

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ Microsoft Excel"**

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков решения задач линейного программирования (ЛП) в табличном редакторе Microsoft Excel.

2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Для модели ЛП найдите оптимальное решение в табличном редакторе Microsoft Excel и продемонстрируйте его преподавателю.

3. ИНСТРУКЦИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ Microsoft Excel ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛП

Для того чтобы решить задачу ЛП в табличном редакторе Microsoft Excel, необходимо выполнить следующие действия.

1. Ввести условие задачи:

- a) *создать экранную форму для ввода условия задачи:*
 - переменных,
 - целевой функции (ЦФ),
 - ограничений,
 - граничных условий;
- b) *ввести исходные данные в экранную форму:*
 - коэффициенты ЦФ,
 - коэффициенты при переменных в ограничениях,
 - правые части ограничений;
- c) *ввести зависимости из математической модели в экранную форму:*
 - формулу для расчета ЦФ,
 - формулы для расчета значений левых частей ограничений;
- d) *здать ЦФ* (в окне "Поиск решения"):
 - целевую ячейку,
 - направление оптимизации ЦФ;
- e) *ввести ограничения и граничные условия* (в окне "Поиск решения"):
 - ячейки со значениями переменных,
 - граничные условия для допустимых значений переменных,
 - соотношения между правыми и левыми частями ограничений.

2. Решить задачу:

- a) *установить параметры решения задачи* (в окне "Поиск решения");
- b) *запустить задачу на решение* (в окне "Поиск решения");
- c) *выбрать формат вывода решения* (в окне "Результаты поиска решения").

3.1. Одноиндексные задачи ЛП

Рассмотрим пример нахождения решения для следующей одноиндексной задачи ЛП:

$$L(X) = 130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756 \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450 \\ 4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4 \leq 89 \\ x_j \geq 0; j = \overline{1,4} \end{cases} \quad (1.1)$$

3.1.1. Ввод исходных данных

Создание экранной формы и ввод в нее условия задачи

Экранная форма для ввода условий задачи (1.1) вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рис. 1.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн.гр.		0	0	0	0	ЦФ	
5							Значение	Направл.
6	Козф. ЦФ	130,5	20	56	87,8			max
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4		=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1		>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13		<=	89
13								

Рис. 1.1. Экранная форма задачи (1.1) (курсор в ячейке F6)

В экранной форме на рис. 1.1 каждой переменной и каждому коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка в Excel. Имя ячейки состоит из буквы, обозначающей столбец, и цифры, обозначающей строку, на пересечении которых находится объект задачи ЛП. Так, например, переменным задачи (1.1) соответствуют ячейки **B3** (x_1), **C3** (x_2), **D3** (x_3), **E3** (x_4), коэффициентам ЦФ соответствуют ячейки **B6** ($c_1 = 130,5$), **C6** ($c_2 = 20$), **D6** ($c_3 = 56$), **E6** ($c_4 = 87,8$), правым частям ограничений соответствуют ячейки **H10** ($b_1 = 756$), **H11** ($b_2 = 450$), **H12** ($b_3 = 89$) и т.д.

Ввод зависимостей из математической модели в экранную форму

Зависимость для ЦФ

В ячейку **F6**, в которой будет отображаться значение ЦФ, необходимо ввести **формулу**, по которой это значение будет рассчитано. Согласно (1.1) значение ЦФ определяется выражением

$$130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4 \quad (1.2)$$

Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel (см. рис. 1.1), формулу для расчета ЦФ (1.2) можно записать как **сумму произведений** каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов ЦФ (**B6, C6, D6, E6**), то есть

$$B6 \cdot B3 + C6 \cdot C3 + D6 \cdot D3 + E6 \cdot E3 \quad (1.3)$$

Чтобы задать формулу (1.3) необходимо в ячейку **F6** ввести следующее выражение и нажать клавишу **"Enter"**

$$=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B6:E6), \quad (1.4)$$

где символ \$ перед номером строки 3 означает, что при копировании этой формулы в другие места листа Excel номер строки 3 не изменится;

