели исследуются аналитическими методами, для них характерна простота описания.

При *имитационном моделировании* алгоритм, реализующий модель, воспроизводит процесс функционирования системы во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы. Это наиболее эффективный метод исследования систем.

Комбинированное (аналитико-имитационное) *моделирование* при анализе и синтезе систем позволяет объединить достоинства аналитического и имитационного моделирования.

Реальное моделирование используется для исследования различных характеристик либо на реальном объекте целиком, либо на его части.

Натурным моделированием называют проведение исследования на реальном объекте с последующей обработкой результатов эксперимента на основе теории подобия.

В общем случае объектом-оригиналом может быть естественная или искусственная, реальная или воображаемая система. Она имеет множество параметров S_0 и характеризуется

2. СОСТАВЛЕНИЕ СХЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Основами всех моделей являются математические схемы, которые можно разделить на следующие группы:

– статические и динамические;

– детерминистские и стохастические;

– дискретные и непрерывные.

Математическую схему можно определить как звено при переходе от содержательного к формализованному описанию процесса функционирования системы с учётом воздействия внешней среды. Т.е. имеет место цепочка: описательная модель — математическая схема —

имитационная модель. При пользовании математической схемой в первую очередь исследователя системы должен решаться вопрос об адекватности отображения конкретной схемой реальных процессов в исследуемой системе, а не возможность получения ответа (результата решения) на конкретный вопрос исследования. Выделяют непрерывно-детерминированные, дискретно-детерминированные схемы, дискретно-непрерывные, дискретно-стохастические, непрерывно-стохастические математические схемы.

Непрерывно-детерминированные математические схемы (*D-схемы*) отражают динамику процессов, протекающих в системе во времени. Для системотехники наиболее важно приложение таких схем в качестве математического аппарата в теории автоматического управления.

Математической моделью таких схем являются дифференциальные уравнения вида:

$$\begin{cases} y_1(t) = f_1(u_1, u_2, ..., u_n; v_1, v_2, ..., v_p; h_1, h_2, ..., h_r; t); \\ y_2(t) = f_2(u_1, u_2, ..., u_n; v_1, v_2, ..., v_p; h_1, h_2, ..., h_r; t); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m(t) = f_m(u_1, u_2, ..., u_n; v_1, v_2, ..., v_p; h_1, h_2, ..., h_r; t), \end{cases}$$

где $u(t)$ – вектор входных (задающих) воздействий, $v(t)$ – вектор возмущающих воздействий, h_i – параметры системы, $y(t)$ – вектор выходных переменных.

Параметры системы могут быть постоянными и переменными, зависеть от времени, от входных и выходных переменных. В первом случае имеют системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, во втором – систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Если коэффициенты постоянные и не зависят от переменных системы, то имеют систему линейных дифференциальных уравнений.

Такие системы дифференциальных уравнений имеют следующий вид:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + ... + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u, \quad (1)$$

где n – порядок дифференциального уравнения, в реальных системах $m \le n$.

Возьмем для определенности следующую систему уравнений:

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u. \quad (2)$$

В теории автоматического управления широко используется операторный метод, основанный на преобразовании Лапласа, который оригиналу сигнала $x(t)$ ставит в соответствие изображение $X(s)$. Тогда уравнение системы, записанное в операторном виде, и передаточная функция системы, равная отношению изображений выходного и входного сигналов системы, для приведенного дифференциального уравнения третьего порядка имеют соответственно вид:

$$(a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) Y(p) = (b_2 p^2 + b_1 p + b_0) U(p);$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (3)$$

где $p^k = \frac{d^k}{dt^k}$ – оператор дифференцирования, s – оператор Лапласа.

I. Метод последовательного интегрирования

В силу линейности операций дифференцирования и суммирования выходной сигнал системы, описываемой дифференциальным уравнением (2), можно представить в виде суммы сигналов трех систем, на которые воздействует один и тот же входной сигнал $u(t)$:

$$\begin{cases} a_3\dddot{y}_1 + a_2\ddot{y}_1 + a_1\dot{y}_1 + a_0 y_1 = b_0 u; \\ a_3\dddot{y}_2 + a_2\ddot{y}_2 + a_1\dot{y}_2 + a_0 y_2 = b_1\dot{u}; \\ a_3\dddot{y}_3 + a_2\ddot{y}_3 + a_1\dot{y}_3 + a_0 y_3 = b_2\ddot{u}; \\ y = y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}, \qquad (4)$$

Дифференциальное уравнение, имеющее вид первого из уравнений системы (4), называется уравнением в нормальной форме. К таким уравнениям применим метод последовательного интегрирования. Для удобства временно опустим индекс у переменной y_1, тогда первое уравнение системы будет иметь вид:

$$a_3\frac{d^3y}{dt^3} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u\,. \qquad (5)$$

Ему соответствует передаточная функция

$$W_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \qquad (6)$$

Суть метода последовательного интегрирования состоит в том, что дифференциальное уравнение разрешают относительно старшей производной:

$$\frac{d^3y}{dt^3} = \frac{1}{a_3}\left(b_0 u - a_2\frac{d^2y}{dt^2} - a_1\frac{dy}{dt} - a_0 y\right), \qquad (7)$$

