

# 1. ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ САУ В ВИДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

## 1.1. Краткие сведения из теории

Процессы в любой динамической системе в общем случае могут быть описаны дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка вида:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t), \quad (1)$$

где  $x(t)$  – входной сигнал (внешнее воздействие);

$y(t)$  – выходной сигнал (реакция системы);

$a_i, b_j$  – коэффициенты уравнения, постоянные для линейных стационарных систем.

Для того, чтобы составить уравнения динамики процессов в электрической схеме, можно воспользоваться законами Кирхгофа. Основными элементами расчетной (принципиальной) схемы электрической цепи переменного тока (в общем случае) являются резисторы, рассеивающие электрическую энергию, катушки индуктивности, характеризующие инерционные свойства системы, и конденсаторы, способные запасать электрический заряд, а вместе с ним и потенциальную энергию.

Для формирования математической модели динамических процессов в механической системе применяют метод для энергий (уравнение Лагранжа 2-го рода) или для сил, действующих в системе на каждый ее элемент (метод Даламбера – Лагранжа, называемый общим уравнением динамики). Количество обобщенных координат, а следовательно, и уравнений в системе, определяется числом степеней свободы в рассматриваемой расчетной схеме.

Если динамика системы задана уравнением (1), то, преобразовав его по Лапласу, получим выражение в операторной форме:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots + b_0 X(s), \quad (2)$$

откуда можно выразить передаточную функцию в виде отношения двух полиномов:

$$W_{y/x}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (3)$$

где  $X(s)$  и  $Y(s)$  – изображение входного и выходного сигналов.

## 1.2. Примеры решения задач

**Пример 1.** Определить систему дифференциальных уравнений динамики электрической системы, заданной принципиальной схемой на рис. 1; найти передаточные функции для выходных сигналов  $e_2(t)$  и  $i_2(t)$  по входному воздействию  $e_1(t)$ .

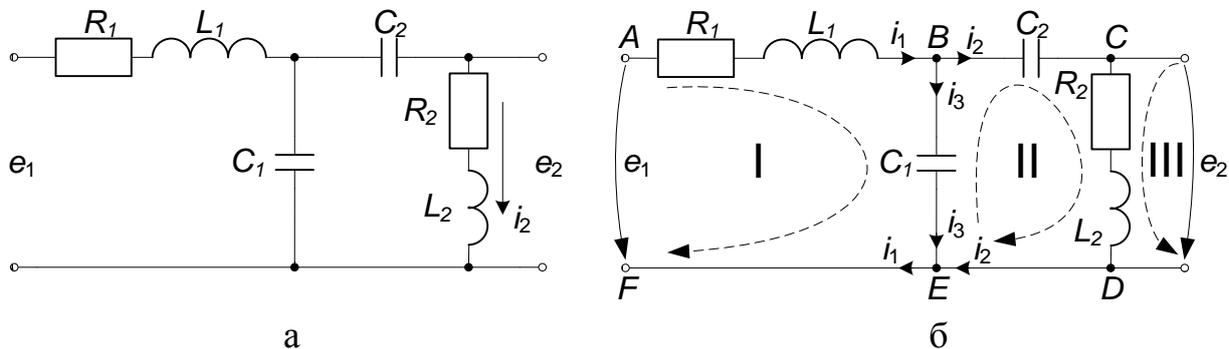


Рис. 1. Принципиальная схема электрической цепи: исходная (а) и с используемыми в решении обозначениями (б)

Решение.

Выполним некоторые построения на схеме (рис. 1, б), которые нам понадобятся в дальнейшем для решения задачи. Сначала отметим узловые точки  $A, B, C, D, E, F$  и направления токов в узле  $B$ . Согласно первому закону Кирхгофа входной ток в узел  $B$  равен сумме выходящих из него токов:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t). \quad (4)$$

Соотношение (4) справедливо и для узла  $E$ .

Теперь обозначим три контура, чтобы воспользоваться вторым законом Кирхгофа и составить уравнения для падения напряжения вдоль каждого из контуров, пользуясь соотношениями (5) – (7) из работы [3]. При этом замкнутым является только контур II. Выберем направления обхода контуров, как показано пунктирными стрелками на рис. 1. Если направление тока совпадает с направлением обхода, то падение напряжения на элементе, через который протекает этот ток, берется со знаком «+», в противном случае – со знаком «-».