символ : означает, что в формуле будут использованы **все** ячейки, расположенные между ячейками, указанными слева и справа от двоеточия (например, запись **B6:E6** указывает на ячейки **B6, C6, D6 и E6**). После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение) (рис.1.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1				ПЕРЕМЕННЫЕ					
2	Имя	X1	X2	X3	X4				
3	Значение								
4	Нижн. гр.	0	0	0	0	ЦФ			
5						Значение	Направл.		
6	Козф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	0	max		
7									
8		ОГРАНИЧЕНИЯ							
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть	
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	0	=	756	
11	Огран.2	-6	2	4	-1	0	>=	450	
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	0	<=	89	
13									

Рис.1.2. Экранная форма задачи (1.1) после ввода всех необходимых формул (курсор в ячейке F6)

Примечание 1.1. Существует другой способ задания функций в Excel с помощью режима **"Вставка функций"**, который можно вызвать из меню **"Вставка"** или при нажатии кнопки f_x на стандартной панели инструментов. Так, например, формулу (1.4) можно задать следующим образом:

- курсор в поле **F6**;
- нажав кнопку f_x , вызовите окно **"Мастер функций – шаг 1 из 2"**;
- выберите в окне **"Категория"** категорию **"Математические"**;
- в окне **"Функция"** выберите функцию **СУММПРОИЗВ**;

- в появившемся окне "СУММПРОИЗВ" в строку "Массив 1" введите выражение **B\$3:E\$3**, а в строку "Массив 2" – выражение **B6:E6** (рис.1.3);
- после ввода ячеек в строки "Массив 1" и "Массив 2" в окне "СУММПРОИЗВ" появятся числовые значения введенных массивов (см. рис.1.3), а в экранной форме в ячейке **F6** появится текущее значение, вычисленное по введенной формуле, то есть 0 (так как в момент ввода формулы значения переменных задачи нулевые).

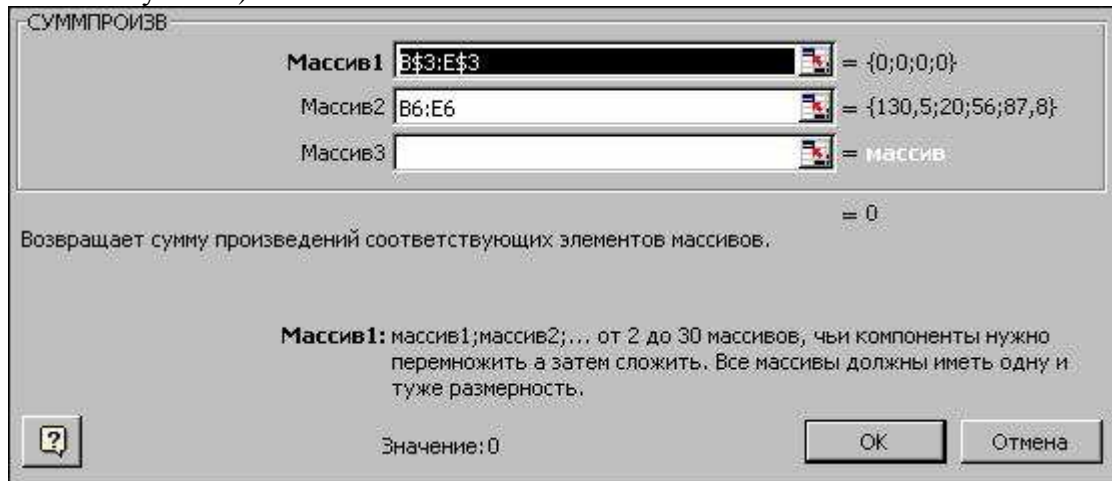


Рис. 1.3. Ввод формулы для расчета ЦФ в окно "Мастер функций"

Зависимости для левых частей ограничений

Левые части ограничений задачи (1.1) представляют собой *сумму произведений* каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (**B10, C10, D10, E10** – 1-е ограничение; **B11, C11, D11, E11** – 2-е ограничение и **B12, C12, D12, E12** – 3-е ограничение). Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в табл.1.1.