а младшие производные и сам выходной сигнал получают последовательным интегрированием сигнала старшей производной. При этом выходная переменная y и ее производные заменяется машинными переменными:

$$y = x_1\,,\ \frac{dy}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = x_2\,,\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt} = x_3\,,\ \frac{d^3y}{dt^3} = \dot{x}_3\,.$$

Тогда уравнение (7) принимает вид:

$$\frac{d^3y}{dt^3} = \dot{x}_3 = \frac{1}{a_3}(b_0 u - a_2 x_3 - a_1 x_2 - a_0 x_1)\,.$$

Схема моделирования сигнала y_1 системы (4) методом последовательного интегрирования имеет вид, представленный на рис. 1.

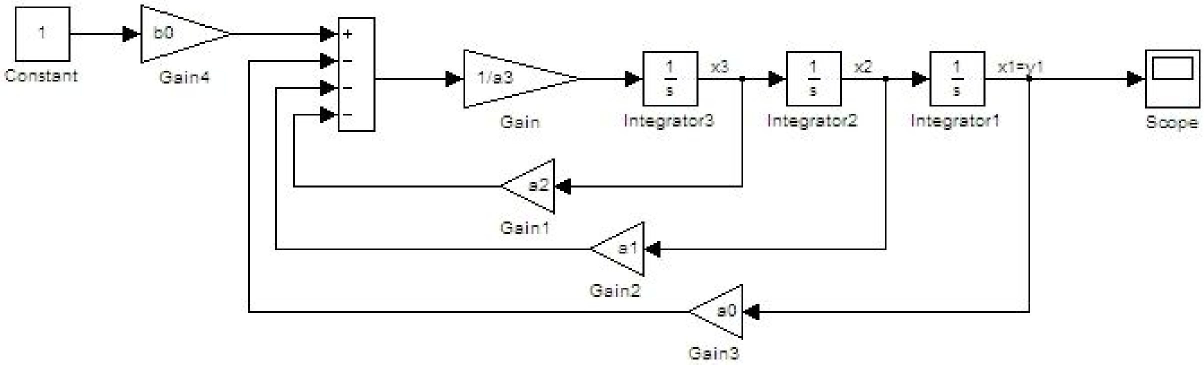


Рис. 1. Схема моделирования методом последовательного интегрирования

Если посмотреть на второе и третье уравнения системы (4), то видно, что они также соответствуют нормальной форме (5) (а значит, их тоже можно смоделировать с помощью схемы на рис. 1), только вместо сигнала u на эти системы действуют входные сигналы du/dt и d^2u/dt^2.

Для составления схем для второго и третьего уравнений системы (4) обратимся к передаточной функции. Запишем второе уравнение в операторной форме:

$$(a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0)Y_2(p) = b_1pU(p).$$

Ему соответствует передаточная функция

$$W_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{b_1s}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}, \qquad (8)$$

которую, с учетом (6), можно преобразовать к виду (не забываем, что выше мы временно опустили нижний индекс сигнала y_1):

$$W_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{b_1}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}s = \frac{b_0}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}\frac{b_1}{b_0}s = \frac{Y_1(s)}{U(s)}\frac{b_1}{b_0}s.$$

Из последнего выражения следует:

$$Y_2(s) = sY_1(s)\frac{b_1}{b_0},$$

отсюда из теоремы Лапласа об изображении производной получаем:

$$y_2(t) = \frac{b_1}{b_0}\frac{dy_1(t)}{dt} = \frac{b_1}{b_0}x_2,$$

т.е. выходной сигнал y_2, описываемый вторым уравнением системы (4), равен первой производной сигнала y_1, описываемого первым уравнением системы (4), умноженной на коэффициент, равный отношению коэффициентов исходного дифференциального уравнения (2). На схеме, приведенной на рис. 1, первой производной y_1 соответствует сигнал $x_2 = dy_1/dt$. Следовательно, второе уравнение системы (4) также моделируется схемой последовательного интегрирования, но в качестве выходного сигнала берется первая производная выходного сигнала, т.е. сигнал на входе в последний (самый правый) интегратор, и умножается на коэффициент.

Таким образом, можно сформулировать следующее правило: если передаточная функция имеет вид (8), то выходной сигнал такой системы равен первой производной выходного сигнала системы, описываемой передаточной функцией (6) (с учетом значений коэффициентов в их числителях).

Повторяя аналогичные рассуждения для третьего уравнения системы (4), получим, что выходной сигнал $y_3(t)$ равен второй производной сигнала $y_1(t)$, умноженной на соответствующий коэффициент:

$$y_3(t) = \frac{b_2}{b_0}\frac{d^2y_1(t)}{dt^2} = \frac{b_2}{b_0}x_3.$$

Таким образом, схему моделирования дифференциального уравнения (2) можно представить в виде трех схем, построенных по методу последовательного интегрирования. Тогда выходной сигнал $y(t)$ представляется в виде суммы сигналов этих трех схем:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = \frac{b_2}{b_0}\frac{d^2y_1(t)}{dt^2} + \frac{b_1}{b_0}\frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t). \qquad (9)$$

Схема моделирования дифференциального уравнения (2), которому соответствует передаточная функции (3), приведена на рис. 2.

