2. Симметричная каноническая форма

Пара взаимно двойственных задач линейного программирования в симметричной канонической форме (2.1)-(2.2) имеют следующую математическую запись:

$$(2.1)\begin{cases} x_j \ge 0, \quad j = 1,...,n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i = 1,...,m \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \end{cases} \qquad (2.2)\begin{cases} y_i \ge 0, \quad i = 1,...,m \\ \sum\limits_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \ge c_j, \quad j = 1,...,n \\ \sum\limits_{i=1}^{m} y_i b_i \to \min \end{cases}$$

Функция

$$f(x) = \langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

называется целевой функцией задачи (2.1). Функция

$$g(y) = \langle y, b \rangle = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$

называется целевой функцией задачи (2.2).

Множество допустимых планов в задаче (2.1) является выпуклым многогранником в пространстве R^n. Обозначим его K_1:

$$K_1 = \left\{ x = (x_1,...,x_n) \middle| x_j \ge 0, \quad j = 1,...,n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i = 1,...,m \right\}.$$

Множество допустимых оценок в задаче (2.2) является выпуклым многогранником в пространстве R^m. Обозначим его K_2:

$$K_2 = \left\{ y = (y_1,...,y_m) \middle| y_i \ge 0, \quad i = 1,...,m, \quad \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \ge c_j, \quad j = 1,...,n \right\}.$$

Введем следующие обозначения:

$x = (x_1,...,x_n)$ - n-мерный вектор-столбец;

$c = (c_1,...,c_n)$ - n-мерный вектор-строку;

$y = (y_1,...,y_m)$ - m-мерный вектор-строку;

$b = (b_1,...,b_m)$ - m-мерный вектор-столбец;

$A = (a_{ij}), \quad i = 1,...,m; \quad j = 1,...,n$ - матрица технологических коэффициентов;

$A^j = \left(a_{1j},...,a_{mj}\right)$ - m-мерный вектор-столбец (j -й столбец матрицы A);

$A_i = \left(a_{i1},...,a_{in}\right)$ - n-мерный вектор-строка (i -я строка матрицы A).

Из свойства (1.6) следует, что если $x^* = \left(x_1^*,...,x_n^*\right)$ - оптимальный план задачи (2.1), то $K_1 \cap L^-\left(x^*,c\right) = \emptyset$ или $K_1 \subseteq L^+\left(x^*,c\right) \cup H\left(x^*,c\right)$. Действительно, если $K_1 \cap L^-\left(x^*,c\right) \neq \emptyset$, то найдется $\tilde{x} \in K_1 \cap L^-\left(x^*,c\right)$. Тогда, по свойству (1.7), имеем $f\left(\tilde{x}\right) < f\left(x^*\right)$. Следовательно, $x^* = \left(x_1^*,...,x_n^*\right)$ не является оптимальным решением задачи (2.1).

Из свойства (1.5) следует, что если $y^* = \left(y_1^*,...,y_m^*\right)$ - оптимальные оценки ресурсов в задаче (2.2), то $K_2 \cap L^+\left(y^*,b\right) = \emptyset$ или $K_2 \subseteq L^-\left(y^*,b\right) \cup H\left(y^*,b\right)$. Действительно, если $K_2 \cap L^+\left(y^*,b\right) \neq \emptyset$, то найдется $\tilde{y} \in K_2 \cap L^+\left(y^*,b\right)$. Тогда по свойству (1.6) имеем $g\left(\tilde{y}\right) > g\left(y^*\right)$. Следовательно, $y^* = \left(y_1^*,...,y_m^*\right)$ не является оптимальным решением задачи (2.2).

Из проведенных рассуждений вытекает следующее свойство оптимальных решений задач (2.1)-(2.2).

Свойство оптимальных решений задач линейного программирования (2.1)-(2.2).

Оптимальные решения задачи (2.1) лежат на границе множества K_1, оптимальные решения задачи (2.2) лежат на границе множества K_2 .

Экономическая интерпретация задач линейного программирования (2.1) и (2.2)

Опишем математическую модель производственного процесса, которая приводит к паре взаимно двойственных задач линейного программирования в симметричной канонической форме (2.1)-(2.2).

Пусть в производственном процессе задействовано m видов ресурсов, которые расходуются на производство продуктов по n технологиям. Здесь m и n - произвольные, но заданные числа. Занумеруем все ресурсы и технологии. Индекс i будем использовать для обозначения номера ресурса, индекс j - для обозначения номера технологии, так что $i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n$. Немного упрощая постановку задачи ради облегчения первоначального понимания, будем предполагать, что по разным технологиям производятся разные продукты.