Таблица 1.1

Формулы, описывающие ограничения модели (1.1)

Левая часть ограничения	Формула Excel
$-1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$ или $B10 \cdot B3 + C10 \cdot C3 + D10 \cdot D3 + E10 \cdot E3$	=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B10:E10)
$-6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4$ или $B11 \cdot B3 + C11 \cdot C3 + D11 \cdot D3 + E11 \cdot E3$	=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B11:E11)
$4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4$ или $B12 \cdot B3 + C12 \cdot C3 + D12 \cdot D3 + E12 \cdot E3$	=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B12:E12)

Как видно из табл. 1.1, формулы, задающие левые части ограничений задачи (1.1), отличаются друг от друга и от формулы (1.4) в целевой ячейке **F6** только номером строки во втором массиве. Этот номер определяется той строкой, в которой ограничение записано в экранной форме. Поэтому для задания зависимостей для левых частей ограничений достаточно скопировать формулу из целевой ячейки в ячейки левых частей ограничений. Для этого необходимо:

- поместить курсор в поле целевой ячейки **F6** и скопировать в буфер содержимое ячейки **F6** (клавишами "Ctrl-Insert");

- помещать курсор поочередно в поля левой части каждого из ограничений, то есть в **F10**, **F11** и **F12**, и вставлять в эти поля содержимое буфера (клавишами "**Shift-Insert**") (при этом номер ячеек во втором массиве формулы будет меняться на номер той строки, в которую была произведена вставка из буфера);
- на экране в полях **F10**, **F11** и **F12** появится 0 (нулевое значение) (см. рис.1.2).

Проверка правильности введения формул

Для проверки правильности введенных формул производите поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле (рис. 1.4 и 1.5).