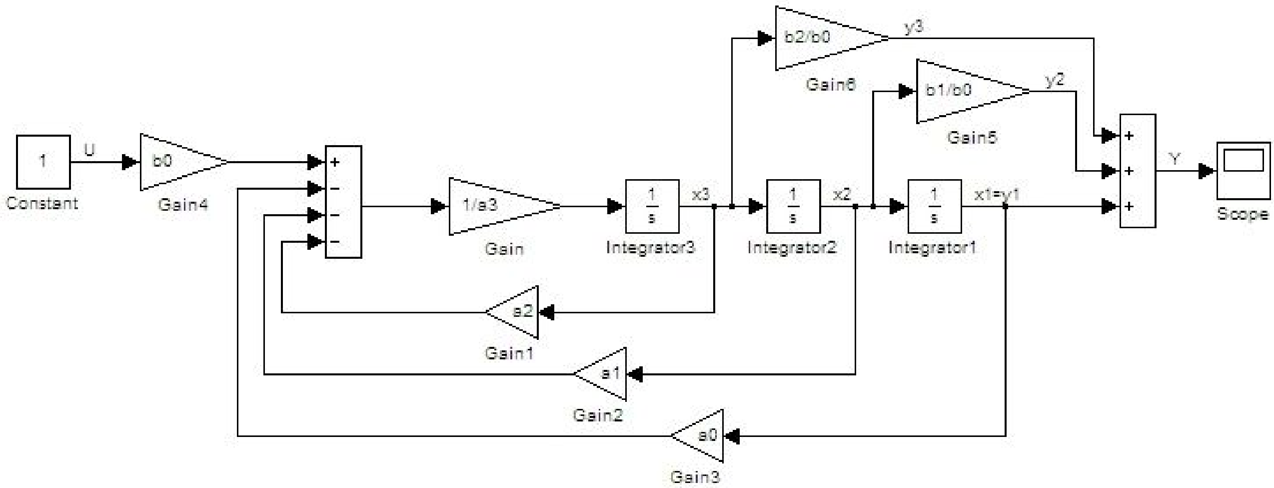


Рис. 2. Схема моделирования методом последовательного интегрирования

Система дифференциальных уравнений, соответствующая уравнению (2) и схеме моделирования на рис. 2, имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3; \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \dfrac{1}{a_3}(b_0 u - a_2 x_3 - a_1 x_2 - a_0 x_1); \\ y = \dfrac{b_2}{b_0} x_3 + \dfrac{b_1}{b_0} x_2 + x_1. \end{cases} \tag{9}$$

II. Метод канонической формы

Пусть имеется следующее уравнение третьего порядка:

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_3 \frac{d^3 u}{dt^3} + b_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \,. \tag{10}$$

Суть метода состоит в том, что исходное уравнение разрешают относительно искомой переменной $y(t)$. Для этого его записывают в операторной форме:

$$a_3 p^3 Y + a_2 p^2 Y + a_1 pY + a_0 Y = b_3 p^3 U + b_2 p^2 U + b_1 pU + b_0 U \,, \tag{11}$$

и делят на $a_n p^n$ (n – порядок уравнения):

$$Y + \frac{a_2}{a_3} p^{-1} Y + \frac{a_1}{a_3} p^{-2} Y + \frac{a_0}{a_3} p^{-3} Y = \frac{b_3}{a_3} Y + \frac{b_2}{a_3} p^{-1} U + \frac{b_1}{a_3} p^{-2} U + \frac{b_0}{a_3} p^{-3} U \,.$$

Далее уравнение разрешают относительно Y и группируют по степеням p:

$$Y = \frac{b_3}{a_3} Y + (\frac{b_2}{a_3} U - \frac{a_2}{a_3} Y) p^{-1} + (\frac{b_1}{a_3} U - \frac{a_1}{a_3} Y) p^{-2} + (\frac{b_0}{a_3} U - \frac{a_0}{a_3} Y) p^{-3} .$$

Отсюда получают выражение для выходного сигнала y:

$$y(t)=\frac{b_3}{a_3}u(t)+\int(\frac{b_2}{a_3}u(t)-\frac{a_2}{a_3}y(t))dt+\iint(\frac{b_1}{a_3}u(t)-\frac{a_1}{a_3}y(t))dtdt+\iiint(\frac{b_0}{a_3}u(t)-\frac{a_0}{a_3}y(t))dtdtdt.$$

Введем обозначения:

$$A=\frac{b_2}{a_3}u-\frac{a_2}{a_3}y,\ B=\frac{b_1}{a_3}u-\frac{a_1}{a_3}y,\ C=\frac{b_0}{a_3}u-\frac{a_0}{a_3}y,$$

тогда выходной сигнал принимает вид:

$$y(t)=\frac{b_3}{a_3}u(t)+\int A(t)dt+\iint B(t)dtdt++\iiint C(t)dtdtdt.$$

Это выражение можно преобразовать к следующему виду:

$$y(t)=\frac{b_3}{a_3}u(t)+\int\{A(t)+\int[B(t)+\int C(t)dt]dt\}dt.$$

Схема моделирования методом канонической формы имеет вид, представленный на рис. 3.

