МИНИСТЕРСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО ДЕЛАМ ГРАЖДАНСКОЙ ОБОРОНЫ, ЧРЕЗВЫЧАЙНЫМ СИТУАЦИЯМ И ЛИКВИДАЦИИ ПОСЛЕДСТВИЙ СТИХИЙНЫХ БЕДСТВИЙ

АКАДЕМИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРОТИВОПОЖАРНОЙ СЛУЖБЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Для слушателей 2-го курса ФЗО.

МОСКВА 2005 г.

МИНИСТЕРСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО ДЕЛАМ ГРАЖДАНСКОЙ ОБОРОНЫ, ЧРЕЗВЫЧАЙНЫМ СИТУАЦИЯМ И ЛИКВИДАЦИИ ПОСЛЕДСТВИЙ СТИХИЙНЫХ БЕДСТВИЙ.

Академия Государственной противопожарной службы.
С.П. Кабанов, С.М. Беляев, А.Н.Воинов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для слушателей 2-го курса ФЗО

Одобрено редакционно – издательским советом Академии ГПС МЧС России.

МОСКВА 2005 г.

Учебно-методическое пособие по высшей математике для слушателей 1-го курса ФЗО.
С.П. Кабанов, С.М. Беляев, А.Н. Воинов - М.: Академия ГПС МЧС России, 2005. – 36 с.

Рецензенты: заведующий кафедрой физики, к.ф.-м.н., профессор В.И. Слуев.

Учебно-методическое пособие предназначено для слушателей 2-го курса факультета заочного обучения. Содержит перечень всех основных понятий и формул высшей математики, методические указания по самостоятельному обучению соответствующих тем высшей математики, контрольные задания, которые должны выполнить слушатели на 2-ом курсе и примеры выполнения этих заданий.

Содержание.

Введение

Важнейшей составляющей изучения курса высшей математики на факультете заочного обучения является самостоятельная работа слушателей.

Изучение дисциплины необходимо начинать с проработки теоретического материала, используя учебную литературу, указанную в рекомендуемом списке литературы. Слушателям необходимо усвоить все те понятия, определения, выводы и формулы, которые перечислены в пособии для каждой темы.

Контроль за ходом обучения осуществляется проверкой контрольных заданий, выполняемых слушателями в течении учебного года.

1. Указания по выполнению и оформлению контрольных работ.

В течении второго года обучения слушатели ФЗО должны выполнить три контрольные работы (№4, №5, №6).

При выполнении контрольных работ необходимо следовать следующим правилам их оформления:

- каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради;
- на обложке тетради указывается номер контрольной работы, номер варианта (последняя цифра номера зачетной книжки), фамилия, имя, отчество слушателя, его звание и подробный обратный адрес;
- в контрольной работе необходимо выполнить все задачи, входящие в задания, частично выполненные контрольные работы не рецензируются;
- решение задач нужно располагать в порядке, в котором они расположены в контрольном задании, сохраняя номер задачи;
- решение задач должно быть подробным, математические преобразования должны быть снабжены теоретическими пояснениями, при необходимости – графическими схемами или таблицами;
- перед решением задачи необходимо выписать ее условие. После решения нужно привести перечень литературы, использованной для решения данной задачи;
- при получении слушателем обратно отрецензированной контрольной, он должен сделать в конце тетради работу над указанными ошибками в соответствии с замечаниями рецензента и снова отправить работу на рецензию в Академию ГПС;

- если работа выполнена правильно, она обратно не отправляется и остается на кафедре математики Академии, а на факультет заочного обучения передается квиток о зачете по данной контрольной работе;

- таблицу номеров задач, входящих в контрольные работы необходимо получить на кафедре высшей математики в Академии.

2. Методические указания по изучению разделов высшей математики, входящих в контрольную работу №4.

Для выполнения контрольной работы №4 необходимо изучить следующие разделы математического анализа.

1. Интегральное исчисление функции одной переменной.
2. Интегральное исчисление функции нескольких переменных.

При проработке учебной литературы слушатель должен усвоить следующие понятия:

1. Интегральное исчисление функции одной переменной.

- первообразная и неопределенный интеграл;
- таблица интегралов;
- интегрирование методом замены переменной;
- интегрирование по частям;
- интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен;
- интегрирование рациональных дробей;
- интегрирование некоторых классов тригонометрических функций;
- вычисление определенных интегралов, формула Ньютона-Лейбница;
- замена переменного в определенном интеграле;
- несобственные интегралы;
- приложения определенного интеграла.

2. Интегральное исчисление функции нескольких переменных.

- понятие двойного интеграла.
- вычисление двойного интеграла;
- вычисление двойного интеграла в полярной системе координат;
- приложения двойного интеграла;
- понятие тройного интеграла;
- вычисление тройного интеграла;
- вычисление тройного интеграла в цилиндрической и сферической системах координат;
- приложения тройного интеграла;
- понятие криволинейного интеграла;
- вычисление криволинейного интеграла;
- замена переменных в криволинейном интеграле.

2.1. Задания контрольной работы № 4.

251-260. Найти неопределенные интегралы. В п. а) и б) результаты проверить дифференцированием.

251. а) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x\, dx$; б) $\int arctg\sqrt{x}\ dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3 + 8}$; г) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x + 1}}$.

252. а) $\int \frac{xdx}{(x^2 + 4)^6}$; б) $\int e^x \ln(1 + 3e^x)dx$;

в) $\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 1} dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x + tg\ x}$.

253. а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^8}}$; б) $\int x3^x dx$;

в) $\int \frac{(3x - 7)\ dx}{x^3 + 4x^2 + 4x + 16}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 3} + \sqrt[3]{(x + 3)^2}}$.

254. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tg\ x + 1)}$; б) $\int \frac{x\ \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$; г) $\int \frac{x^2 + \sqrt{1 + x}}{\sqrt[3]{1 + x}} dx$.

255. а) $\int \frac{\cos 3x\ dx}{4 + \sin 3x}$; б) $\int x^2 e^{3x} dx$;

в) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$; г) $\int \frac{\cos x\ dx}{1 + \cos x}$.

256. а) $\int \frac{\sin x\ dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int x \arcsin \frac{1}{x} dx$;

в) $\int \frac{(x + 3)\ dx}{x^3 + x^2 - 2x}$; г) $\int \frac{(\sqrt[4]{x} + 1)dx}{(\sqrt{x} + 4)\sqrt[4]{x^3}}$.