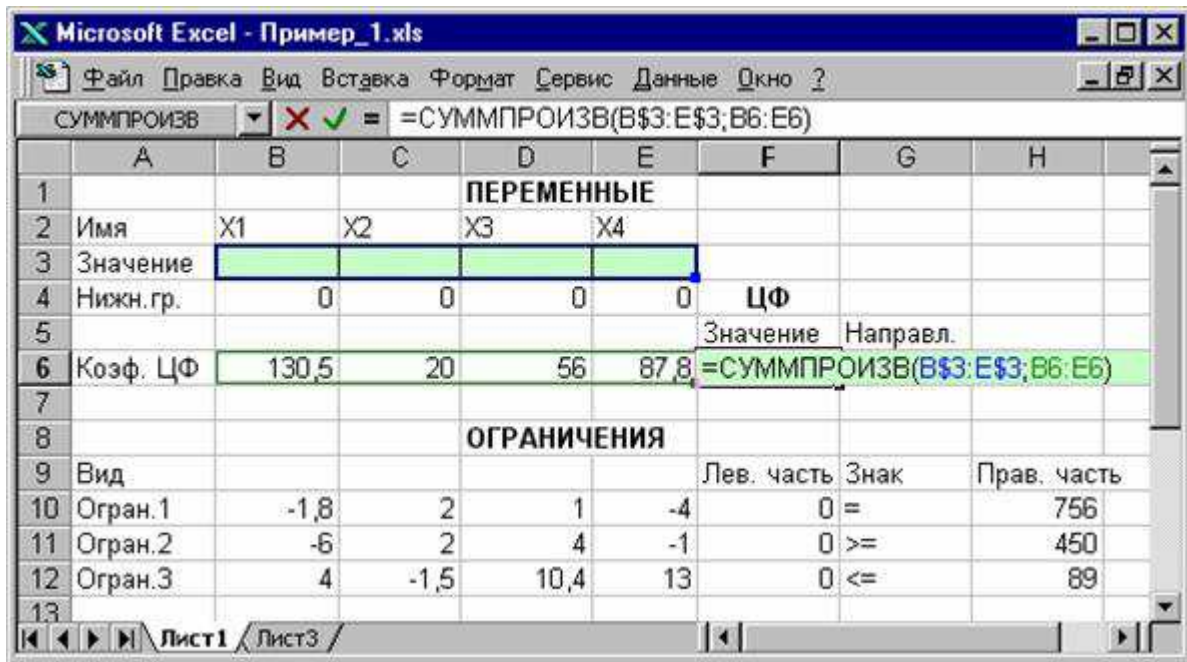


Рис. 1.4. Проверка правильности введения формулы в целевую ячейку **F6**



Рис. 1.5. Проверка правильности введения формулы в ячейку **F12** для левой части ограничения 3

Задание ЦФ

Дальнейшие действия производятся в окне "Поиск решения", которое вызывается из меню "Сервис" (рис.1.6):

- поставьте курсор в поле "Установить целевую ячейку";
- введите адрес целевой ячейки **\$F\$6** или сделайте одно нажатие левой клавиши мыши на целевую ячейку в экранной форме — это будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;
- введите направление оптимизации ЦФ, щелкнув один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке "максимальному значению".

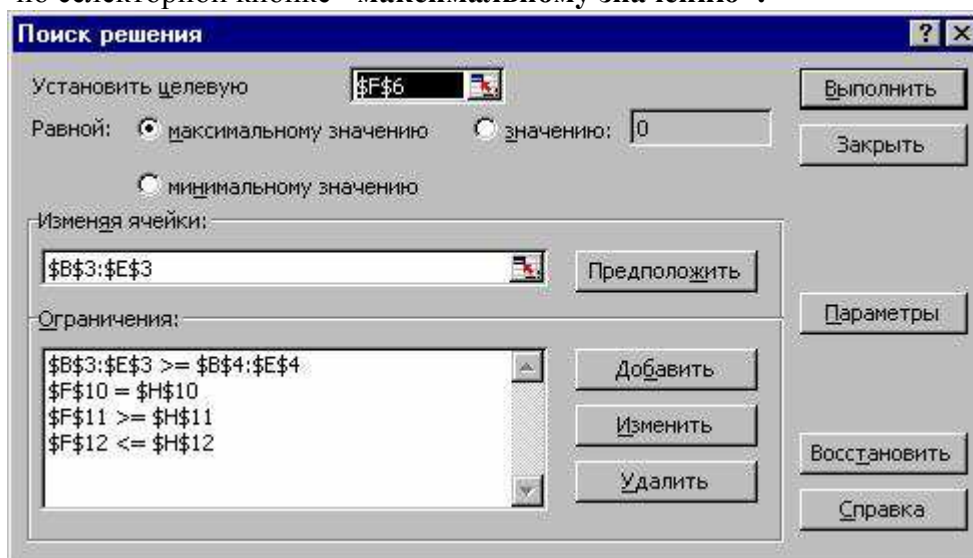


Рис. 1.6. Окно "Поиск решения" задачи (1.1)

Ввод ограничений и граничных условий Задание ячеек переменных

В окно "Поиск решения" в поле "Изменяя ячейки" впишите адреса **\$B\$3:\$E\$3**. Необходимые адреса можно вносить в поле "Изменяя ячейки" и автоматически путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

Задание граничных условий для допустимых значений переменных

В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю (см. рис.1.1).

- Нажмите кнопку "Добавить", после чего появится окно "Добавление ограничения" (рис.1.7).
- В поле "Ссылка на ячейку" введите адреса ячеек переменных **\$B\$3:\$E\$3**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме.
- В поле знака откройте список предлагаемых знаков и выберите \geq .
- В поле "Ограничение" введите адреса ячеек нижней границы значений переменных, то есть **\$B\$4:\$E\$4**. Их также можно ввести путем выделения мышью непосредственно в экранной форме.