Технология номер j в линейном программировании описывается m -мерным вектор-столбцом $T_j = \left(a_{1j},\ldots,a_{ij},\ldots,a_{mj}\right)$, в котором i -я компонента a_{ij} представляет собой количество i -го ресурса, необходимое для производства единицы j -го продукта. Одной из основных гипотез линейного программирования является гипотеза бесконечной делимости продукта и ресурсов. Если требуется произвести j -го продукта в количестве x_j, то расход всех ресурсов увеличивается пропорционально объему произведенного продукта, т.е. i -й ресурс расходуется в количестве: $a_{ij}x_j$.

Производственным планом или просто планом называется неотрицательный n -мерный вектор $x = \left(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n\right), \quad x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,n$, j -я компонента x_j которого определяет объем продукта, производимого по j -й технологии. Общее количество i -го ресурса, необходимое для выполнения плана x, очевидно, будет равно:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j .$$

Если на предприятии наличие i -го ресурса составляет b_i, то для того, чтобы план x можно было выполнить, необходимо выполнение неравенства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i .$$

План $x = \left(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n\right), \quad x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,n$ называется допустимым, если по каждому ресурсу выполнено неравенство:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1,\ldots,m .$$

Для оценки качества планов вводится понятие универсального измерителя экономического эффекта. С j -м продуктом связывается число c_j, определяющее количество экономического эффекта, содержащееся в единице j-го продукта. В количестве x_j содержится $c_j x_j$ экономического эффекта, а в плане $x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ экономического эффекта содержится

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

Теперь задача (2.1) интерпретируется как задача нахождения допустимого плана, обеспечивающего максимальный экономический эффект.

Экономическая интерпретация задачи (2.2) заключается в анализе эффективности производственного процесса. Вводится переменная y_i, которая называется объективно обусловленной оценкой (или просто оценкой) i-го ресурса, согласованной с универсальным измерителем экономического эффекта. При наличии введенных оценок ресурсов y_i мы можем сравнить полученный экономический эффект от производства единицы j-го продукта c_j с затратами ресурсов на его производство. Затраты ресурсов выражаются суммой:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} ,$$

а экономический эффект – числом c_j.

Вводятся следующие понятия:

Технология номер j называется неэффективной, если затраты больше результата:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} > c_j .$$

Технология номер j называется эффективной, если затраты равны результату:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} = c_j .$$

Технология номер j называется сверхэффективной, если затраты меньше результата:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} < c_j .$$

В этих терминах задача (2.2) интерпретируется как задача нахождения оценок ресурсов, при которых отсутствуют сверхэффективные технологии, и суммарная оценка задействованных ресурсов оказывается наименьшей.

Основное неравенство линейного программирования

Пусть $x = (x_1,...,x_n)$ - произвольный допустимый план задачи (2.1), $y = (y_1,...,y_m)$ - произвольные допустимые оценки задачи (2.2). Тогда справедливо неравенство:

$$(2.3)\ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le g(y) = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$

Доказательство. Так как $y = (y_1,...,y_m)$ является допустимым решением задачи (2.2), то для каждого j выполнено неравенство:

$$c_j \le \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} ,$$

а так как $x_j \ge 0$, то

$$c_j x_j \le \left(\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} x_j .$$

Суммируем полученные неравенства по j и получаем:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} x_j \right) = \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) .$$

Далее, так как $x = (x_1,...,x_n)$ является допустимым планом задачи (2.1), то для каждого i выполнено неравенство:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i ,$$

или после умножения на $y_i \ge 0$:

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \le y_i b_i .$$

Суммируем полученные неравенства по i, и получаем:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \le \sum_{i=1}^{m} y_i b_i = g(y) .$$

Основное неравенство доказано.

Признак оптимальности

Пусть $x^* = \left(x_1^*,...,x_n^*\right)$ - допустимый план задачи (2.1), $y^* = \left(y_1^*,...,y_m^*\right)$ - допустимые оценки задачи (2.2) и выполнено равенство:

$$(2.4) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i .$$

Тогда $x^* = \left(x_1^*,...,x_n^*\right)$ - оптимальное решение задачи (2.1), $y^* = \left(y_1^*,...,y_m^*\right)$ - оптимальное решение задачи (2.2).

Доказательство. Подставим в (2.4) вместо $x^* = \left(x_1^*,...,x_n^*\right)$ любой другой допустимый план задачи (2.1). По основному неравенству (2.3) будем иметь:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i ,$$

откуда следует, что $x^* = \left(x_1^*,...,x_n^*\right)$ является оптимальным решением задачи (2.1).

Теперь подставим в (2.4) вместо $y^* = \left(y_1^*,...,y_m^*\right)$ любые другие допустимые оценки. По основному неравенству (2.3) будем иметь:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \le \sum_{i=1}^{m} y_i b_i ,$$

откуда следует, что $y^* = \left(y_1^*,...,y_m^*\right)$ является оптимальным решением задачи (2.2).