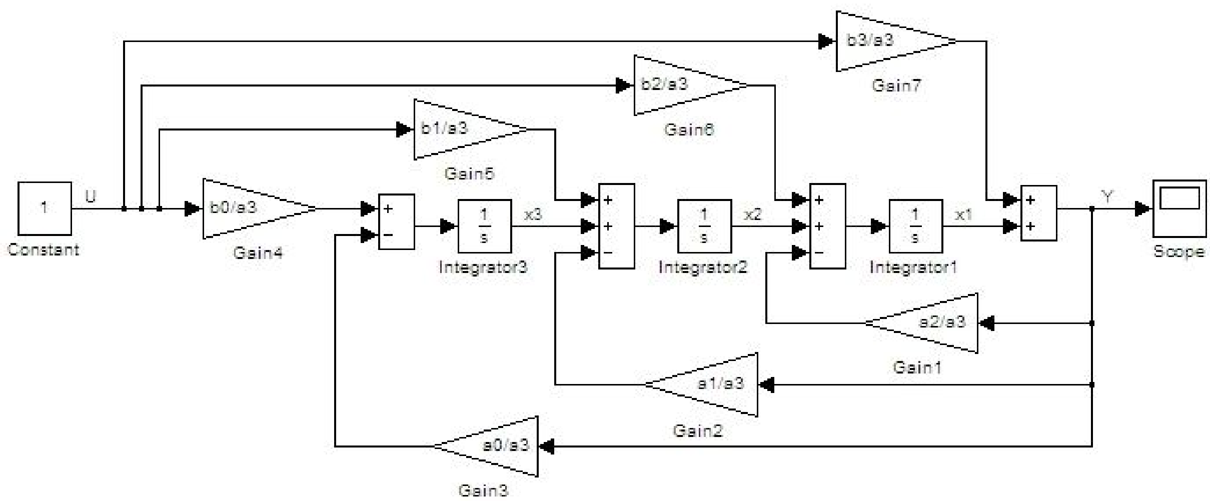


Рис. 3. Схема моделирования методом канонической формы

Система дифференциальных уравнений, соответствующая уравнению (10) и схеме моделирования на рис. 3, имеет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2+\dfrac{b_2}{a_3}u-\dfrac{a_2}{a_3}y;\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_3+\dfrac{b_1}{a_3}u-\dfrac{a_1}{a_3}y;\\ \dfrac{dx_3}{dt}=\dfrac{1}{a_3}(b_0u-a_2x_3-a_1x_2-a_0x_1);\\ y=\dfrac{b_3}{a_3}u+x_1.\end{cases}$$

III. Метод вспомогательной переменной

Реализацию метода рассмотрим на примере дифференциального уравнения (10). Запишем уравнение в операторной форме:

$$(a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0)Y(p)=(b_3p^3+b_2p^2+b_1p+b_0)U(p).$$

Из данного уравнения получают передаточную функцию:

$$Y(s)=\frac{b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0}{a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}U(s)\,. \qquad (12)$$

Далее вводят вспомогательную переменную

$$Z(s)=\frac{1}{a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}U(s)\,.$$

Этой передаточной функции соответствует уравнение:

$$a_3\dddot{z}+a_2\ddot{z}+a_1\dot{z}+a_0z=u\,,$$

отсюда

$$\dddot{z}=\frac{1}{a_3}u-\frac{a_2}{a_3}\ddot{z}-\frac{a_1}{a_3}\dot{z}-\frac{a_0}{a_3}z\,. \qquad (13)$$

Из (12) следует, что в операторной форме

$$Y(p)=(b_3p^3+b_2p^2+b_1p+b_0)Z(p)\,,$$

отсюда, на основании обратного преобразования Лапласа:

$$y(t)=b_3\frac{d^3z}{dt^3}+b_2\frac{d^2z}{dt^2}+b_1\frac{dz}{dt}+b_0z(t)\,. \qquad (14)$$

Введем переменные:

$$z=z_1\,,\ \frac{dz}{dt}=\frac{dz_1}{dt}=z_2\,,\ \frac{dz_2}{dt^2}=\frac{d^2z}{dt^2}=z_3\,,\ \frac{d^3z}{dt^3}=\frac{dz_3}{dt}\,.$$

Уравнения (13), (14), с учетом переменных z_i, образуют систему уравнений, решающую дифференциальное уравнение (10):

$$\begin{cases}\dfrac{dz_1}{dt}=z_2;\\ \dfrac{dz_2}{dt}=z_3;\\ \dfrac{dz_3}{dt}=\dfrac{1}{a_3}u-\dfrac{a_2}{a_3}z_3-\dfrac{a_1}{a_3}z_2-\dfrac{a_0}{a_3}z_1;\\ y(t)=b_3\dfrac{dz_3}{dt}+b_2z_3+b_1z_2+b_0z_1.\end{cases} \qquad (15)$$

Сравнивая (15) с системой (9) можно увидеть, что структура схемы модели, построенной по методу вспомогательной переменной, аналогична структуре схемы модели, построенной по методу последовательного интегрирования. Отличие заключается только в том, что в правой части дифференциального уравнения (10) присутствует третья производная входного сигнала $u(t)$, что дает дополнительное слагаемое $b_3\cdot dz_3/dt$ в выражении для $y(t)$ в системе уравнений (15). Схема моделирования, соответствующая системе уравнений (15), представлена на рис. 4.