257. а) $\int \frac{(x + arctg\ x)dx}{1 + x^2}$; б) $\int x \ln(x^2 + 1)dx$;

в) $\int \frac{(x^2 - 3)\ dx}{x^4 + 5x^2 + 6}$; г) $\int \frac{\sqrt{x + 5}\ dx}{1 + \sqrt[3]{x + 5}}$.

258. а) $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1 + x)} dx$; б) $\int x \sin x \cos x\ dx$;

в) $\int \frac{x^2 dx}{x^4 - 81}$; г) $\int \frac{dx}{3 \cos x + 4 \sin x}$.

259. а) $\int \frac{\sin x\ dx}{\sqrt[3]{3 + 2\cos x}}$; б) $\int x^2 \sin 4x\ dx$;

в) $\int \frac{(x^2 - x + 1)dx}{x^4 + 2x^2 - 3}$; г) $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt[6]{x} + 1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

260. а) $\int \frac{\sqrt[3]{4 + \ln x}}{x}\ dx$; б) $\int x \ln^2 x\ dx$;

в) $\int \frac{(x^3 - 6)\ dx}{x^4 + 6x^2 + 8}$; г) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 2}$.

261-270. Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с помощью формулы Симпсона, разбивая отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

261. $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 16}\ dx$.

262. $\int_{2}^{12} \sqrt{x^3 + 9}\ dx$.

263. $\int_{-3}^{7} \sqrt{x^3 + 32}\ dx$.

264. $\int_{0}^{10} \sqrt{x^3 + 5}\ dx$.

265. $\int_{-1}^{9} \sqrt{x^3 + 2}\ dx$.

266. $\int_{2}^{12} \sqrt{x^3 + 4}\ dx$.

267. $\int_{1}^{11} \sqrt{x^3 + 3}\ dx$.

268. $\int_{-3}^{7} \sqrt{x^3 + 36}\ dx$.

269. $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 8}\ dx$.

270. $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 11}\ dx$.

271-280. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

271. $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

272. $\int_{-\infty}^{-3} \frac{x\ dx}{(x^2 + 1)^2}$.

273. $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$.

274. $\int_{0}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt{1 - x^3}}$.

275. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{(x - 1)^2}$.

276. $\int_{-3}^{2} \frac{dx}{(x + 3)^2}$.

277. $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

278. $\int_{0}^{3} \frac{dx}{(x - 2)^2}$.

279. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$.

280. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

281. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y = 3x + 7$.

282. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ и осью Ox.

283. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 3(1 + \cos\varphi)$.

284. Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой $r = 4\sin 2\varphi$.

285. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

286. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной полуэллипсом $y = 3\sqrt{1 - x^2}$, параболой $x = \sqrt{1 - y}$ и осью Oy.

287. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $y = 2/(1 + x^2)$ и $y = x^2$.

288. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{(x-2)^3}$ от точки $A(2;\ 0)$ до точки $B(6;\ 8)$.

289. Вычислить длину кардиоиды $r = 3(1 - \cos\varphi)$.

290. Вычислить длину одной арки циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

291-300. Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в декартовых координатах $(a > 0)$.

291. $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2y^2$.

292. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(4x^2 + y^2)$.

293. $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^2\left(4x^2+3y^2\right)$.
294. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(3x^2+2y^2\right)$.
295. $x^4=a^2\left(3x^2-y^2\right)$.
296. $x^6=a^2\left(x^4-y^4\right)$.
297. $x^4=a^2\left(x^2-3y^2\right)$.
298. $y^6=a^2\left(y^4-x^4\right)$.
299. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(2x^2+3y^2\right)$.
300. $y^6=a^2\left(x^2+y^2\right)\left(3y^2-x^2\right)$.

301-310. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость xOy.

301. $z=0$, $z=x$, $y=0$, $y=4$, $x=\sqrt{25-y^2}$.
302. $z=0$, $z=9-y^2$, $x^2+y^2=9$.
303. $z=0$, $z=4-x-y$, $x^2+y^2=4$.
304. $z=0$, $z=y^2$, $x^2+y^2=9$.
305. $z=0$, $y+z=2$, $x^2+y^2=4$.
306. $z=0$, $4z=y^2$, $2x-y=0$, $x+y=0$.
307. $z=0$, $x^2+y^2=z$, $x^2+y^2=4$.
308. $z=0$, $z=1-y^2$, $x=y^2$, $x=2y^2+1$.
309. $z=0$, $z=1-x^2$, $y=0$, $y=3-x$.
310. $z=0$, $z=4\sqrt{y}$, $x=0$, $x+y=4$.

311. Вычислить криволинейный интеграл
$$\int\limits_L \left(x^2-y\right)dx-\left(x-y^2\right)dy$$
вдоль дуги L окружности $x=5\cos t$, $y=5\sin t$, обходя ее против хода часовой стрелки от точки $A(5;\ 0)$ до точки $B(0;\ 5)$. Сделать чертеж.

312. Вычислить криволинейный интеграл
$$\int\limits_L (x+y)\,dx-(x-y)\,dy$$
вдоль ломаной $L=OAB$, где $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 0)$, $B(4;\ 5)$. Сделать чертеж.

313. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

вдоль границы L треугольника ABC, обходя ее против хода часовой стрелки, если $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 1)$ $C(0;\ 1)$. Сделать чертеж.

314. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \left(x^2 - 2xy\right)\, dx + \left(y^2 - 2xy\right)\, dy$$

вдоль дуги L параболы $y = x^2$ от точки $A(-1;\ 1)$ до точки $B(1;\ 1)$. Сделать чертеж.

315. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \left(x^2 y - 3x\right)\, dx + \left(y^2 x + 2y\right)\, dy$$

вдоль верхней половины L эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ $(0 \le t \le \pi)$. Сделать чертеж.

316. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \left(x^2 + y\right)\, dx - \left(y^2 + x\right)\, dy$$

вдоль ломаной $L = ABC$, где $A(1;\ 2)$, $B(1;\ 5)$ $C(3;\ 5)$. Сделать чертеж.

317. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L y\ dx + \frac{x}{y}\ dy$$

вдоль дуги L кривой $y = e^{-x}$ от точки $A(0;\ 1)$ до точки $B(-1;\ e)$. Сделать чертеж.

318. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{y^2 + 1}{y}\ dx - \frac{x}{y^2}\ dy$$

вдоль отрезка $L = AB$ прямой от точки $A(1;\ 2)$ до точки $B(2;\ 4)$. Сделать чертеж.

319. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \left(xy - x^2\right)\, dx + x\ dy$$

вдоль дуги L параболы $y = 2x^2$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(1;\ 2)$. Сделать чертеж.

320. Вычислить криволинейный интеграл
$$\int\limits_L \left(x^2 - y\right) dx - \left(x - y^2\right) dy$$
вдоль дуги L кривой $y = \ln x$ от точки $A(1;\ 0)$ до точки $B(e;\ 1)$. Сделать чертеж.

2.2. Разбор типовых задач из контрольной работы №4.

Задачи 251-260.

Найти неопределенный интеграл. В пп. а) и б) проверить результаты дифференцированием.

а) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\left(x^2 + 2\right)^5}$

Данный интеграл вычисляется внесением под знак дифференциала: $u = x^2 + 2 \quad du = \left(x^2 + 2\right)'_x dx = 2xdx$, тогда

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+2\right)^5} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\left(x^2+2\right)^5} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+2\right)^5} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\int u^{-5}du = \frac{1}{2}\frac{u^{-4}}{2-4} + C =$$

$$= -\frac{1}{8}\left(x^2 + 2\right)^{-4} + C = -\frac{1}{8\left(x^2 + 2\right)^4} + C$$

Проверка: $y = -\dfrac{1}{8\left(x^2 + 2\right)^4} + C$

$y' = -\dfrac{1}{8} \cdot (-4) \cdot \left(x^2 + 2\right)^{-5} \cdot 2x = \dfrac{x}{\left(x^2 + 2\right)^5}$ - совпадает с подынтегральной функцией.

б) $\int x^2 \cos xdx$

Данный интеграл "берется" по частям: $\int udu = uv - \int vdu$:

$$\int x^2 \cos xdx = \left|\begin{array}{l} x^2 = u \\ \cos xdx = dv \\ du = 2xdx \\ v = \int \cos xdx = \sin x \end{array}\right| = x^2 \sin x - \int \left(\sin x\right) \cdot 2xdx = A$$

Последний интеграл снова вычислим "по частям":

$$\int x\sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \\ du = dx \end{array} \right| = x\cdot(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C^*$$

$$A = x^2\sin x - 2(-xcsx + \sin x) + C = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

Проверка:

$$\left(x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C\right)'_x = 2x\sin x + x^2\cos x + 2(1\cdot\cos x + x(-\sin x)) -$$
$$-2\cos x = 2x\sin x + x^2\cos x + 2\cos x - 2x\sin x - 2\cos x = x^2\cos x = x^2\cos x$$

совпадает с подынтегральной функцией.

в) $\int\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)^2}$ - это интеграл от рациональной дроби (правильной, степень числителя меньше степени знаменателя. Разложим данную рациональную дробь на сумму простейших дробей, ориентируясь на разложение знаменателя:

$$\frac{1}{x\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Преобразовав к общему знаменателю, имеем в числителе:

$$1 = A\left(x^2+1\right)^2 + (Bx+C)x\left(x^2+1\right) + (Dx+E)x$$

$$1 = A\left(x^2+1\right)^2 + Bx^2\left(x^2+1\right) + Cx\left(x^2+1\right) + Dx^2 + Ex$$

При $x = 0$ $A = 1$, так как

$$1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ 2A + B + D = 0 \\ C + E = 0 \end{cases}$$

и $A = 1$ имеем: $A = 1$; $B = -1$; $C = 0$; $D = -1$; $E = 0$.

Тогда $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} + C = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$ - данный интеграл находится с помощью подстановки:

$z = \sqrt{2x-9}$, тогда $z^2 = 2x-9$, $2x = z^2+9$, $x = \frac{1}{2}(z^2+9)$,

$dx = \frac{1}{2}\cdot 2zdz = zdz$, тогда

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \int \frac{zdz}{\frac{1}{2}(z^2+9)z} = 2\int \frac{dz}{z^2+9} = 2\int \frac{dz}{z^2+3^2} = 2\cdot\frac{1}{3}\,arctg\,\frac{z}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\,arctg\,\frac{z}{3} + C = \frac{2}{3}\,arctg\,\frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C$$

Задачи 271-280.

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

$$\int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^2} = \int_2^4 \frac{d(x-2)}{(x-2)^2} = \int_2^4 (x-2)^{-2}d(x-2) = \left.\frac{(x-2)^{-1}}{-1}\right|_2^4 = -\left.\left(\frac{1}{x-2}\right)\right|_2^4 =$$

$$= -\left(\frac{1}{4-2} - \lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}$$

Так как $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2} = +\infty$, то $\int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^2}$ - расходится.

Задач 281-290.

Найти площадь фигуры, ограниченной дугами окружностей

$r = 2a\cos\varphi$; $r = 2a\sin\varphi$; $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$; $a > 0$.

Решение. Получившаяся фигура – см. рис. 1.

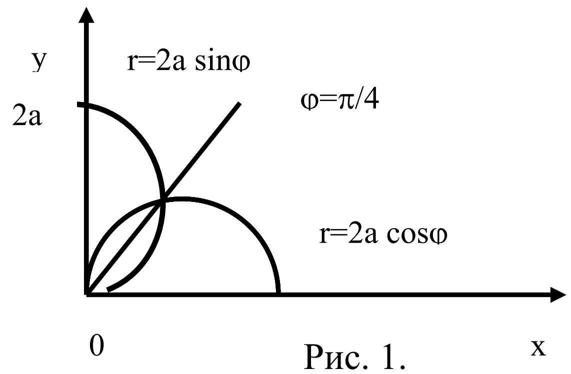

Рис. 1.

Площадь фигуры в полярных координатах:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$$

В силу симметрии найдем площадь одного сегмента и удвоим ее:

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} r^2(\varphi)d\varphi = \int_0^{\pi/4}(2a\sin\varphi)^2 d\varphi = 4a^2\int_0^{\pi/4}\sin^2\varphi d\varphi = 2a^2\int_0^{\pi/4}(1-\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= 2a^2\left(\varphi\Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4}\right) = 2a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)\right) = 2a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2$$

Задачи 291-300.

Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в декартовых координатах. $(a > 0)$.