Основная теорема линейного программирования

Пусть в задаче (2.1) имеется допустимый план, в задаче (2.2) имеются допустимые оценки. Тогда в задаче (2.1) имеется оптимальный план

$x^* = \left(x_1^*,...,x_n^*\right)$, в задаче (2.2) имеются оптимальные оценки $y^* = \left(y_1^*,...,y_m^*\right)$, для которых выполнено равенство (2.4).

Условия дополняющей нежесткости для пары взаимно двойственных задач линейного программирования в симметричной канонической форме (2.1)-(2.2)

Пусть $x^* = \left(x_1^*,...,x_n^*\right)$ - оптимальный план задачи (2.1), $y^* = \left(y_1^*,...,y_m^*\right)$ - оптимальные оценки задачи (2.2). Тогда:

(2.5.1) если для некоторого j имеется неравенство $x_j^* > 0$, то j-я технология в оптимальных оценках эффективна $\sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} = c_j$;

(2.5.2) если j-я технология в оптимальных оценках неэффективна $\sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} > c_j$, то $x_j^* = 0$;

(2.5.3) если для некоторого i имеется неравенство $y_i^* > 0$, то i-й ресурс в оптимальном плане используется полностью $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$;

(2.5.4) если i-й ресурс в оптимальном плане недоиспользуется $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$, то оптимальная оценка i-го ресурса равна нулю $y_i^* = 0$.

Определение. Оптимальные решения задачи (2.2) называются предельными полезностями ресурсов.

Табличная модель

Табличной моделью пары задач ЛП (2.1)-(2.2) называется следующим образом структурированный список всех коэффициентов задач (2.1)-(2.2).

$$
(2.6)\begin{cases}
\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{vmatrix} \\
\\
\\
\begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{vmatrix}
\end{cases}
$$

3. Решение задач линейного программирования графическим способом

3.1. Решение задачи линейного программирования (2.1) графическим способом

Решение задачи линейного программирования (2.1) графическим способом основано на возможности графически изобразить множество допустимых планов этой задачи. Для большинства студентов доступно графическое изображение множества K_1 только в случае $n \le 2$. Нарисовать множество K_1 в пространстве R^3 уже мало кому доступно. В пространствах размерности $n > 3$, в принципе, отсутствует наглядная интерпретация множества K_1. Поэтому принимаем, что нарисовать множество K_1 можно только в двух случаях: $n = 1$ (задача ЛП (2.1) с одним технологическим способом), и $n = 2$ (задача ЛП (2.1) с двумя технологическими способами).

Случай $n = 1$ очень простой, и его предлагается рассмотреть студентам в качестве самостоятельного упражнения.

Случай $n = 2$: задача ЛП (2.1) с двумя технологическими способами

Методику решения задачи (2.1) с двумя технологическими способами опишем на следующем примере. Рассмотрим пару взаимно двойственных задач ЛП (2.1)-(2.2) когда $n = 2$, $m = 3$, со следующей табличной моделью:

9	3		117
36	42		558
12	20		240
48	62		

Математическая запись задачи (2.1) для данной табличной модели имеет вид:

$$(3.1)\begin{cases} x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \\ 9x_1 + 3x_2 \le 117 \\ 36x_1 + 42x_2 \le 558 \\ 12x_1 + 20x_2 \le 240 \\ f(x) = 48x_1 + 62x_2 \to \max \end{cases}$$

Графически рисуем множество K_1.

1). Ограничения $x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$ задают первый квадрант координатной плоскости (точки плоскости, обе координаты которых неотрицательны).

2). Строим ограничение по первому ресурсу. Математическая запись ограничения по первому ресурсу имеет вид: $9x_1 + 3x_2 \le 117$. Объемы производства, при которых первый ресурс используется полностью, удовлетворяют равенству: $9x_1 + 3x_2 = 117$. На координатной плоскости это равенство описывает прямую линию. Нас интересует отрезок, по которому эта прямая пересекает первый квадрант, т.к. по первому условию вне первого квадранта допустимых планов нет.

Определим точку $A = (a_1; a_2)$, в которой эта прямая пересекает ось x_1. Так как точка A лежит на координатной оси x_1, то вторая координата этой точки должна быть равна нулю: $a_2 = 0$. С другой стороны, так как точка A лежит на прямой: $9x_1 + 3x_2 = 117$, то ее координаты должны удовлетворять уравнению этой прямой: $9a_1 + 3a_2 = 9a_1 + 3 \cdot 0 = 117$. Отсюда получаем: $a_1 = 117/9 = 13$. Следовательно, $A = (13;0)$.