В контуре I падение напряжения происходит последовательно на резисторе  $R_1$ , катушке  $L_1$  (через них протекает ток  $i_1$ ) и конденсаторе  $C_1$  (ток  $i_3$ ) и в сумме его значение равно входному напряжению  $e_1$  (направление всех токов совпадает с обходом контура). В контуре II (замкнутом) суммарное падение напряжения на конденсаторе  $C_1$  (ток  $i_3$ ), конденсаторе  $C_2$ , резисторе  $R_2$ , катушке  $L_2$  (везде ток  $i_2$ ) равно нулю (только ток  $i_3$  направлен против обхода контура). В контуре III подразумевается, что падение напряжения на резисторе  $R_2$  и катушке  $L_2$  равно выходному напряжению  $e_2$ .

Считается, что входное напряжение  $e_1$  задано (известно). Тогда после составления уравнений для трех контуров по второму закону Кирхгофа окажется, что неизвестных четыре (три тока и выходное напряжение  $e_2$ ). Следовательно, к полученным трем уравнениям необходимо добавить еще одно – для токов, полученное согласно первому закону Кирхгофа. Это уравнение (4), его мы запишем третьим в системе:

$$\begin{cases} e_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_3(t) dt; \\ 0 = -\frac{1}{C_1} \int i_3(t) dt + \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt + R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}; \\ i_1(t) = i_2(t) + i_3(t); \\ e_2(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}. \end{cases} \quad (5)$$

Итак, составлена система уравнений, описывающих динамику электрической системы (они являются дифференциально-интегральными). Очевидно, что последнее уравнение системы (5) является единственным, которое содержит сигнал  $e_2$ , который связан непосредственно с током  $i_2$ . Следовательно, первые три уравнения могут быть решены без рассмотрения последнего, однако оно нам необходимо для определения именно сигнала  $e_2$ .

Чтобы найти передаточные функции для сигналов  $e_2$  и  $i_2$ , потребуется преобразовать левые и правые части уравнений системы (5) по Лапласу, пользуясь его свойствами и соотношениями (8) – (10) из работы [3], а затем определить изображения указанных сигналов. После выполненных преобразований система в операторной форме примет вид:

$$\begin{cases} E_1(s) = R_1 I_1(s) + L_1 s I_1(s) + \frac{1}{C_1 s} I_3(s); \\ 0 = -\frac{1}{C_1 s} I_3(s) + \frac{1}{C_2 s} I_2(s) + R_2 I_2(s) + L_2 s I_2(s); \\ I_1(s) = I_2(s) + I_3(s); \\ E_2(s) = R_2 I_2(s) + L_2 s I_2(s). \end{cases} \quad (6)$$

Умножим первое уравнение на  $C_1 s$ , а второе – на  $C_1 C_2 s$  и, где это возможно, вынесем токи за скобки как общие множители:

$$\begin{cases} C_1 s E_1(s) = [C_1 L_1 s^2 + C_1 R_1 s] I_1(s) + I_3(s); \\ 0 = -C_2 I_3(s) + [C_1 L_2 C_2 s^2 + C_1 R_2 C_2 s + C_1] I_2(s); \\ I_1(s) = I_2(s) + I_3(s); \\ E_2(s) = [L_2 s + R_2] I_2(s). \end{cases} \quad (7)$$

После применения преобразования необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно изображений искомых сигналов. Сначала решим первые три уравнения и определим ток  $I_2(s)$ . Затем, подставив полученное выражение для тока  $I_2(s)$  в четвертое уравнение, найдем напряжение  $E_2(s)$ .