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy$$

замена: $\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array}$

площадь $S = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi$

$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho^2$

$2a^2xy = 2a^2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi = a^2\rho^2\sin 2\varphi$

$\left(\rho^2\right)^2 = a^2\rho^2\sin 2\varphi$

$\rho^2 = a^2\sin 2\varphi$ - лемниската

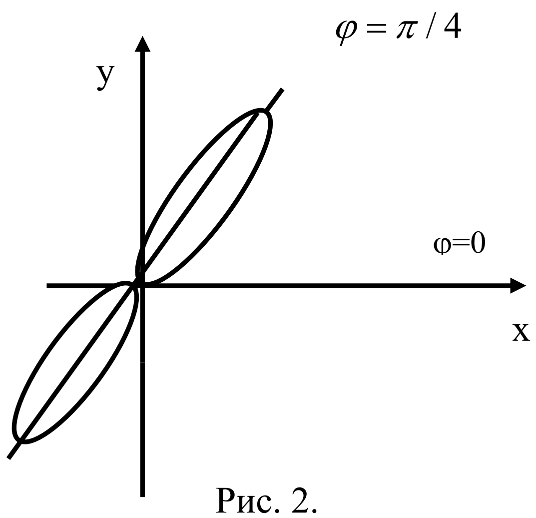

Рис. 2.

В силу симметрии вычислили площадь ¼ части фигуры S, и умножили на 4.

$$S = 4S_1 = 4\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho^2=a^2\sin 2\varphi} \rho d\rho = 4\int\limits_{0}^{\pi/4} d\varphi \cdot \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_{0}^{\rho^2=a^2\sin 2\varphi} = 2\int\limits_{0}^{\pi/4} d\varphi \cdot a^2 \sin 2\varphi =$$

$$= 2a^2\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin 2\varphi d\varphi = a^2(-\cos 2\varphi)\Big|_{0}^{\pi/4} = a^2\left(-\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)\right) = -a^2(0-1) = a^2$$

Задачи 301-310.

Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями.

$x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + z^2 = 1$

Рассмотрим восьмую часть этого тела, расположенную в 1 октанте.

Проекция данного тела на плоскость xOy будет иметь вид:

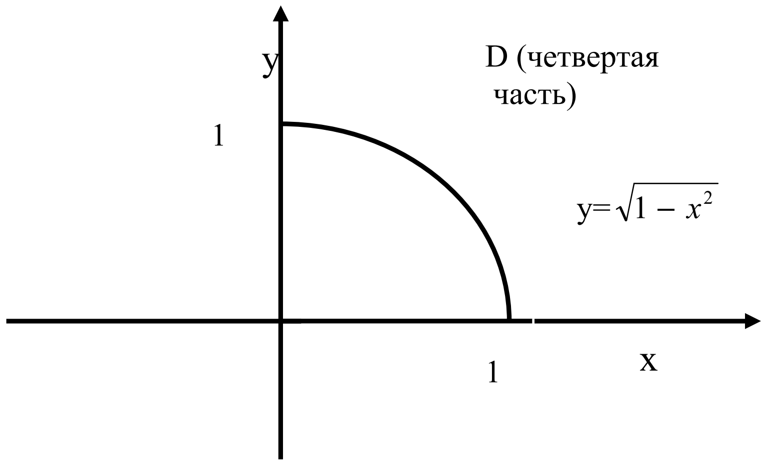

Рис. 4.

$$\frac{1}{8}V = \iiint\limits_{D_{1/8}} dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy =$$

$$= \int_0^1 dx\sqrt{1-x^2} \cdot y\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 dx\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} = \int_0^1 \left(1-x^2\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1^3}{3} = \frac{2}{3}\left(ед^3\right)$$

$$V = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}\left(ед^3\right)$$

Задачи 311-320.

Вычислить криволинейный интеграл.

$A = \int\limits_L \left(x^2 + y\right)dx - xdy$ вдоль ломаной $L = ABC$, где $A(1;2)$, $B(1;4)$, $C(3;4)$.

Сделать чертеж.

На отрезке AB $x = 1$, $dx = 0$; y изменяется от 2 до 4.

$$A_1 = \int\limits_{AB} \left(x^2 + y\right)dx - xdy = \int\limits_{y=2}^{y=4} \left(1^2 + y\right) \cdot 0 - 1dy = -\int_2^4 dy = -y\Big|_2^4 = -(4-2) = -2$$

На отрезке BC: x меняется от 1 до 3; $y = 4$; $dy = 0$.

$$A_2 = \int\limits_{BC} \left(x^2 + y\right)dx - xdy = \int_1^3 \left(x^2 + 4\right)dx - 0 = \left(\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{27}{3} + 4 \cdot 3 - \left(\frac{1^3}{3} + 4 \cdot 1\right) =$$

$$= 9 + 12 - \frac{1}{3} - 4 = 16\frac{2}{3}$$

$$A = \int\limits_L \left(x^2 + y\right)dx - xdy = A_1 + A_2 = -2 + 16\frac{2}{3} = 14\frac{2}{3}$$

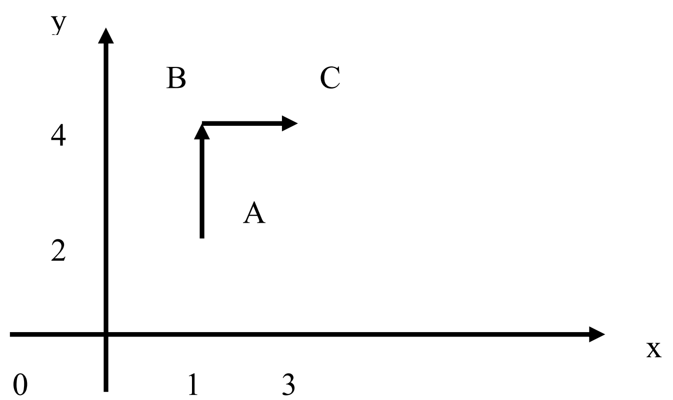

Рис. 5.

3. Методические указания по изучению разделов высшей математики, входящих в контрольную работу №5.

Перед выполнением контрольной работы №5 необходимо изучить раздел высшей математики, который посвящен решению дифференциальных уравнений.

Основные понятия входящие в эту тему:

- дифференциальные уравнения;
- общее решение дифференциальных уравнений;
- задача Коши для дифференциальных уравнений;
- дифференциальные уравнения 1 порядка с разделяющими переменными;
- однородные дифференциальные уравнения 1 порядка;
- линейные дифференциальные уравнения 1 порядка;
- уравнение Бернулли;
- уравнение второго порядка, допускающие понижения порядка;
- линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

3.1. Задания контрольной работы №5.

321-340. Найти общее решение дифференциального уравнения.

321. $\left(x^2 - y^2\right)y' = 2xy$.

322. $\left(1 + x^2\right)y' - 2xy = \left(1 + x^2\right)^2$.