Аналогично определим координаты точки $B = (b_1; b_2)$, в которой эта прямая пересекает ось x_2. Так как точка B лежит на координатной оси x_2, то первая координата этой точки должна быть равна нулю: $b_1 = 0$. Так как точка B лежит на прямой: $9x_1 + 3x_2 = 117$, то ее координаты должны удовлетворять уравнению этой прямой: $9b_1 + 3b_2 = 9 \cdot 0 + 3b_2 = 117$. Отсюда получаем: $b_2 = 117/3 = 39$. Следовательно, $B = (0;39)$.

Рисуем теперь отрезок с концами в точках A и B.

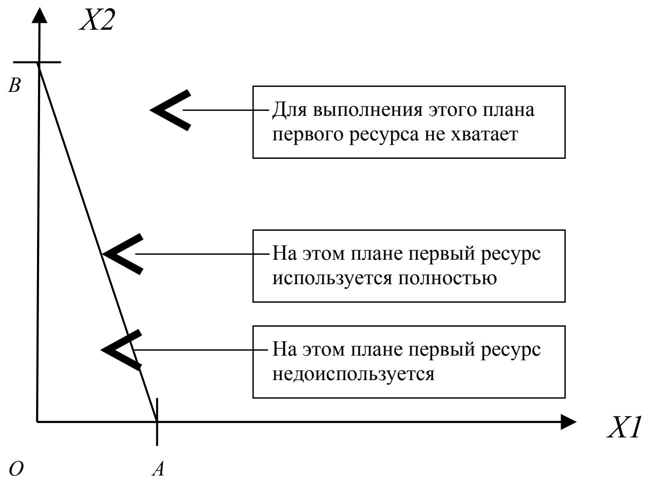

Рис. 3.1.

Точки $x = (x_1.x_2)$, лежащие на отрезке $[A;B]$, характеризуют объемы производства, при которых первый ресурс используется полностью. Если точка $x = (x_1.x_2)$ лежит внутри треугольника *OAB*, то первый ресурс при таких объемах производства недоиспользуется, т.е. выполнено неравенство $9x_1 + 3x_2 < 117$. Если точка $x = (x_1.x_2)$ лежит вне треугольника *OAB*, то первого ресурса при таких объемах производства недостаточно, т.е. выполнено неравенство: $9x_1 + 3x_2 > 117$. Убедиться в этом самостоятельно. Следовательно, вне треугольника *OAB* допустимых планов нет.

Рисуем аналогичные треугольники для второго и третьего ресурсов и накладываем их на треугольник *OAB*. В результате получаем следующую картинку.

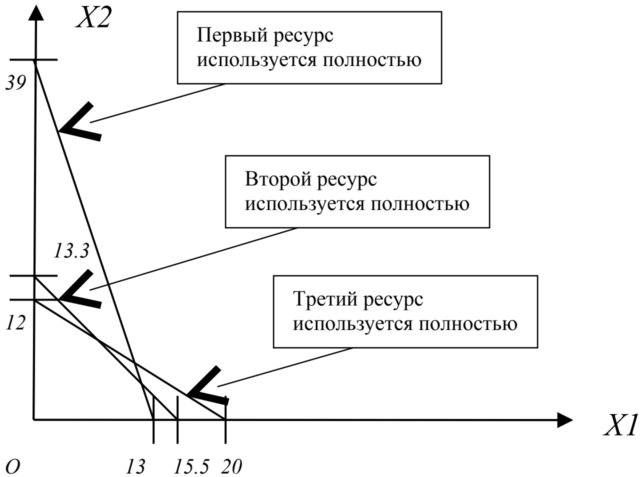

Рис. 3.2.

Общая часть всех трех построенных треугольников представляет собой заштрихованный пятиугольник: *OABCD*.

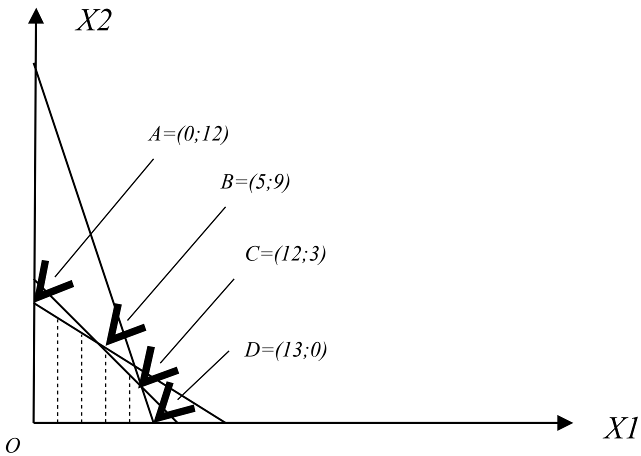

Рис. 3.3.