Будем решать систему методом Крамера. Для этого в первую очередь перенесем неизвестные токи в левую часть уравнений системы, а известное входное напряжение – в правую:

$$\begin{cases} [C_1 L_1 s^2 + C_1 R_1 s] I_1(s) + I_3(s) = C_1 s E_1(s); \\ [C_1 L_2 C_2 s^2 + C_1 R_2 C_2 s + C_1] I_2(s) - C_2 I_3(s) = 0; \\ -I_1(s) + I_2(s) + I_3(s) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

После этого введем вектор неизвестных токов  $\vec{I}(s)$  следующим образом:

$$\vec{I}(s) = \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Далее составим матрицу из коэффициентов при токах: каждая строка матрицы соответствует уравнениям системы (8), приведенным в соответствующем порядке, а для заполнения столбцов коэффициенты при токах выбираются в том же порядке, что и в векторе  $\vec{I}(s)$ , т. е. сначала –  $I_1(s)$ , а затем  $I_2(s)$  и  $I_3(s)$ . Если нужный ток в уравнении отсутствует, это означает, что коэффициент перед ним равен нулю. Итак, получим матрицу сопротивлений системы:

$$Z(s) = \begin{pmatrix} C_1 L_1 s^2 + C_1 R_1 s & 0 & 1 \\ 0 & C_1 L_2 C_2 s^2 + C_1 R_2 C_2 s + C_1 & -C_2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Умножая матрицу  $Z(s)$  на вектор  $\vec{I}(s)$  по правилам матричной алгебры, получим вектор, строки которого содержат левую часть уравнений системы (8), т. е. эту систему можно представить в виде одного матричного уравнения:

$$Z(s)\vec{I}(s) = \vec{E}(s), \quad (11)$$

где  $\vec{E}(s) = \begin{pmatrix} C_1 s E_1(s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Решение для тока  $I_2(s)$  по методу Крамера будет равно отношению двух определителей:

$$I_2(s) = \frac{|Z_{\vec{E}}^{(2)}(s)|}{|Z(s)|}, \quad (12)$$

где  $|Z(s)|$  – определитель матрицы (10);

$|Z_{\vec{E}}^{(2)}(s)|$  – определитель, в целом совпадающий с  $|Z(s)|$  за исключением одного столбца: так как искомый ток  $I_2(s)$  указан вторым по счету в векторе  $\vec{I}(s)$ , то в определителе  $|Z(s)|$  второй столбец (указан как (2) в верхнем индексе) заменяется на вектор правой части уравнения  $\vec{E}(s)$  (показано в нижнем индексе определителя числителя).

Так как определитель знаменателя имеет размерность  $3 \times 3$ , то для удобства раскроем его по первой строке (она содержит всего два ненулевых элемента):

$$|Z(s)| = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} C_1 L_1 s^2 + C_1 R_1 s & C_1 L_2 C_2 s^2 + C_1 R_2 C_2 s + C_1 & -C_2 \\ & 1 & 1 \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -C_2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & C_1 L_2 C_2 s^2 + C_1 R_2 C_2 s + C_1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

В выражении (13) второе слагаемое равно нулю. Раскрыв определители  $2 \times 2$  в оставшихся слагаемых, получим следующий результат:

$$|Z(s)| = [C_1 L_1 s^2 + C_1 R_1 s] [C_1 L_2 C_2 s^2 + C_1 R_2 C_2 s + C_1 + C_2] + C_1 L_2 C_2 s^2 + C_1 R_2 C_2 s + C_1. \quad (14)$$

Раскрыв скобки в выражении (14), сгруппировав его по степеням  $s$  и вынеся коэффициент  $C_1$  как общий множитель, получим:

$$|Z(s)| = C_1 [L_1 C_1 L_2 C_2 s^4 + (R_1 C_1 L_2 C_2 + L_1 C_1 R_2 C_2) s^3 + \\ + (L_1 C_1 + L_1 C_2 + L_2 C_2 + R_1 C_1 R_2 C_2) s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) s + 1]. \quad (15)$$

Введем обозначения коэффициентов при степенях  $s$  и с учетом этого запишем:

$$|Z(s)| = C_1 [a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0], \quad (16)$$

где  $a_4 = L_1 C_1 L_2 C_2$ ;  $a_3 = (R_1 C_1 L_2 C_2 + L_1 C_1 R_2 C_2)$ ;  $a_2 = (L_1 C_1 + L_1 C_2 + L_2 C_2 + R_1 C_1 R_2 C_2)$ ;  $a_1 = (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)$ ;  $a_0 = 1$ .