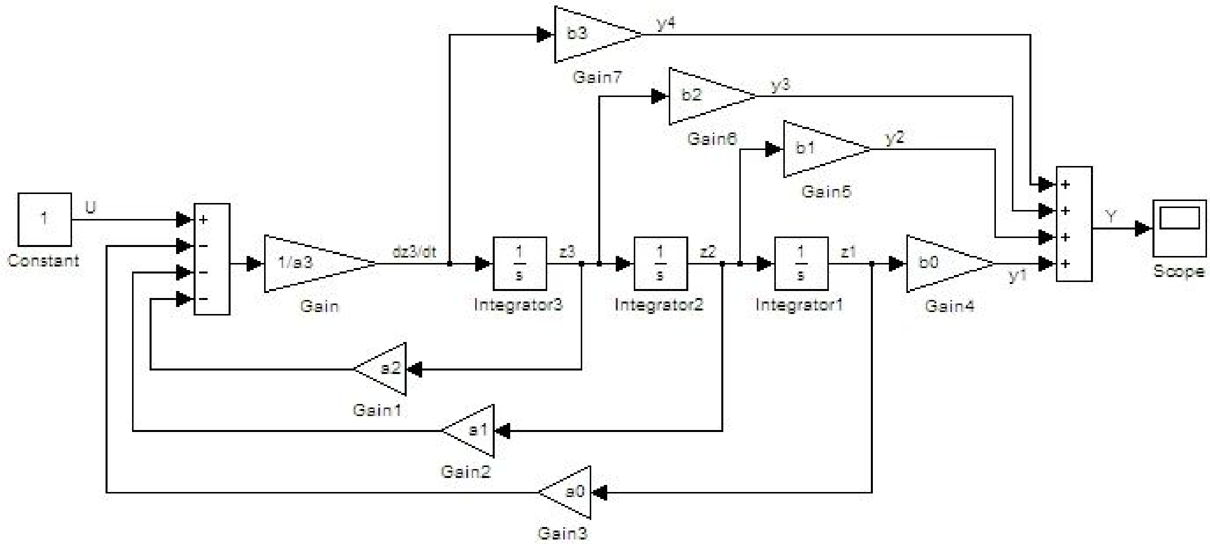


Рис. 4. Схема моделирования методом вспомогательной переменной

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

В теории автоматического управления и теории моделирования систем широко применяется матричная форма записи дифференциальных уравнений, это позволяет упростить запись систем уравнений. С другой стороны, матричная форма представления позволяет по коэффициентам передаточных функций достаточно просто построить схему моделирования системы.

4. <u>Модель в пространстве состояний в нормальной форме</u>

Пусть передаточная функция записана в нормальной форме:

$$W(s) = \frac{b}{s^n + a_n s^{n-1} + \ldots + a_2 s + a_1}, \tag{16}$$

Ей соответствует дифференциальное уравнение:

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \ldots + a_2 \dot{y} + a_1 y = bu. \tag{17}$$

Систему, описываемую уравнением (16), можно представить в виде множества дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Введем новое обозначение: x_i – переменные состояния.

$$\begin{cases} y = x_1; \\ \dot{y} = \dot{x}_1 = x_2; \\ \quad \vdots \\ y^{(n-1)} = \dot{x}_{n-1} = x_n; \\ y^{(n)} = \dot{x}_n = -a_n y^{(n-1)} - \ldots - a_1 y + bu. \end{cases} \tag{18}$$

$y^{(n)}$ – производная n-го порядка.

Переменные x_i образуют вектор состояний: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Последнее уравнений системы (18) примет вид:

$$\dot{x}_n = -a_n x_n - a_{n-1} x_{n-1} - \ldots - a_1 x_1 + bu \,.$$

С учетом новых обозначений уравнение (17) представляется в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n; \\ \dot{x}_n = -a_n x_n - a_{n-1} x_{n-1} - \ldots - a_1 x_1 + bu; \\ y = x_1, \end{cases} \tag{19}$$

Моделью в пространстве состояний называется описание вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = Au + Bu; \\ y = Cx + Du. \end{cases} \tag{20}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор состояния; $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$ – производная от x; A, B, C, D – матрицы.