Координаты точек *A* и *D* мы уже знаем из предыдущих построений. Найдем координаты точек *B* и *C*. Начнем с $B=(b_1,b_2)$. Если планом производства будет вектор $B=(b_1,b_2)$, то в соответствии с рисунком 3.3

первый ресурс будет недоиспользован, а второй и третий ресурсы будут использованы полностью. Следовательно, для координат точки $B = (b_1, b_2)$ будут выполнены равенства:

$$\begin{cases} 36b_1 + 42b_2 = 558 \\ 12b_1 + 20b_2 = 240 \end{cases}$$

Решаем эту систему уравнений. Применяем метод алгебраического сложения. Для этого замечаем, что коэффициент при b_1 у второго уравнения в три раза меньше, чем у первого. Поэтому второе уравнение умножаем на 3. Получаем систему:

$$\begin{cases} 36b_1 + 42b_2 = 558 \\ 36b_1 + 60b_2 = 720 \end{cases}$$

Теперь из второго уравнения вычитаем первое. Получаем:

$$(36b_1 + 60b_2) - (36b_1 + 42b_2) = 720 - 558$$

или после приведения подобных членов:

$$18b_2 = 720 - 558 = 162$$

Следовательно, $b_2 = 162/18 = 9$. Подставляем найденное значение b_2 во второе уравнение и получаем: $12b_1 + 20 \cdot 9 = 240$, или $12b_1 + 20 \cdot 9 = 240 - 20 \cdot 9 = 240 - 180 = 60$. Окончательно теперь получаем: $b_1 = 60/12 = 5$. Система решена.

Теперь проверяем, действительно ли первый ресурс в точке B недоиспользуется. Для этого вычисляем: $9b_1 + 3b_2 = 9 \cdot 5 + 3 \cdot 9 = 72 < 117$. Действительно, первый ресурс недоиспользуется.

Аналогично находим координаты точки $C = (c_1, c_2)$. Если планом производства будет вектор $C = (c_1, c_2)$, то в соответствии с рисунком 3.3 третий ресурс будет недоиспользован, а второй и первый ресурсы будут использованы полностью. Следовательно, для координат точки $C = (c_1, c_2)$ будут выполнены равенства:

$$\begin{cases} 9c_1 + 3c_2 = 117 \\ 36c_1 + 42c_2 = 558 \end{cases}$$

Решаем эту систему уравнений. Применяем снова метод алгебраического сложения. Для этого замечаем, что коэффициент при c_1 у первого уравнения в четыре раза меньше, чем у второго. Поэтому первое уравнение умножаем на 4. Получаем систему:

$$\begin{cases} 36c_1 + 12c_2 = 468 \\ 36c_1 + 42c_2 = 558 \end{cases}$$

Теперь из второго уравнения вычитаем первое и получаем $30c_2 = 90$. Следовательно, $c_2 = 90/30 = 3$. Подставляем найденное значение c_2 в первое уравнение и получаем: $9c_1 = 117 - 9 = 108$. Окончательно теперь получаем: $c_1 = 108/9 = 12$. Система решена. Осталось проверить, действительно ли третий ресурс в точке *C* недоиспользуется. Для этого вычисляем: $12c_1 + 20c_2 = 12 \cdot 12 + 20 \cdot 3 = 204 < 240$. Действительно, третий ресурс недоиспользуется.

Оптимальным решением задачи (3.1) является одна из пяти вершин пятиугольника *OABCD*.

Чтобы окончательно решить, какая из вершин является оптимальным решением, составим следующую таблицу значений целевой функции в каждой из вершин пятиугольника:

$$f(O) = 48 \cdot 0 + 62 \cdot 0 = 0$$

$$f(A) = 48 \cdot 0 + 62 \cdot 12 = 744$$

$$f(B) = 48 \cdot 5 + 62 \cdot 9 = 798$$

$$f(C) = 48 \cdot 12 + 62 \cdot 3 = 762$$

$$f(D) = 48 \cdot 13 + 62 \cdot 0 = 624$$

Из этой таблицы выбираем ту вершину, в которой значение целевой функции наибольшее, и делаем вывод, что вершина *B* является оптимальным решением задачи (3.1).

Для нахождения оптимальных оценок ресурсов $y = (y_1, y_2, y_3)$ решаем задачу:

$$(3.2)\begin{cases} y_1 \ge 0 \quad y_2 \ge 0 \quad y_3 \ge 0 \\ 9y_1 + 36y_2 + 12y_3 \ge 48 \\ 3y_1 + 42y_2 + 20y_3 \ge 62 \\ g(y) = 117y_1 + 558y_2 + 240y_3 \to \min \end{cases}$$

двойственную в задаче (3.1).

Для решения задачи (3.2) используем условия дополняющей нежесткости (2.5).