Теперь раскроем определитель числителя:

$$|Z_{\bar{E}}^{(2)}(s)| = \begin{vmatrix} C_1 L_1 s^2 + C_1 R_1 s & C_1 s E_1(s) & 1 \\ 0 & 0 & -C_2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = C_1 C_2 s E_1(s). \quad (17)$$

Подставив полученные выражения для определителей (16) и (17) в формулу (12), получим соотношение между выходным током  $I_2(s)$  и входным напряжением  $E_1(s)$ :

$$I_2(s) = \frac{C_1 C_2 s E_1(s)}{C_1 [a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0]} = \frac{C_2 s}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} E_1(s). \quad (18)$$

Определим передаточную функцию для тока  $I_2(s)$  как отношение изображений выходного сигнала к входному:

$$W_{I_2}(s) = \frac{I_2(s)}{E_1(s)} = \frac{C_2 s E_1(s)}{E_1(s) [a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0]}. \quad (19)$$

Сократив множитель  $E_1(s)$  в числителе и знаменателе, запишем окончательное выражение передаточной функции для тока  $I_2(s)$ , содержащее только известные параметры электрической цепи:

$$W_{I_2}(s) = \frac{C_2 s}{[a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0]}. \quad (20)$$

Передаточную функцию для выходного  $E_2(s)$  напряжения определим аналогичным образом, учитывая при этом связь между напряжением  $E_2(s)$  и током  $I_2(s)$ , указанную в четвертом уравнении системы (7):

$$W_{E_2}(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{[L_2 s + R_2] I_2(s)}{E_1(s)} = [L_2 s + R_2] W_{I_2}(s). \quad (21)$$

Таким образом, получим окончательный ответ:

$$W_{E_2}(s) = \frac{[L_2 s + R_2] C_2 s}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}. \quad (22)$$

**Пример 2.** Определить для случая малых колебаний систему дифференциальных уравнений динамики механической системы, заданной расчетной схемой на рис. 2; найти передаточные функции для обобщенных координат  $z$  и  $\varphi$  по кинематическому возмущению  $\eta(t)$ .

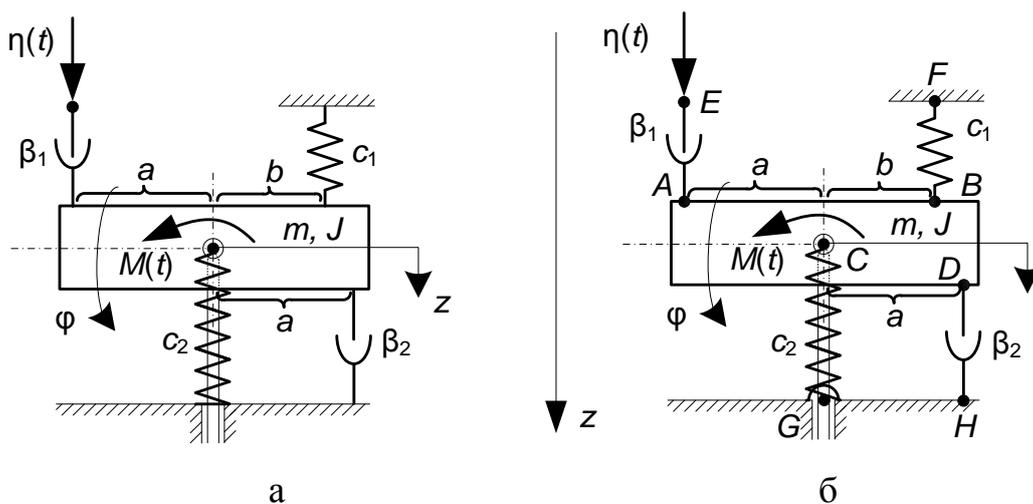


Рис. 2. Расчетная схема механической системы: исходная (а) и с используемыми в решении обозначениями (б)

Решение.

Получим систему дифференциальных уравнений динамики механической системы с помощью уравнения Лагранжа второго рода. Необходимо будет связать деформации упругих и диссипативных связей (и их скорости) с обобщенными координатами, поэтому обозначим точки закрепления подвижных связей буквами  $A, B, C, D, E, F, G, H$ , как показано на рис. 2, б.