В системе уравнений (20), согласно системе уравнений (19) матрицы равны:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & \ldots & -a_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \; D = (0).$$

Элементы этих матриц равны коэффициентам при соответствующих переменных системы уравнений (19). Например, в правой части первого уравнении системы (19) присутствует только переменная x_2. Следовательно, все элементы первого ряда матрицы A будут равны нулю, кроме элемента A_{12}, который будет равен 1.

Пример.

Передаточная функция равна

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \,.$$

Составляем дифференциальное уравнение:

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = U(s) \,,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u \,.$$

Производим переход к машинным переменным

$$\begin{cases} y = x_1; \\ \dot{y} = \dot{x}_1 = x_2. \end{cases}$$

Вектор состояний состоит из 2-х элементов: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Дифференциальное уравнение приобретает вид:

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -3x_2 - 2x_1 + u .$$

Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u. \end{cases}$$

$$y = x_1 .$$

Отсюда находим матрицы пространства состояний:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

II. Модель в пространстве состояний в канонической форме

Передаточная функция в канонической форме имеет вид:

$$W(s) = \frac{C_1}{s-\lambda_1} + \frac{C_2}{s-\lambda_2} + \ldots + \frac{C_n}{s-\lambda_n}, \tag{21}$$

где λ_i – корни следующего полинома

$$s^n + a_n s^{n-1} + \ldots + a_1 = (s-\lambda_1)\cdot(s-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(s-\lambda_n),$$

$$C_i = [(s-\lambda_i)W(s)]\big|_{s=\lambda_i} .$$

В устойчивых системах корни λ_i имеют отрицательную вещественную часть, поэтому при их подстановке в знаменатель получают выражения вида

$$\frac{c}{s+a} \text{ или } \frac{c/a}{\frac{1}{a}s+1},$$

а при перемножении $(s-\lambda_i)$ получают положительные коэффициенты при s^i. Если правую часть (21) привести к общему знаменателю, то получим знаменатель передаточной функции (16), записанной в нормальной форме (см. (16)):

$$W(s) = \frac{E_n s^n + \ldots + E_1 s + E_0}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_n)} = \frac{E_n s^n + \ldots + E_1 s + E_0}{s^n + a_n s^{n-1} + \ldots + a_2 s + a_1}.$$

Таким образом, чтобы представить передаточную функцию (16) в канонической форме, необходимо найти корни λ_i ее знаменателя и коэффициенты C_i.

Выходной сигнал системы, описываемой передаточной функцией (21), можно представить в виде суммы сигналов n подсистем, на каждую из которых подается входной сигнал u, и каждая из которых описывается передаточной функцией

$$W_i(s) = \frac{1}{s-\lambda_i}, \tag{22}$$

которой соответствует дифференциальное уравнение

$$\dot{x}_i - \lambda_i x_i = u, \tag{23}$$

тогда выходной сигнал системы равен

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i .$$

Тогда из (23) следует, что

$$\dot{x}_i = u + \lambda_i x_i,$$

и система уравнений, соответствующая (21), примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u; \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + u; \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n + C_n u, \end{cases}$$

выходной сигнал системы будет равен

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n.$$

Следовательно, матрицы A, B, C, D имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_n \end{pmatrix}, \; D = (0).$$

Элементы матриц определяются аналогично предыдущему случаю.

Пример.

Пусть система, по-прежнему, описывается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Перейдем к канонической форме передаточной функции. Корни знаменателя равны:

$$s^2 + 3s + 2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2},$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Следовательно,

$$W(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)},$$

$$C_1 = [(s+2) \cdot W(s)]\big|_{s=-2} = \frac{(s+2) \cdot 1}{(s+2)((-2)+1)} = -1, \; C_2 = [(s+1) \cdot W(s)]\big|_{s=-1} = \frac{(s+1) \cdot 1}{((-1)+2)(s+1)} = 1,$$

и передаточная функция окончательно принимает вид:

$$W(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s+1}.$$

Отсюда находим матрицы пространства состояний:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = (0).$$

III. Модель в пространстве состояний в форме простых сомножителей

Пусть передаточная функция системы имеет вид

$$W(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{b_i}{(s - \lambda_i)} = b \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(s - \lambda_i)}. \tag{24}$$

b – коэффициент, равный общему коэффициенту передачи.

Такую систему можно представить в виде последовательного соединения подсистем вида

$$W_i(s) = \frac{1}{(s-\lambda_i)}.$$

В этом случае для первой по счету подсистемы справедливо

$$X_1(s) = \frac{b}{s-\lambda_1}U(s),$$

а входным сигналом для i-й подсистемы служит выходной сигнал $i-1$ подсистемы:

$$X_i(s) = \frac{1}{s-\lambda_i}X_{i-1}(s), \qquad (25)$$

Выходной сигнал всей системы равен

$$y = x_n.$$

Выражению (2.31) соответствует следующее дифференциальное уравнение

$$\dot{x}_i = x_{i-1} + \lambda_i x_i.$$

Система уравнений, соответствующая передаточной функции (24), принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + bu; \\ \dot{x}_2 = x_1 + \lambda_2 x_2; \\ \vdots \\ \dot{x}_n = x_{n-1} + \lambda_n x_n; \\ y = x_n. \end{cases}$$

Таким образом, матрицы A, B, C, D имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

Пример.