Мы уже знаем, что оптимальным решением задачи (3.1) является вершина $B = \left(x_1^*, x_2^*\right) = (5,9)$. Вспоминаем из предыдущего анализа, что если планом является вершина *B*, то первый ресурс недоиспользуется. Следовательно, в соответствии с условием дополняющей нежесткости

(2.5.4) оптимальная оценка первого ресурса $y_1^* = 0$. Далее, из условия: $x_1^* = 5 > 0$ согласно условию дополняющей нежесткости (2.5.1) первая технология в оптимальных оценках является эффективной: $9y_1^* + 36y_2^* + 12y_3^* = 48$. Из условия: $x_2^* = 9 > 0$ согласно также условию дополняющей нежесткости (2.5.1) вторая технология в оптимальных оценках является также эффективной: $3y_1^* + 42y_2^* + 20y_3^* = 62$.

Окончательно, для нахождения оптимального решения задачи (3.2) осталось решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 9y_1^* + 36y_2^* + 12y_3^* = 48 \\ 3y_1^* + 42y_2^* + 20y_3^* = 62 \\ y_1^* = 0 \end{cases}$$

Решаем эту систему методом алгебраического сложения и получаем: $y_1^* = 0$, $y_2^* = 1$, $y_3^* = 1$. Это и есть оптимальные оценки ресурсов.

3.2. Решение задачи линейного программирования (2.2) графическим способом

Решение задачи линейного программирования (2.2) графическим способом основано на возможности графически изобразить множество допустимых оценок ресурсов этой задачи. Очевидно, для этого должно быть выполнено ограничение на количество неизвестных в задаче (2.2), а именно: $m \le 2$, т.к. нарисовать множество K_2 в пространстве R^3 уже мало кому доступно. В пространствах размерности $m > 3$, в принципе, отсутствует наглядная интерпретация множества K_2. Поэтому принимаем точно так же, как и при графическом решении задачи (2.1), что нарисовать множество K_2 можно только в двух случаях: $m = 1$ (задача ЛП (2.2) с одним ресурсом), и $m = 2$ (задача ЛП (2.1) с двумя ресурсами).

Случай $m = 1$ очень простой, и его предлагается рассмотреть студентам в качестве самостоятельного упражнения.

Случай $m = 2$: задача ЛП (2.1) с двумя ресурсами.

Методику решения задачи (2.2) с двумя ресурсами опишем на следующем примере. Рассмотрим пару взаимно двойственных задач ЛП (2.1)-(2.2) когда $n = 3$, $m = 2$, со следующей табличной моделью:

12	32	60		460
54	56	12		340
408	736	264		

Математическая запись задачи (2.2) для этой табличной модели имеет вид:

$$(3.3)\begin{cases} y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \\ 12y_1 + 54y_2 \geq 408 \\ 32y_1 + 56y_2 \geq 736 \\ 60y_1 + 12y_2 \geq 264 \\ g(y) = 460y_1 + 340y_2 \to \min \end{cases}$$

Графически рисуем множество K_2.

1). Ограничения $y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0$ задают первый квадрант координатной плоскости (точки плоскости, обе координаты которых неотрицательны).

2). Строим ограничение по запрету сверхэффективности первой технологии. Математическая запись ограничения по запрету сверхэффективности первой технологии имеет вид: $12y_1 + 54y_2 \geq 408$. Оценки ресурсов, при которых первая технология эффективна, удовлетворяют равенству: $12y_1 + 54y_2 = 408$. На координатной плоскости это равенство описывает прямую линию. Нас интересует отрезок, по которому эта прямая пересекает первый квадрант, т.к. по первому условию вне первого квадранта допустимых оценок нет.

Определим точку $A = (a_1; a_2)$, в которой эта прямая пересекает ось y_1. Так как точка A лежит на координатной оси y_1, то вторая координата этой точки должна быть равна нулю: $a_2 = 0$. С другой стороны, так как точка A лежит на прямой: $12y_1 + 54y_2 = 408$, то ее координаты должны удовлетворять уравнению этой прямой: $12a_1 + 54a_2 = 12a_1 + 54 \cdot 0 = 408$. Отсюда получаем: $a_1 = 408/12 = 34$. Следовательно, $A = (34;0)$.

Аналогично определим координаты точки $B = (b_1;b_2)$, в которой эта прямая пересекает ось y_2. Так как точка B лежит на координатной оси y_2, то первая координата этой точки должна быть равна нулю: $b_1 = 0$. Так как точка B лежит на прямой: $12y_1 + 54y_2 = 408$, то ее координаты должны удовлетворять уравнению этой прямой: $12b_1 + 54b_2 = 12 \cdot 0 + 54b_2 = 408$. Отсюда получаем: $b_2 = 408/54 = 7.56$. Следовательно, $B = (0;7.56)$.

Рисуем теперь отрезок с концами в точках A и B.