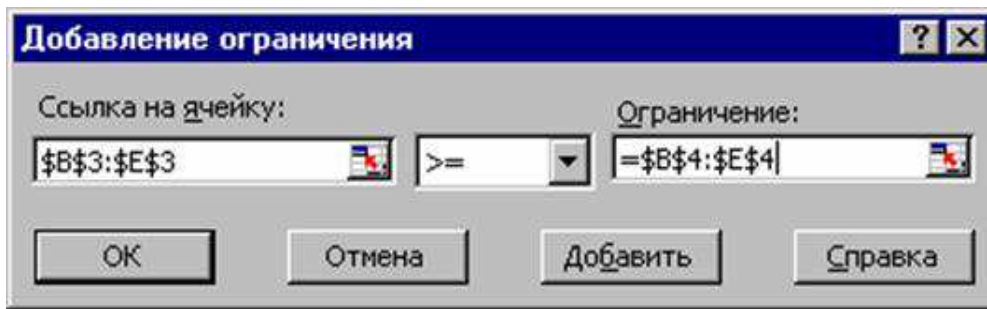


Рис. 1.7. Добавление условия неотрицательности переменных задачи (1.1)

Задание знаков ограничений \leq , \geq , =

- Нажмите кнопку "Добавить" в окне "Добавление ограничения".
- В поле "Ссылка на ячейку" введите адрес ячейки левой части конкретного ограничения, например **\$F\$10**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью нужной ячейки непосредственно в экранной форме.
- В соответствии с условием задачи (1.1) выбрать в поле знака необходимый знак, например =.
- В поле "Ограничение" введите адрес ячейки правой части рассматриваемого ограничения, например **\$H\$10**.
- Аналогично введите ограничения: **\$F\$11**>=**\$H\$11**, **\$F\$12**<=**\$H\$12**.
- Подтвердите ввод всех перечисленных выше условий нажатием кнопки **ОК**.

Окно "Поиск решения" после ввода всех необходимых данных задачи (1.1) представлено на рис.1.6.

Если при вводе условия задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений или граничных условий, то это делают, нажав кнопки "Изменить" или "Удалить" (см. рис.1.6).

3.1.2. Решение задачи

Установка параметров решения задачи

Задача запускается на решение в окне "Поиск решения". Но предварительно для установления конкретных параметров решения задач оптимизации определенного класса необходимо нажать кнопку "Параметры" и заполнить некоторые поля окна "Параметры поиска решения" (рис.1.8).