Определим кинетическую энергию всей системы, совершающей плоско-параллельное движение:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2. \quad (23)$$

Далее нам понадобятся выражения для определения деформаций подвижных связей в системе. В данной задаче все связи ориентированы вертикально, поэтому их деформации будут проецироваться на ось  $z$ , так как для случая малых колебаний их горизонтальным смещением можно пренебречь. При этом следует учесть, что три из восьми обозначенных точек неподвижны ( $F, G$  и  $H$ ) и не влияют на деформацию связанных с ними элементов (перемещение этих точек будем задавать равным нулю).

Далее следует выбрать знак для разных видов деформации: например, растяжение элементов связи будем рассматривать как положительную деформацию, а сжатие – как отрицательную. Для упругих элементов нас интересует сама деформация, а для демпфирующих – ее скорость. Теперь, учитывая, что ось  $z$  направлена вниз, определим деформации или их скорости для четырех связей в системе через координаты обозначенных точек. Например, перемещение вниз точки  $A$  растягивает демпфирующую связь  $\beta_1$ , а точки  $E$  – сжимает ее; то же соотношение характерно и для скорости деформации, что отражено в первом уравнении системы

$$\begin{cases} \dot{\Delta}_{\beta 1} = \dot{z}_A - \dot{z}_E; \\ \Delta_{c1} = z_B - z_F; \\ \Delta_{c2} = z_C - z_G; \\ \dot{\Delta}_{\beta 2} = \dot{z}_D - \dot{z}_H. \end{cases} \quad (24)$$

Отметим, что для неподвижных точек  $z_F = z_G = z_H = 0$ . На перемещение точки  $E$  влияет только кинематическое воздействие  $\eta(t)$ , т. е.  $\dot{z}_E = \dot{\eta}(t)$ . Точка  $C$  расположена непосредственно под центром масс, поэтому поворот тела вокруг

центра масс не влияет на ее перемещение, и тогда  $z_C = z(t)$ . Перемещение остальных точек зависит не только от поступательного движения центра масс  $z$ , но и от угла поворота  $\varphi$  вокруг него, который нужно привести к линейному перемещению, воспользовавшись заданным расстоянием от центра масс до указанной точки (следует отметить, что положительное направление поворота – против хода часовой стрелки – приводит к растяжению обеих демпфирующих связей  $\beta_1$  и  $\beta_2$  и сжатию упругой связи  $c_1$ , что приводит к различию в знаках в выражениях для деформаций соответствующих связей или их скоростей):  $\dot{z}_A = \dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t)$ ,  $z_B = z(t) - b\varphi(t)$ ,  $\dot{z}_D = \dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t)$ .

Учитывая описанные выше соотношения, определим диссипативную функцию системы:

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta_1\dot{\Delta}_{\beta_1}^2 + \frac{1}{2}\beta_2\dot{\Delta}_{\beta_2}^2 = \frac{1}{2}\beta_1[\dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t) - \eta(t)]^2 + \frac{1}{2}\beta_2[\dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t)]^2 \quad (25)$$

и потенциальную энергию:

$$П = \frac{1}{2}c_1\Delta_{c_1}^2 + \frac{1}{2}c_2\Delta_{c_2}^2 = \frac{1}{2}c_1[z(t) - b\varphi(t)]^2 + \frac{1}{2}c_2[z(t)]^2. \quad (26)$$

Теперь необходимо найти соответствующие частные производные по обобщенным координатам или их скорости. При этом, когда определяется частная производная по одной из координат, вторая считается постоянной величиной. Кроме того, для кинетической энергии помимо частных производных следует найти полные производные по времени от полученных выражений. Определять частные производные будем от сложных функций по соответствующему правилу:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{z}}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[2 \cdot \frac{1}{2}m\dot{z} + 0\right] = \frac{d}{dt}[m\dot{z}] = m\ddot{z}; \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[0 + 2 \cdot \frac{1}{2}J\dot{\varphi}\right] = \frac{d}{dt}[J\dot{\varphi}] = J\ddot{\varphi}; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}} &= 2 \cdot \frac{1}{2}\beta_1[\dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t) - \eta(t)] \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{z}}[\dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t) - \eta(t)] + \\ &+ 2 \cdot \frac{1}{2}\beta_2[\dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t)] \frac{\partial}{\partial \dot{z}}[\dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t)] = \beta_1[\dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t) - \eta(t)] \cdot [1 + 0 - 0] + \\ &+ \beta_2[\dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t)] \cdot [1 + 0] = (\beta_1 + \beta_2)\dot{z}(t) + (\beta_1 + \beta_2)a\dot{\varphi}(t) - \beta_1\eta(t); \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \beta_1 [\dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t) - \eta(t)] \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} [\dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t) - \eta(t)] + \\ &+ 2 \cdot \frac{1}{2} \beta_2 [\dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t)] \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} [\dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t)] = \beta_1 [\dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t) - \eta(t)] \cdot [0 + a - 0] + \end{aligned} \quad (30)$$