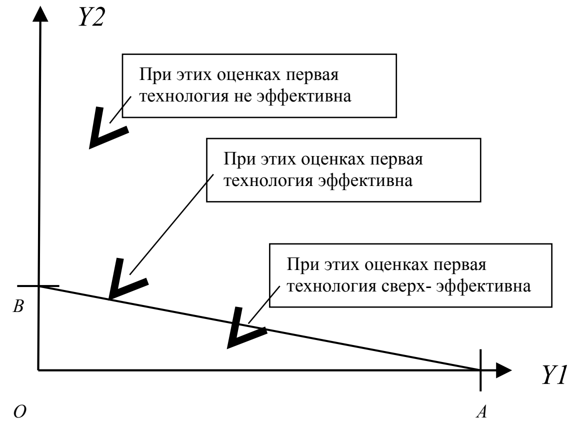

Рис. 3.4.

Точки $y = (y_1;y_2)$, лежащие на отрезке $[A;B]$, представляют собой оценки ресурсов, при которых первая технология эффективна. Если точка $y = (y_1;y_2)$ лежит внутри треугольника *OAB*, то при таких оценках первая технология сверх- эффективна, т.е. выполнено неравенство $12y_1 + 54y_2 < 408$. Если точка $y = (y_1;y_2)$ лежит вне треугольника *OAB*, то при таких оценках первая технология неэффективна, т.е. выполнено неравенство: $12y_1 + 54y_2 > 408$. Убедиться в этом самостоятельно. Следовательно, внутри треугольника *OAB* допустимых оценок нет. Все допустимые оценки лежат вне треугольника *OAB* и на отрезке $[A;B]$.

Рисуем аналогичные отрезки для второй и третьей технологий и накладываем их на треугольник *OAB*. В результате получаем следующую картинку.

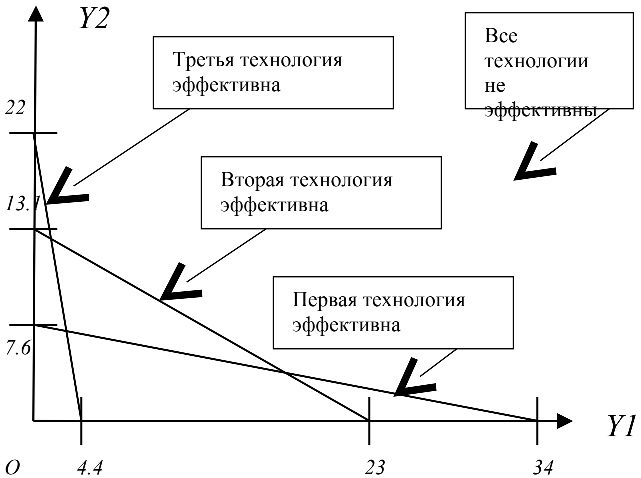

Рис. 3.5.

Рассмотрим множество G, которое является объединением точек первого квадранта, лежащих слева и снизу от какого-либо из трех построенных отрезков. Если оценки ресурсов представляются точкой множества G, то хотя бы одна технология будет в этих оценках сверх- эффективной. Следовательно, эти оценки не допустимы в задаче (3.3). Допустимыми являются только те оценки ресурсов, которые изображаются точками первого квадранта, не принадлежащими множеству G (см. заштрихованную область на рис. 3.6).

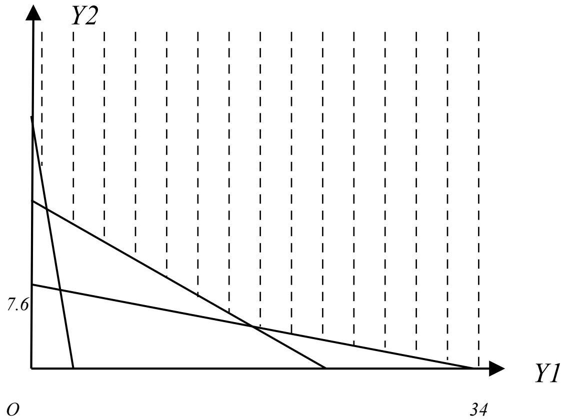

Рис. 3.6.

Заштрихованная область представляет собой пятиугольник, вершинами которого являются точки: $A = (0;22)$, $B = (2;12)$, $C = (16;4)$, $D = (34;0)$ и пятая вершина – бесконечно удаленная точка (см. рис. 3.7).

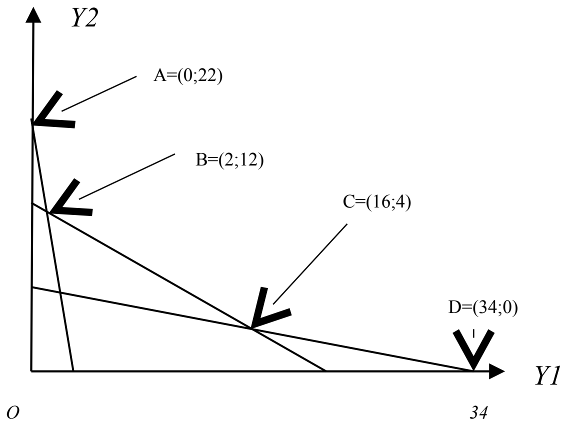

Рис. 3.7.