Пусть передаточная функция задана в нормальной форме

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Представим эту передаточную функцию в виде сомножителей. Корни знаменателя равны:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2,$$

следовательно, передаточная функция принимает вид:

$$W(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

Отсюда находим матрицы пространства состояний:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

В общем случае числитель передаточной функции представляет собой многочлен, зависящий от степеней s. Так как ее знаменатель представим в виде сомножителей, то передаточную функцию системы можно представить состоящей из последовательного соединения типовых динамических звеньев, а схему каждого звена моделировать одним из рассмотренных выше методов.

С другой стороны, матрицы пространства состояний можно получить, применяя методы последовательного интегрирования, вспомогательной переменной и канонической формы, рассмотренные выше. Для этого необходимо по схеме моделирования, того или иного способа, составить систему дифференциальных уравнений и найти из нее соответствующие элементы матриц. Следует отметить, что если при применении метода канонической формы, либо формы сомножителей возникают комплексные корни, то соответствующие им слагаемые, либо сомножители передаточной функции представляют в виде передаточной функции звена второго порядка.

Например, имеется следующая передаточная функция:

$$W(s) = \frac{1}{s(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)}.$$

Тогда каноническая форма будет иметь вид:

$$\frac{C_1}{s} + \frac{D_1 s + D_2}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1},$$

а форма сомножителей соответственно:

$$\frac{C_2}{s} \cdot \frac{D_3 s + D_4}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1},$$

где коэффициенты D_i получают по коэффициентам C_i, полученным по разложению с комплексными корнями.

Для составления матриц пространства состояния делают следующее: отдельно составляют матрицы, соответствующие звену второго порядка и остальной части передаточной функции. Далее эти матрицы объединяют.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

При исследовании нелинейных систем строят схему моделирования согласно системе дифференциальных уравнений, описывающих ее работу, и проводят моделирование по данной полной модели. При этом нелинейные функции заменяют близкими им типовыми нелинейностями: насыщение, люфт, реле (гистерезис), либо формируют полное выражение с помощью блока пользовательской функции. Для анализа поведения системы при малых отклонениях от установившегося режима работы их, как правило, линеаризуют, и далее применяют рассмотренные выше методы.

Пусть дана следующая система дифференциальных уравнений, описывающая движение двигателя постоянного тока, который перемещает нагрузку, обладающую сухим трением:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\omega}{i_{\text{р}}}; \\ \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{1}{J}\left(ku - C_e\omega - \dfrac{M_{\text{тр}}}{i_{\text{р}}} sign(\omega)\right), \end{cases} \tag{26}$$

где k – коэффициент передачи по напряжению; $i_{\text{р}}$ – передаточное число редуктора, $M_{\text{тр}}$ – момент сухого трения нагрузки, C_e – коэффициент противоЭДС.

Схема моделирования, соответствующая системе (26), имеет вид, представленный на рис. 5.

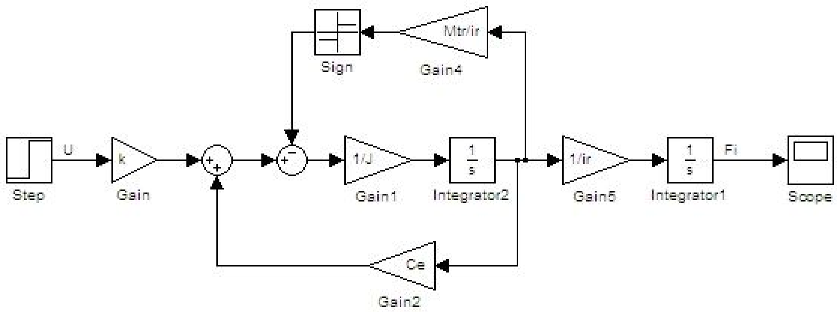


Рис. 5. Схема моделирования

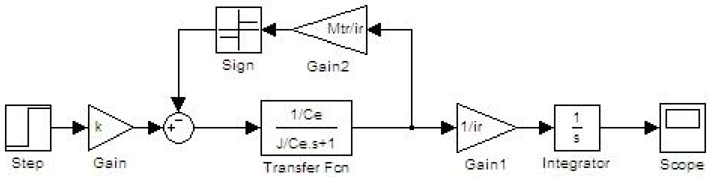


Рис. 6. Модифицированная схема моделирования

Кроме непосредственного составления схемы для решения системы дифференциальных уравнений вида (26), можно применить способ разделения нелинейной системы на линейную и нелинейные части. В этом случае линейную часть системы можно моделировать передаточными функциями. Например, для системы уравнений (26) контур, включающий блоки «Gain1», «Integrator2», «Gain2», можно представить в виде передаточной функции апериодического звена (рис. 6). В системе уравнений (26) ей соответствует второе уравнение, если убрать нелинейность.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Варианты заданий