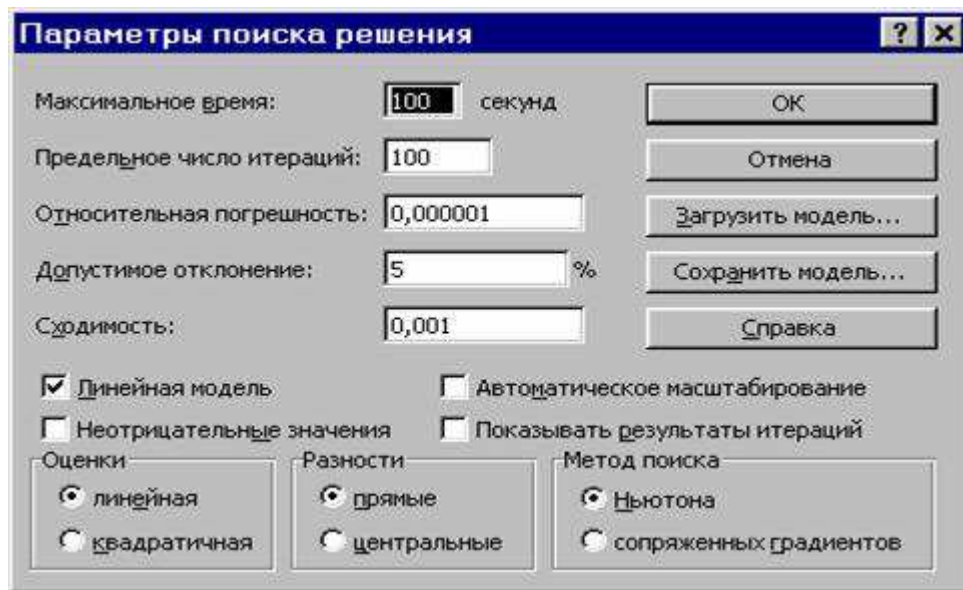


Рис. 1.8. Параметры поиска решения, подходящие для большинства задач ЛП

Параметр "**Максимальное время**" служит для назначения времени (в секундах), выделяемого на решение задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32 767 секунд (более 9 часов).

Параметр "**Предельное число итераций**" служит для управления временем решения задачи путем ограничения числа промежуточных вычислений. В поле можно ввести количество итераций, не превышающее 32 767.

Параметр "**Относительная погрешность**" служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Чем *меньше* количество десятичных знаков во введенном числе, тем *ниже* точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

Параметр "**Допустимое отклонение**" служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Параметр "**Сходимость**" применяется только при решении нелинейных задач. Установка флажка "**Линейная модель**" обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи за счет применения симплекс-метода.

Подтвердите установленные параметры нажатием кнопки "**ОК**".

Запуск задачи на решение

Запуск задачи на решение производится из окна "**Поиск решения**" путем нажатия кнопки "**Выполнить**".

После запуска на решение задачи ЛП на экране появляется окно "**Результаты поиска решения**" с одним из сообщений, представленных на рис. 1.9, 1.10 и 1.11.