Координаты вершин $A = (0;22)$ и $D = (34;0)$ были найдены при построении рисунка 3.5. Координаты вершины $B = (2;12)$ находятся из условия, что в этой точке эффективными являются вторая и третья технологии, т.е. из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 32b_1 + 56b_2 = 736 \\ 60b_1 + 12b_2 = 264 \end{cases}$$

Координаты вершины $C = (16;4)$ находятся из условия, что в этой точке эффективны первая и вторая технологии, т.е. из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 12b_1 + 54b_2 = 408 \\ 32b_1 + 56b_2 = 736 \end{cases}$$

Оптимальным решением задачи (3.3) является одна из вершин: $A = (0;22)$, $B = (2;12)$, $C = (16;4)$, $D = (34;0)$.

Чтобы определить, какая именно вершина является оптимальным решением, построим следующую таблицу значений целевой функции $g(y) = 460y_1 + 340y_2$:

$$g(A) = 460 \cdot 0 + 340 \cdot 22 = 7480$$

$$g(B) = 460 \cdot 2 + 340 \cdot 12 = 5000$$

$$g(C) = 460 \cdot 16 + 340 \cdot 4 = 8720$$

$$g(D) = 460 \cdot 34 + 340 \cdot 0 = 15640$$

Выбираем ту точку, в которой значение целевой функции наименьшее. Это будет точка $B = (2;12)$, которая и будет оптимальным решением задачи (3.3). Оптимальные оценки ресурсов равны: для первого ресурса - $y_1^* = 2$, для второго ресурса - $y_2^* = 12$.

Теперь для нахождения оптимального плана $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ в задаче (2.1) решаем задачу (3.4):

$$(3.4)\begin{cases} x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \\ 12x_1 + 32x_2 + 60x_3 \le 460 \\ 54x_1 + 56x_2 + 12x_3 \le 340 \\ f(x) = 408x_1 + 736x_2 + 264x_3 \to \max \end{cases}$$

Для решения задачи (3.4) используем условия дополняющей нежесткости.

1) Во-первых, замечаем, что в оптимальных оценках $y_1^* = 2$, $y_2^* = 12$ первая технология оказывается неэффективной. Действительно, справедливо неравенство:

$$12y_1^* + 54y_2^* = 12 \cdot 2 + 54 \cdot 12 = 672 > 408 .$$

Следовательно, по условию (2.5.2) имеем $x_1^* = 0$.

2) Так как $y_1^* = 2 > 0$, то, по условию (2.5.3), первый ресурс на оптимальном плане используется полностью: $12x_1^* + 32x_2^* + 60x_3^* = 460$.

Так как $y_2^* = 12 > 0$, то, по тому же условию (2.5.3), второй ресурс на оптимальном плане используется полностью: $54x_1^* + 56x_2^* + 12x_3^* = 340$.

Таким образом, для нахождения оптимального плана $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$ надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ 12x_1^* + 32x_2^* + 60x_3^* = 460 \\ 54x_1^* + 56x_2^* + 12x_3^* = 340 \end{cases}$$

Решаем эту систему и находим: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 5$, $x_3^* = 5$.

Контрольная работа.

Выбор варианта. Каждый студент выбирает номер варианта, совпадающий с двумя последними цифрами номера зачетной книжки. Этот параметр будет первой процедурой проверки контрольной работы. Если студент выбрал вариант по другой методике, то контрольная работа проверяться не будет.

В отчете по выполнению контрольной работы должны быть представлены и описаны все шаги по нахождению оптимального плана и оптимальных оценок.

Вариант 16. .Предприятие производит два продукта: X1 и X2.
Для производства каждого продукта расходуются два ресурса: R1 и R2.
Для производства единицы продукта X1 требуется 4 единиц ресурса R1 и 9.3 единиц ресурса R2.
Для производства единицы продукта X2 требуется 9.8 единиц ресурса R1 и 3.3 единиц ресурса R2.
На предприятии имеется 139.94 единиц ресурса R1 и 157.2 единиц ресурса R2.
С каждой единицы продукта X1 предприятие получает 16.87 единиц экономического эффекта.
С каждой единицы продукта X2 предприятие получает 17.87 единиц экономического эффекта.
Ответить на следующие вопросы:
1. Найти план, выполнение которого обеспечит наибольший экономический эффект предприятию.
2. Вычислить предельную полезность каждого ресурса.