323. $xy' = y \ln(y / x)$.

324. $xy' + y = 3$.

325. $xy' + xe^{y/x} - y = 0$.

326. $y' \cos x = (y + 1) \sin x$.

327. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

328. $x^2 y' - 2xy = 3$.

329. $x^2 y' + y^2 - 2xy = 0$.

330. $xy' + y = x + 1$.

331. $\left(1 - x^2\right)y'' = xy'$.

332. $2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0$.

333. $y'' + y' tg\ x = \sin 2x$.

334. $y'' + (1 / x)y' = x^2$.

335. $1 + (y')^2 + yy'' = 0$.

336. $(1 + y)y'' - 5(y')^2 = 0$.

337. $xy'' + 2y' = x^3$.

338. $y'' tg\ y = 2(y')^2$.

339. $y'' - 2y' tg\ x = \sin x$.

340. $3yy'' + (y')^2 = 0$.

341-350. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_{00}$.

341. $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
342. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$; $y(0) = 4/3$, $y'(0) = 1/27$.
343. $y'' + 4y = e^{-2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
344. $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
345. $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
346. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)\, e^{-x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
347. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
348. $y'' - 4y' = 6x^2 + 1$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.
349. $y'' - 2y' + y = 16e^{x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
350. $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

351-360. Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

351. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$

352. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y. \end{cases}$

353. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$

354. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$

355. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

356. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$

357. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$

358. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 3y. \end{cases}$

359. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y. \end{cases}$

360. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$

361. Материальная точка массой $m = 2$ погружается в жидкость, сила сопротивления которой пропорциональна скорости погружения с коэффициентом пропорциональности $k = 0{,}002$ кг/с. Найти скорость точки через 1 с после начала погружения, если в начальный момент она была равна нулю.

362. Моторная лодка двигалась в спокойной воде со скоростью $v_0 = 12$ км/ч. На полном ходу ее мотор был выключен и через 10 с скорость лодки уменьшилась до $v_1 = 6$ км/ч. Сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения лодки. Найти скорость лодки через 1 мин после остановки мотора.

363. Пуля, двигаясь со скоростью $v_0 = 400$ м/с, ударяется о достаточно толстую стену и начинает углубляться в нее, испытывая силу сопротивления стены; эта сила сообщает пуле отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату ее скорости с коэффициентом пропорциональности $k = 7$ м$^{-1}$. Найти скорость пули через 0,001 с после вхождения пули в стену.

364. Материальная точка массой $m = 1$ г движется прямолинейно. На нее действует сила в направлении движения, пропорциональная времени с коэффициентом пропорциональности $k_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ кг·м/с^3 , и сила сопротивления среды, пропорциональная скорости с коэффициентом пропорциональности $k_2 = 0{,}003$ кг/с. Найти скорость точки через 3 с после начала движения, если начальная скорость точки была равна нулю.

365. В сосуде 100 л водного раствора соли. В сосуд втекает чистая вода со скоростью $q = 5$ л/мин, а смесь вытекает с той же скоростью, причем перемешивание обеспечивает равномерную концентрацию раствора. В

начальный момент в растворе содержалось $m_0 = 10$ кг соли. Сколько соли будет содержаться в сосуде через 20 мин после начала процесса?

366. Кривая проходит через точку $A(2;\ -1)$ и обладает тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке пропорционален квадрату ординаты точки касания с коэффициентом пропорциональности $k = 3$. Найти уравнение кривой.

367. Кривая проходит через точку $A(1;\ 2)$ и обладает тем свойством, что произведение углового коэффициента касательной в любой ее точке на сумму координат точки касания равно удвоенной ординате этой точки. Найти уравнение кривой.

368. Кривая проходит через точку $A(1;\ 2)$ и обладает тем свойством, что отношение ординаты любой ее точки к абсциссе пропорционально угловому коэффициенту касательной к этой кривой, проведенной в той же точке, с коэффициентом пропорциональности $k = 3$. Найти уравнение кривой.

369. Кривая проходит через точку $A(1;\ 5)$ и обладает тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен утроенной абсциссе точки касания. Найти уравнение кривой.

370. Кривая проходит через точку $A(2;\ 4)$ и обладает тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси абсцисс касательной, проведенной в любой точке кривой, равен кубу абсциссы точки касания. Найти уравнение кривой.

3.2. Разбор типовых задач из контрольной работы №5.

Задачи 321-330.

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$\left(3y^2 + 1\right)y' = 2x$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

Решение:

$$y' = \frac{2x}{3y^2 + 1}$$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{3y^2 + 1}$ Обе части уравнения умножаем на $\left(3y^2 + 1\right)$ и на dx.

$dy \cdot \left(3y^2 + 1\right) = 2xdx$ переменные разделены, можно брать соответствующие интегралы

$$\int dy\left(3y^2 + 1\right) = \int 2xdx$$

$$y^3 + y = x^2 + C$$

$y^3 + y - x^2 = C$ - общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Задачи 331-340.

Дифференциальное уравнение: $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$. Это уравнение, допускающее понижение порядка.

Данное дифференциальное уравнение не содержит явным образом самой функции $y = f(x)$. Заменим $y' = p$, тогда $y'' = p'$, тогда уравнение:

$$xp' = p \ln \frac{p}{x}$$

$p' = \frac{p}{x} \ln\left(\frac{p}{x}\right)$- однородное уравнение 1 порядка

заменим: $\frac{p}{x} = t; \Rightarrow p = xt$, тогда $p' = xt' + t$

подставим в уравнение: $xt' + t = t \ln t$

разделяем переменные: $x \frac{dt}{dx} = t(\ln t - 1)$

$$\int \frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d(\ln t - 1)}{(\ln t - 1)} = \ln x + \ln C_1$$

$$\ln(\ln t - 1) = \ln x + \ln C_1$$

$$\ln t - 1 = C_1 x$$

$$\ln t = C_1 x + 1$$

$$t = e^{C_1 x + 1}$$

$$\frac{p}{x} = e^{C_1 x + 1}$$

$$y' = xe^{C_1 x + 1}$$

$$y = \int xe^{C_1x+1}dx = \left| \begin{array}{l} по\ \ частям \\ x = u; \quad du = dx \\ dv = e^{C_1x+1}dx \\ v = \dfrac{1}{C_1}e^{C_1x+1} \end{array} \right| = x\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1} - \int \frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{C_1}xe^{C_1x+1} - \frac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1} + C_2$$

Задачи 341-350.

