

## Лабораторная работа №6

### "Численное дифференцирование и интегрирование".

#### Задача 1.

Используя пакет **MathCad**, вычислить значение первой и второй производных функции  $f(x)$  в середине заданного отрезка  $[a, b]$  с помощью полинома Лагранжа с точностью не менее  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Построить графики погрешностей.

#### Порядок выполнения задачи 1:

1. Задать исходную функцию  $f(x)$  согласно номеру варианта. Выбрать степень полинома Лагранжа  $n = 2$ . Разбить заданный отрезок на  $n$  отрезков, таким образом чтобы один из концов любого из этих отрезков совпал с  $x = \frac{a+b}{2}$  серединой исходного отрезка.

2. Построить  $L(x)$  полином Лагранжа  $n$  степени.

3. С помощью **MathCad** вычислить производную  $\frac{df(x)}{dx}$  исходной функции и  $\frac{dL(x)}{dx}$  производную полинома Лагранжа.

4. Вычислить погрешность в точке  $x = \frac{a+b}{2}$  по формуле

$$R = \left| \frac{df(x)}{dx} - \frac{dL(x)}{dx} \right|$$

5. Если  $R > \varepsilon$  увеличить  $n$  на 1 и перейти к шагу 2, иначе перейти к шагу 6.

6. Построить график погрешности  $R(x)$  на отрезке  $[a, b]$

$$R(x) = \left| \frac{df(x)}{dx} - \frac{dL(x)}{dx} \right|.$$

7. С помощью **MathCad** вычислить вторую производную  $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$  исходной функции и вторую производную  $\frac{d^2 L(x)}{dx^2}$  полинома Лагранжа степени  $m$ .

8. Вычислить погрешность в точке  $x = \frac{a+b}{2}$  по формуле

$$R2 = \left| \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \frac{d^2 L(x)}{dx^2} \right|$$

9. Если  $R2 > \varepsilon$  увеличить  $m$  на 1 построить полином степени  $m$  и перейти к шагу 7, иначе перейти к шагу 10.

10. Построить график погрешности  $R2(x)$  на отрезке  $[a, b]$

$$R2(x) = \left| \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \frac{d^2 L(x)}{dx^2} \right|.$$

### Варианты заданий.

№	Функция	интервал	№	Функция	интервал
1	$\sin(x)$	[1;2]	16	$\operatorname{tg}(x) - 1/x^2$	[2;3]
2	$\ln(x)$	[2;3]	17	$x^3 - 6$	[-2;-1]
3	$\cos(x)$	[5;6]	18	$1/(3x + 5)$	[-2;-1]
4	$\operatorname{tg}(x)$	[-1;0]	19	$x^3/(\sin(x) + 1.3)$	[0;1]
5	$x - 1/x^2$	[2;3]	20	$\sin(x) + \cos(x)$	[0;1]
6	$\sin(x) - 0.56$	[2;3]	21	$\lg(x)$	[0;1]
7	$0.4 + \lg(x)$	[5;6]	22	$(x^2 - 2)/(\ln(x) + 5)$	[0;1]
8	$\cos(x)$	[0;1]	23	$5 \sin(x)$	[0;1]
9	$\operatorname{tg}(x)$	[0.5;1.5]	24	$\lg(x)/5x$	[0.5;1]
10	$\sin(x)$	[2;3]	25	$5/(3x + 5)$	[0;1]
11	$\ln(x) - 0.34$	[2;3]	26	$\lg(x) + 1.4$	[0.5;1]
12	$\cos(x)$	[-1;0]	27	$\sin(x) - \cos(x)$	[0;1]
13	$\operatorname{tg}(x) - 1/x$	[-1;0]	28	$-0.5/(3x + 0.2)$	[0;1]
14	$x^3$	[2;3]	29	$5/\ln(x)$	[1.1;1.2]
15	$\cos(x) + 1.2$	[0;1]	30	$5 + \ln(x)$	[1.1;1.2]

### Задача 2.

Вычислить значение определенного интеграла с точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$  по формуле Симпсона. Оценить погрешность по правилу Рунге.

### Порядок выполнения задачи 2:

1. Задать исходную подинтегральную функцию  $f(x)$  согласно номеру варианта. Положить  $n = 2$ . Разбить заданный отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных отрезков длины

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

2. Рассчитать сетку  $x_i = a + ih, i = \overline{0, n}$

3. Вычислить интеграл  $I(h)$  по формуле Симпсона, с шагом  $h$ .

4. Положить  $n = 2n$ . Разбить заданный отрезок на  $n$  равных отрезков длины  $h_1 = h/2$ .

5. Рассчитать сетку  $x_i = a + ih_1, i = \overline{0, n}$

6. Вычислить интеграл  $I(h_1)$  по формуле Симпсона.

7. Вычислить погрешность по правилу Рунге

$$R = \frac{|I(h) - I(h_1)|}{15}$$

8. Сравнить погрешность  $R$  с заданной точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$  и если  $R > \frac{\varepsilon h}{b - a}$ , то положить  $I(h) = I(h_1), h_1 = h_1/2, n = 2n$  и перейти к шагу 5, иначе  $I(h_1)$  есть искомое значение интеграла.

### Варианты заданий

№	Интеграл	№	Интеграл
1	$\int_0^1 \cos(x + x^3) dx$	16	$\int_0^1 \sin(x^3) dx$
2	$\int_0^1 e^{\sin(x)} dx$	17	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin(x) dx$
3	$\int_0^1 e^{\cos(x)} dx$	18	$\int_0^1 \cos(x^3) dx$
4	$\int_0^1 1/\sqrt{1+x^2} dx$	19	$\int_1^2 \ln(x)/(x+1) dx$
5	$\int_0^1 \cos(x) e^{-x^2} dx$	20	$\int_0^1 \sin(x + x^3) dx$
6	$\int_1^2 e^{-x-1/x} dx$	21	$\int_0^1 \cosh(x^2) dx$
7	$\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{x} e^{-x^2} dx$	22	$\int_0^1 \sin(x^4 + 2x^3 + x^2) dx$
8	$\int_0^1 e^x/(1+e^{2x}) dx$	23	$\int_0^1 \arctan(x) dx$
9	$\int_0^{1.5} (2x)^3 \cos(x) dx$	24	$\int_{0.7}^{1.7} \sin(x) e^{x^2} dx$
10	$\int_{-1.5}^0 e^{-2\sin(x)} dx$	25	$\int_{-1.6}^0 (\cos(x) - x) e^{x^2} dx$
11	$\int_0^{1.6} (x + 2x^4) \cdot \sin(x^2) dx$	26	$\int_{-2}^0 \sqrt[3]{2x} (\cos(x^2) - 2) dx$
12	$\int_{-3}^0 (x^2 - 2x^3) \cos(x^2) dx$	27	$\int_{0.5}^{1.5} x^2 (\sin(\sqrt[3]{x}) - 3) dx$
13	$\int_1^4 \ln(2x + \sin(x^2)) dx$	28	$\int_0^2 4 \ln(\cos(x^3) + x^2) dx$
14	$\int_1^{2.6} \sin(1/x^2) dx$	29	$\int_1^{2.6} \sin(0.5x\sqrt{x}) dx$
15	$\int_1^{2.6} 3 \sin(0.06x^3) dx$	30	$\int_1^{2.6} \cos(1/x^2) dx$