Таблица П.1

№ Варианта	Передаточная функция	b_2	b_1	b_0
1	$W(s)=\dfrac{b_2s^2+b_1s+b_0}{(s+0{,}5)(s^2+7s+10)}$	2	20	23
2		0	21	24
3		0	4	11
4		24	39	0
5		5	20	2
6		0	27	0
7		6	0	39
8		2	1	9
9	$W(s)=\dfrac{b_2s^2+b_1s+b_0}{(s+0{,}5)(s^2+4s+5)}$	0	13	0
10		0	9	11
11		-4	7	11
12		0	7	10
13		9	11	0
14		6	8	9
15		6	0	-8
16		-6	8	12

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Варианты заданий

Система уравнений:

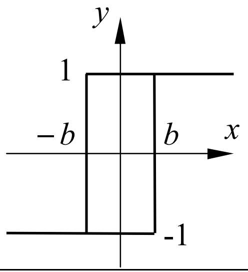
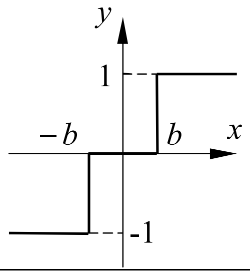
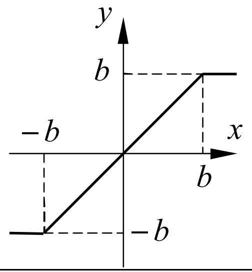
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{1}{T_1}(k_1 f(\Delta) - x_1); \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dot{x}_3 = \dfrac{1}{T_2^2}(x_1 - 2\xi_2 T_2 x_2 - x_3), \end{cases}$$

где $\Delta = k(1(t) - x_2)$.

Таблица П.2 Параметры системы уравнений

Вариант	Нелинейность $f(\Delta)$	k	b	k_1	T_1	T_2	ξ_2
1	1	2	±0,5	10	0,05	0,07	0,5
2		2	±0,2	5	0,2	0,07	0,5
3		2	±0,1	1	0,05	0,07	0,5
4		10	±0,5	1	0,25	0,07	0,2
5		2	±0,1	1,2	0,5	0,07	1
6	2	1	±0,1	1	1,0	0,07	1
7		1	±0,5	1	1,0	0,07	0,2
8		1	±0,2	1	0,05	0,07	0,5
9		1	±0,1	1	0,25	0,07	0,5
10		2	±0,1	1	1,0	0,07	0,2
11	3	2	±0,5	5	1,0	0,07	0,2
12		1	±0,5	10	1,0	0,07	0,5
13		2	±1,5	1,75	0,2	0,07	0,5
14		1	±1,5	2	0,1	0,07	1,0
15		2	±1,5	2	1,5	0,07	0,2
16		2	±1,0	1	0,5	0,07	1,0

Таблица П.3 Виды нелинейностей

Вид нелинейности		
1	2	3
		

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тульский государственный университет»

Институт высокоточных систем им. В.П. Грязева

Кафедра «Приборы управления»

Контрольная работа
по дисциплине

«Моделирование динамических систем»

Выполнил: студент гр. *XXXXXX*
Фамилия И.О.
Проверил: *уч. степень*, *Фамилия И.О.*

Тула 20*XX* г.

Библиографический список

Основная литература

1. Бахвалов Л.А. Моделирование систем: учеб. пособие для вузов / Л.А. Бахвалов. – М.: Изд-во МГГУ, 2006. – 295с.
2. Лазарев Ю. Моделирование процессов и систем в MATLAB: учебный курс / Ю. Лазарев. – СПб.: Питер, 2005. – 512 с.
3. Мартынов Н.Н. Введение в MATLAB 6.x: Учебник / Н.Н. Мартынов. – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2002. – 352 с.
4. Новгородцев, А.Б. Расчет электрических цепей в MATLAB: Учеб. курс / А.Б. Новгородцев. – М. [и др.]: Питер, 2004. – 250 с.
5. Поршнев С.В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB: Учеб. пособие для вузов / С.В. Поршнев. – М.: Горячая линия-Телеком, 2003. – 592с.
6. Поршнев С.В. MATLAB 7: основы работы и программирования: учеб. пособие для вузов / С.В. Поршнев. – М.: Бином, 2006. – 320 с.
7. Советов Б.Я. Моделирование систем: Практикум: Учеб. пособие для вузов / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2003. – 295 с.
8. Советов Б.Я. Моделирование систем: учебник для вузов / Б.Я.Советов, С.А.Яковлев. – 4-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2005. – 342 с.
9. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: учебник для вузов / В.П. Тарасик. – 2-е изд., испр. и доп. – Минск: Дизайн ПРО, 2004. – 640с.

Дополнительная литература

1. Подчуфаров Ю.Б. Физико-математическое моделирование систем управления и комплексов / Ю.Б. Подчуфаров; Под ред. А.Г. Шипунова. – М.: Физматлит, 2002. – 168 с.
2. Советов Б.Я. Моделирование систем: Учебник для вузов / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2001. – 343 с.
3. Советов Б.Я. Моделирование систем: Курсовое проектирование: учеб. пособие / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – М.: Высш. шк., 1988. – 135 с.