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям.

$y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 2$

Составим характеристическое уравнение:

$k^2 + k - 2 = 0$

по теореме Виета:

$k_1 = 1; \; k_2 = -2 \Rightarrow$

общее решение однородного дифференциального уравнения:

$\bar{y} = C_1e^{-2x} + C_2e^x$

Так как корни 1 и –2 – действительные – нет совпадения – частное решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде:

$\tilde{y} = A\cos x + B\sin x$, тогда

$\tilde{y}' = -A\sin x + B\cos x$

$\tilde{y}'' = -A\cos x - B\sin x$

Подставим в исходное:

$(-A\cos x - B\sin x) + (-A\sin x + B\cos x) - 2(A\cos x + B\sin x) \equiv \cos x - 3\sin x$

откуда:

$(B - 3A)\cos x + (-3B - A)\sin x = \cos x - 3\sin x$

$\begin{cases} B - 3A = 1 \\ 3B + A = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = 1 + 3A \\ 3(1 + 3A) + A = 3 \end{cases}$

$A = 0; \quad B = 1,$

то есть $\tilde{y} = \sin x,$

тогда общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1e^{-2x} + C_2e^x + \sin x$

Подставим $x = 0 \quad y = 1$:

1) $C_1e^0 + C_2e^0 + \sin 0 = 1$

$y' = -2C_1e^{-2x} + C_2e^x + \cos x$ при $x = 0 \quad y' = 2$

$2 = -2C_1e^0 + C_2e^0 + \cos 0$

имеем $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ -2C_1 + (1 - C_1) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$

Итак, ответ: $y = e^x + \sin x$

Задачи 361-370.

Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в каждый момент времени его фактической стоимости. Начальная стоимость равна A_0. Найти стоимость оборудования по истечении t лет.

Пусть y - стоимость оборудования

x - время

dy - увеличение его стоимости

$-\frac{dy}{dx}$ - скорость обесценивания.

$-\frac{dy}{dx} = ky$

$\frac{dy}{dx} = -ky$

$\int \frac{dy}{y} = -\int kdx$

$\ln y = -kx + \ln C$

$y = e^{-kx + \ln C}$

$y = Ce^{-kx}$

при $x = 0 \quad y = A_0$

$A_0 = Ce^{-0}$

$C = A_0$

тогда $y = A_0e^{-kx}$, k - коэффициент пропорциональности

при $x = t$

$y(t) = A_0e^{-kt}$

Например, при $A_0 = 1000$ у.е. $\quad k = \frac{1}{4}$

$t = 10$ лет

$y(10) = 1000e^{\left(-\frac{1}{4}\cdot 10\right)} \approx 82$ у.е.

4. Методические указания по изучению разделов высшей математики, входящих в контрольную работу №6.

Перед выполнением контрольной работы №6 необходимо изучить следующие разделы высшей математики.

1. Ряды.
2. Теория вероятностей и математическая статистика.

При изучении учебной литературы слушатель должен усвоить следующие понятия.

1. Ряды.
- необходимый признак сходимости числового ряда;
- признак Даламбера;
- признак Коши;
- признак сравнений;
- интегральный признак;
- признак сходимости Лейбница знакочередующихся числовых рядов;
- смешенные ряды;
- нахождение радиуса сходимости смешенных рядов;
- ряды Фурье;
- разложение функции в ряд Фурье.
2. Теория вероятностей и математическая статистика.
- случайные события;
- вероятность случайного события;
- непосредственный подсчет вероятности в классической схеме;
- теорема сложения вероятностей;
- теорема умножения вероятностей;
- формула полной вероятности;
- понятие дискретной случайной величины;
- закон распределения дискретной случайной величины;
- вычисление математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины;
- непрерывная случайная величина;
- закон распределения непрерывной случайной величины;
- плотность распределения непрерывной случайной величины;
- вычисление математического ожидания и дисперсии непрерывной случайной величины;
- нормальный закон распределения непрерывной случайной величины;
- вероятность попадания случайной величины, подчиненной нормальному закону распределения на заданный участок.

4.1. Задания контрольной работы №6.

371-380. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

371. $u_n = \frac{n+3}{n^3-2}$.

372. $u_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

373. $u_n = \frac{1}{(2n+1)^2-1}$.

374. $u_n = \frac{3^n}{(2n)!}$.

375. $u_n = \frac{n^3}{e^n}$.

376. $u_n = \frac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^2}$.

377. $u_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$.

378. $u_n = \frac{n^2}{(3n)!}$.

379. $u_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

380. $u_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$.

381-390. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

381. $a_n = \frac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{n!}$.

382. $a_n = \frac{2^n}{n(n+1)}$.

383. $a_n = \frac{(2n)!}{n^n}$.

384. $a_n = \frac{3^n \cdot n!}{(n+1)^n}$.

385. $a_n = \frac{n}{3^n(n+1)}$.

386. $a_n = \frac{5^n}{\sqrt[n]{n}}$.

387. $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

388. $a_n = \frac{n+1}{3^n(n+2)}$.

389. $a_n = \frac{3^n}{\sqrt{2^n(3n-1)}}$.

390. $a_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$.

391-400. Вычислить определенный интеграл $\int_0^b f(x)dx$ с точностью до $0{,}001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировав его почленно.

391. $f(x) = e^{-x^3/3}$, $b = 1$.

392. $f(x) = \cos\sqrt{x}$, $b = 1$.

393. $f(x)=x\ arctg\ x$, $b=0{,}5$.

394. $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$, $b=0{,}5$.

395. $f(x)=x\ln\left(1-x^2\right)$, $b=0{,}5$.

396. $f(x)=xe^{-x}$, $b=0{,}5$.

397. $f(x)=arctg\ x^2$, $b=0{,}5$.

398. $f(x)=\sin x^2$, $b=1$.

399. $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x^2}$, $b=0{,}5$.

400. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, $b=0{,}5$.

401 - 410. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье в интервале $(a;\ b)$.

401. $f(x)=x+1$ в интервале $(-\pi;\ \pi)$.

402. $f(x)=x^2+1$ в интервале $(-2;\ 2)$.

403. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ в интервале $(-\pi;\ \pi)$.

404. $f(x)=1+|x|$ в интервале $(-1;\ 1)$.

405. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases}$ в интервале $(-\pi;\ \pi)$.

406. $f(x)=|1-x|$ в интервале $(-2;\ 2)$.

407. $f(x)=|x|$ в интервале $(-\pi;\ \pi)$.