$$+ \beta_2 [\dot{z}(t) + a\dot{\varphi}(t)] \cdot [0 + a] = (\beta_1 + \beta_2) a \dot{z}(t) + (\beta_1 + \beta_2) a^2 \dot{\varphi}(t) - \beta_1 a \eta(t);$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = c_1 [z(t) - b\varphi(t)] \cdot (1 - 0) + c_2 [z(t)] \cdot 1 = (c_1 + c_2) z(t) - c_1 b \varphi(t); \quad (31)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = c_1 [z(t) - b\varphi(t)] \cdot (0 - b) + c_2 [z(t)] \cdot 0 = -c_1 b z(t) + c_1 b^2 \varphi(t). \quad (32)$$

Результаты, полученные путем дифференцирования по координате  $z$  или ее скорости, будут слагаемыми в левой части первого уравнения системы (36), по  $\varphi$  – соответственно второго. Определим обобщенные силы для каждой координаты. Для этого будем поочередно задавать малое (возможное) перемещение по каждой координате, в то же время вторую координату приравнивая к нулю, и суммировать работу всех сил и моментов сил, действующих на систему:

$$\delta \varphi = 0; \quad \delta A_{Q_z} = Q_z \delta z = 0 \cdot \delta z + M(t) \delta \varphi = 0; \quad (33)$$

$$\delta z = 0; \quad \delta A_{Q_\varphi} = Q_\varphi \delta \varphi = 0 \cdot \delta z + M(t) \delta \varphi = M(t) \delta \varphi. \quad (34)$$

Из выражения (33) следует, что в первом уравнении обобщенная сила будет равна нулю, поскольку момент силы не совершает работу на линейном перемещении, а активных сил, приложенных к системе, нет. Из формулы (34) можно определить обобщенный момент сил, который будет в правой части второго уравнения системы (36) (это уравнение моментов сил):

$$Q_\varphi = M(t). \quad (35)$$

Итак, подставив полученные результаты в уравнение Лагранжа второго рода, получим систему дифференциальных уравнений динамики системы:

$$\begin{cases} m\ddot{z} + (\beta_1 + \beta_2) \dot{z}(t) + (\beta_1 + \beta_2) a \dot{\varphi}(t) - \beta_1 \dot{\eta}(t) + (c_1 + c_2) z(t) - c_1 b \varphi(t) = 0; \\ J\ddot{\varphi} + (\beta_1 + \beta_2) a \dot{z}(t) + (\beta_1 + \beta_2) a^2 \dot{\varphi}(t) - \beta_1 a \dot{\eta}(t) - c_1 b z(t) + c_1 b^2 \varphi(t) = M(t). \end{cases} \quad (36)$$

В полученной системе (36) кинематическое воздействие  $\eta(t)$ , как и момент, является входным сигналом, поэтому перенесем его в правую часть уравнений системы (36) и преобразуем их:

$$\begin{cases} m\ddot{z} + (\beta_1 + \beta_2)\dot{z}(t) + (c_1 + c_2)z(t) + (\beta_1 + \beta_2)a\dot{\varphi}(t) - c_1b\varphi(t) = \beta_1\dot{\eta}(t); \\ J\ddot{\varphi} + (\beta_1 + \beta_2)a^2\dot{\varphi}(t) + c_1b^2\varphi(t) + (\beta_1 + \beta_2)az(t) - c_1bz(t) = M(t) + \beta_1a\dot{\eta}(t). \end{cases} \quad (37)$$