408. $f(x)=x-1$ в интервале $(-1;\ 1)$.

409. $f(x)=x^2$ в интервале $(0;\ 2\pi)$.

410. $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$ в интервале $(-\pi;\ \pi)$.

411. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) все три вопроса; б) только два вопроса; в) только один вопрос экзаменационного билета.

412. В каждой из двух урн находятся 5 белых и 10 черных шаров. Из первой урны переложили во вторую наудачу один шар, а затем из второй урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется черным.

413. Три стрелка в одинаковых и независимых условиях произвели по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятность поражения цели

первым стрелком равна 0,9; вторым – 0,8; третьим – 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков попал в цель; б) только два стрелка попали в цель; в) все три стрелка попали в цель.

414. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 1600 испытаниях событие наступит 1200 раз.

415. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,9; второе – 0,95; третье – 0,85. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только одно устройство; б) только два устройства; в) все три устройства.

416. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,02. Найти вероятность того, что в 150 испытаниях событие наступит 5 раз.

417. В партии из 1000 изделий имеются 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди 50 изделий, взятых наудачу из этой партии, ровно три окажутся дефектными.

418. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 125 испытаниях событие наступит не менее 75 и не более 90 раз.

419. На трех станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляют 10 %, на втором – 30 %, на третьем – 60 % всех деталей. Вероятность каждой детали быть бездефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке, 0,8 – если на втором станке, и 0,9 – если на третьем станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бездефектной.

420. Два брата входят в состав двух спортивных команд, состоящих из 12 человек каждая. В двух урнах имеются по 12 билетов с номерами от 1 до 12. Члены каждой команды вынимают наудачу по одному билету из определенной урны (без возвращения). Найти вероятность того, что оба брата вытащат билет номер 6.

421-430. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

421. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ x^2, \ 0 < x \le 1; \\ 1, \ \ x > 1. \end{cases}$

422. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 1; \\ \left(x^2 - x\right) / 2, \ 1 < x \le 2; \\ 1, \ \ x > 2. \end{cases}$

423. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ x^3, \ 0 < x \le 1; \\ 1, \ \ x > 1. \end{cases}$

424. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ 3x^2 + 2x, \ 0 < x \le 1/3; \\ 1, \ \ x > 1/3. \end{cases}$

425. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 2; \\ x/2 - 1, \ 2 < x \le 4; \\ 1, \ \ x > 4. \end{cases}$

426. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ x^2/9, \ 0 < x \le 3; \\ 1, \ \ x > 3. \end{cases}$

427. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ x^2/4, \ 0 < x \le 2; \\ 1, \ \ x > 2. \end{cases}$

428. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le -\pi/2; \\ \cos x, \ -\pi/2 < x \le 0; \\ 1, \ \ x > 0. \end{cases}$

429. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ 2\sin x, \ 0 < x \le \pi/6; \\ 1, \ \ x > \pi/6. \end{cases}$

430. $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 3\pi/4; \\ \cos 2x, \ 3\pi/4 < x \le \pi; \\ 1, \ \ x > \pi. \end{cases}$

431-440. Известны математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал $(\alpha;\ \beta)$.

431. $a = 10,\ \ \sigma = 4,\ \ \alpha = 2,\ \ \beta = 13.$
432. $a = 10,\ \ \sigma = 4,\ \ \alpha = 2,\ \ \beta = 13.$
433. $a = 10,\ \ \sigma = 4,\ \ \alpha = 2,\ \ \beta = 13.$
434. $a = 10,\ \ \sigma = 4,\ \ \alpha = 2,\ \ \beta = 13.$
435. $a = 10,\ \ \sigma = 4,\ \ \alpha = 2,\ \ \beta = 13.$
436. $a = 10,\ \ \sigma = 4,\ \ \alpha = 2,\ \ \beta = 13.$
437. $a = 10,\ \ \sigma = 4,\ \ \alpha = 2,\ \ \beta = 13.$
438. $a = 10,\ \ \sigma = 4,\ \ \alpha = 2,\ \ \beta = 13.$
439. $a = 10,\ \ \sigma = 4,\ \ \alpha = 2,\ \ \beta = 13.$
440. $a = 10,\ \ \sigma = 4,\ \ \alpha = 2,\ \ \beta = 13.$

441-450. Задана матрица P_1 вероятностей перехода цепи Маркова из состояния $i(i = 1,\ 2)$ в состояние $j(j = 1,\ 2)$ за один шаг. Найти матрицу P_2 перехода из состояния i в состояние j за два шага.

441. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

442. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

443. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

444. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

445. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

446. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

447. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

448. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

449. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

450. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

4.2. Разбор типовых задач из контрольной работы №6.

Задачи 371-380.

Исследовать сходимость числового ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5^n}$$

Для исследования данного ряда используем признак Даламбера

$$a_n = \frac{3n}{5^n}; \quad a_{n+1} = \frac{3(n+1)}{5^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3(n+1)}{5^n \cdot 5}}{\frac{3n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{3n}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(1+\frac{1}{n}\right)}{3} = \frac{1}{5}\cdot 1 = \frac{1}{5} < 1 \text{ -}$$

- ряд сходится.

Задачи 381-390.

Найти интервал сходимости: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{n^2 \cdot 3^n}$

Интервал сходимости находим из следующего условия: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| < 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^{2(n+1)} \cdot n^2 \cdot 3^n}{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}(x+2)^{2n}}\right| = \frac{(x+2)^2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{(x+2)^2}{3} < 1$$

$(x+2)^2 < 3$ Находим интервал сходимости из условия $\frac{(x+2)^2}{3} < 1$.

$-\sqrt{3} < x+2 < \sqrt{3}$

$-\sqrt{3}-2 < x < \sqrt{3}-2$

$x \in \left(-\sqrt{3}-2; \sqrt{3}-2\right)$ - интервал сходимости.

На границе области: $|x+2| = \sqrt{3}$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{n^2 \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится по интегральному признаку Коши.

Ответ: $x \in \left[-\sqrt{3}-2; \sqrt{3}-2\right]$.

Задачи 391-400.

Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд: $\int_0^1 \sin\sqrt{x}dx$.

Так как $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$

$$\sin\sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{6} + \frac{\left(\sqrt{x}\right)^5}{120} - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^7}{5040} + \dots,$$

$$\int_0^1 \sin\sqrt{x}dx \approx \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{120}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5040}x^{\frac{7}{2}} \right)dx =$$

то

$$= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{1}{120}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{1}{5040}\frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + \right)\Bigg|_0^1 \approx \frac{2}{3} - \frac{2}{5\cdot 6} + \frac{2}{7\cdot 120} - \frac{2}{5040\cdot 9} + \dots$$

т.к. четвертое слагаемое меньше 0,001, то можно отбросить все члены ряда, начиная с четвертого и ошибка не будет превышать 0,001

тогда $\int_0^1 \sin\sqrt{x}dx \approx 0{,}602$.

Задачи 401-410.

Разложить данную функцию в ряд Фурье в интервале:

$$f(x) = x^2; \quad x \in (-1;1)$$

Функция четная, так что доопределим ее, как показано на рисунке:

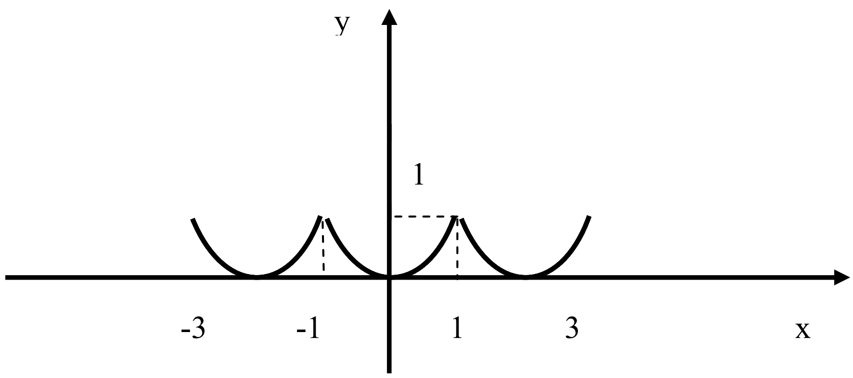

Рис. 6.

Представим функцию в виде ряда Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \text{ где } l = 1.$$

Тогда $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = 2\int_0^1 x^2dx = 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

$$a_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = 2\int_0^1 x^2 \cos m\pi x dx$$

$b_m = 0$, так как $f(x)$ - четная

интегрируем "по частям":

$u = x^2$

$dv = \cos m\pi x dx$

$du = 2xdx$

$v = \int \cos m\pi x dx = \frac{1}{\pi m}\sin m\pi x$

$a_m = \frac{2x^2}{m\pi}\sin m\pi x\Big|_0^1 - \frac{4}{m\pi}\int_0^l x\sin m\pi x dx = -\frac{4}{m\pi}\int_0^1 x\sin m\pi x dx$ - опять "по частям":

$u = x$

$dv = \sin m\pi x dx$

$du = dx$

$v = \int \sin m\pi x dx = -\frac{1}{m\pi}\cos m\pi x$

$a_m = \frac{4x}{m^2\pi^2}\cos m\pi x\Big|_0^1 - \frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^1 \cos m\pi x dx = \frac{4}{m^2\pi^2}(-1)^m$

Ответ: $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}\cos m\pi x$

Задачи 411-420.

Студент знает только 20 вопросов из 30 необходимых. Найти вероятность того, что из трех вопросов, которые содержатся в каждом экзаменационном билете, студент:

1) знает все три вопроса;
2) только два вопроса;
3) только один вопрос.

Решение. Данная задача – на повторные испытания по схеме Бернулли: вероятность наступления события в единичном испытании

$p = \frac{m}{n} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$P(x = m \text{ раз из } n) = C_n^m p^m q^{n-m}$ $\qquad q = 1 - p = \frac{1}{3}$ вероятность противоположного события.

1) $P(x = 3) = C_3^3 p^3 q^0 = p^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

2) $P(x = m = 2 \text{ из } n = 3) = C_3^2 p^2 q^{3-2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

3) $P(x = m = 1 \text{ из } n = 3) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

Задачи 421-430.

Случайная величина X задана функцией распределения $F(X)$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

$$F(X) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ x \text{ при } 0 < x \le 1 \\ 1 \text{ при } x > 1 \end{cases}$$

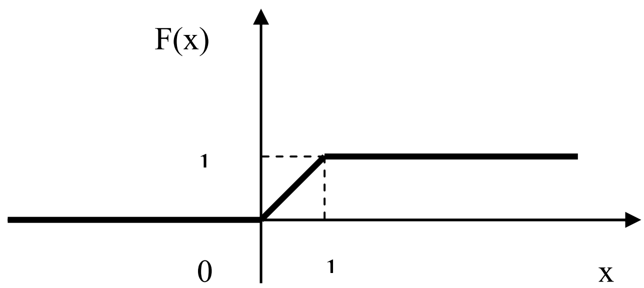

Рис. 7.

Найдем плотность распределения

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ 1 \text{ при } 0 < x \le 1 \\ 0 \text{ при } x > 1 \end{cases}$$

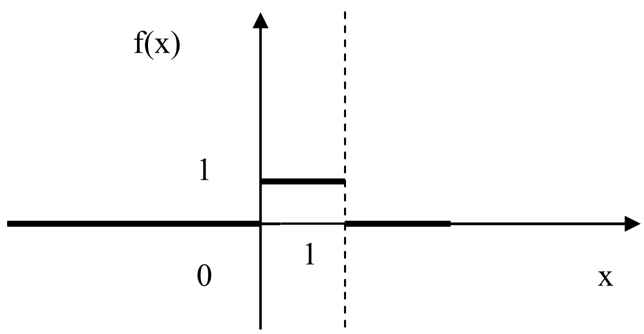

Рис. 8.

Математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Дисперсия

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - M(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Задачи 431-440.

Найти вероятность показания случайной величины X в заданный интервал $(\alpha; \beta)$, если дано математическое ожидание случайной величины a и среднее квадратическое отклонение σ.

Искомая вероятность:

$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ - функция Лапласа.

Дано: $a = 30$; $\sigma = 10$; $\alpha = 10$; $\beta = 50$.

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50 - 30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 30}{10}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2)$$

Так как $\Phi(-a) = -\Phi(a)$, то $P(10 < x < 50) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544$

Ответ: $P = 0{,}9544$

Внимание! В математической литературе существуют близкие друг другу функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ (1) и $\Phi^*(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$ (2), и приводятся таблицы и (1) и (2).

Если в Вашем распоряжении таблицы функции (2): $\Phi^*(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$, то тогда $P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{2}\left(\Phi^*\left(\frac{\beta - a}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha - a}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$

Список литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Любое издание.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Любое издание.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Любое издание.
4. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Любое издание.