Чтобы найти передаточные функции для обобщенных координат, преобразуем уравнения системы (37) по Лапласу и вынесем изображения обобщенных координат как общие множители:

$$\begin{cases} [ms^2 + (\beta_1 + \beta_2)s + (c_1 + c_2)]Z(s) + [(\beta_1 + \beta_2)as - c_1b]\Phi(s) = \beta_1Hs(s); \\ [(\beta_1 + \beta_2)as - c_1b]Z(s) + [Js^2 + (\beta_1 + \beta_2)a^2s + c_1b^2]\Phi(s) = M(s) + \beta_1aHs(s). \end{cases} \quad (38)$$

Так как нам необходимо определить передаточные функции по кинематическому воздействию  $\eta(t)$ , то следует принять  $M(t) = 0$ . Далее ход решения аналогичен рассмотренному в примере 1. Отличие заключается в том, что в текущей задаче уравнений и неизвестных сигналов всего два. Итак, составим матричное уравнение для исходной СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} ms^2 + (\beta_1 + \beta_2)s + (c_1 + c_2) & (\beta_1 + \beta_2)as - c_1b \\ (\beta_1 + \beta_2)as - c_1b & Js^2 + (\beta_1 + \beta_2)a^2s + c_1b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z(s) \\ \Phi(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1sH(s) \\ \beta_1asH(s) \end{pmatrix} \quad (39)$$

или

$$A(s)\vec{Z}(s) = \vec{B}(s). \quad (40)$$

Решением уравнения (40) относительно обобщенных координат будут следующие выражения:

$$Z(s) = \frac{|A_B^{(1)}(s)|}{|A(s)|}; \quad (41)$$

$$\Phi(s) = \frac{|A_B^{(2)}(s)|}{|A(s)|}, \quad (42)$$

т. е. определители знаменателя для обеих координат, как и в прошлой задаче, одинаковы:

$$\begin{aligned} A(s) &= [ms^2 + (\beta_1 + \beta_2)s + (c_1 + c_2)][Js^2 + (\beta_1 + \beta_2)a^2s + c_1b^2] - \\ &\quad - [(\beta_1 + \beta_2)as - c_1b]^2 = a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0, \end{aligned} \quad (43)$$

где  $a_4 = mJ$ ;  $a_3 = (\beta_1 + \beta_2)(J + ma^2)$ ;  $a_2 = mc_1b^2 + J(c_1 + c_2)$ ;

$$a_1 = (\beta_1 + \beta_2)(c_1b^2 + ac_1b + (c_1 + c_2)a^2); \quad a_0 = c_2c_1b^2.$$

Полиномы числителя определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} |A_B^{(1)}(s)| &= \beta_1 s H(s) [Js^2 + (\beta_1 + \beta_2)a^2s + c_1b^2] - \\ &- \beta_1 as H(s) [(\beta_1 + \beta_2)as - c_1b] = s(b_3^z s^2 + b_1^z) H(s), \end{aligned} \quad (44)$$

где  $b_3^z = J\beta_1$ ;  $b_1^z = \beta_1 c_1 b(b+a)$ ;

$$\begin{aligned} |A_B^{(2)}(s)| &= \beta_1 as H(s) [ms^2 + (\beta_1 + \beta_2)s + (c_1 + c_2)] - \\ &- \beta_1 s H(s) [(\beta_1 + \beta_2)as - c_1b] = s(b_3^\varphi s^2 + b_1^\varphi) H(s), \end{aligned} \quad (45)$$

где  $b_3^\varphi = m\beta_1 a$ ;  $b_1^\varphi = \beta_1 (a(c_1 + c_2) + c_1 b)$ .

Подставляя полученные выражения (43) – (45) в формулы (41) и (42), получим решение относительно обобщенных координат в операторной форме, после чего можно определить искомые передаточные функции системы:

$$W_{z/\eta}(s) = \frac{Z(s)}{H(s)} = \frac{s(b_3^z s^2 + b_1^z)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}; \quad (46)$$

$$W_{\varphi/\eta}(s) = \frac{\Phi(s)}{H(s)} = \frac{s(b_3^\varphi s^2 + b_1^\varphi)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}. \quad (47)$$