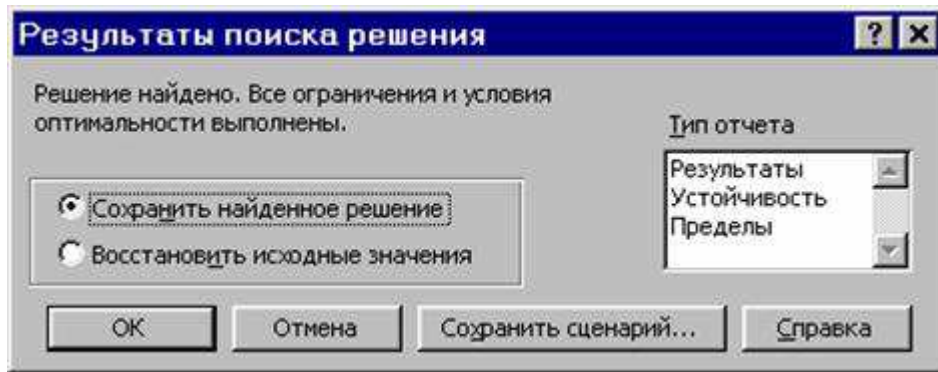


Рис. 1.9. Сообщение об успешном решении задачи

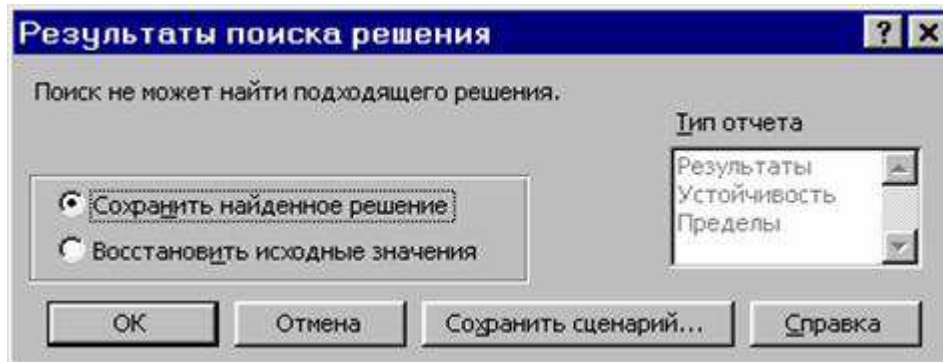


Рис. 1.10. Сообщение при несовместной системе ограничений задачи

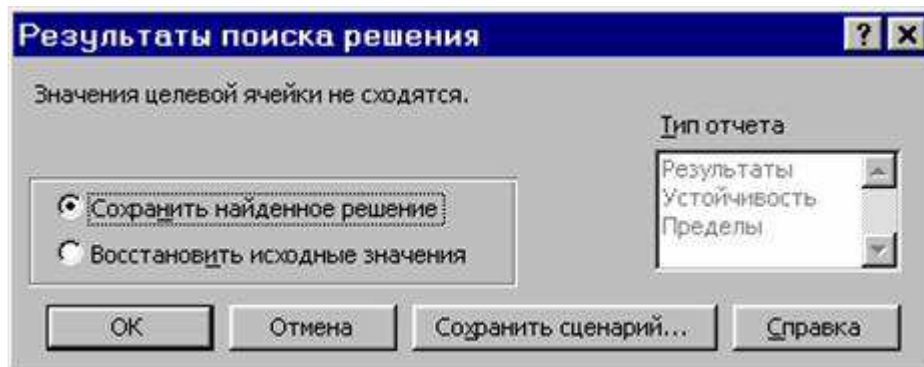


Рис. 1.11. Сообщение при неограниченности ЦФ в требуемом направлении

Иногда сообщения, представленные на рис. 1.10 и 1.11, свидетельствуют не о характере оптимального решения задачи, а о том, что при вводе условий задачи в Excel были допущены **ошибки**, не позволяющие Excel найти оптимальное решение, которое в действительности существует (см. ниже подразд.1.3.5).

Если при заполнении полей окна "**Поиск решения**" были допущены ошибки, не позволяющие Excel применить симплекс-метод для решения задачи или довести ее решение до конца, то после запуска задачи на решение на экран будет выдано соответствующее сообщение с указанием причины, по которой решение не найдено. Иногда слишком малое значение параметра "**Относительная погрешность**" не позволяет найти оптимальное решение. Для исправления этой ситуации увеличивайте погрешность поразрядно, например от 0,000001 до 0,00001 и т.д.

В окне "**Результаты поиска решения**" представлены названия трех типов отчетов: "**Результаты**", "**Устойчивость**", "**Пределы**". Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность (см. ниже подразд.3.3). Для получения же ответа (значений пе-

ременных, ЦФ и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нажмите кнопку "ОК". После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи (рис. 1.12).

Microsoft Excel - Пример_1.xls								
Ф6 = =СУММПРОИЗВ(В\$3:Е\$3;В6:Е6)								
	A	B	C	D	E	F	G	
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение	100,661	546,444	0	38,925			
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Козф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	27482,714	max	
7								
8		ОГРАНИЧЕНИЯ						
9	Вид					Лев. часть	Знак	
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	
11	Огран.2	-6	2	4	-1	450	>=	
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	89	<=	
13								

Рис. 1.12. Экранная форма задачи (1.1) после получения решения

3.2. Целочисленное программирование

Допустим, что к условию задачи (1.1) добавилось требование целочисленности значений всех переменных. В этом случае описанный выше процесс ввода условия задачи необходимо *дополнить* следующими шагами.

- В экранной форме укажите, на какие переменные накладывается требование целочисленности (этот шаг делается для наглядности восприятия условия задачи) (рис.1.13).
- В окне "Поиск решения" (меню "Сервис"→"Поиск решения"), нажмите кнопку "Добавить" и в появившемся окне "Добавление ограничений" введите ограничения следующим образом (рис.1.14):
 - в поле "Ссылка на ячейку" введите адреса ячеек переменных задачи, то есть **\$B\$3:\$E\$3**;
 - в поле ввода знака ограничения установите "целое";
 - подтвердите ввод ограничения нажатием кнопки "ОК".



Рис.1.13. Решение задачи (1.1) при условии целочисленности ее переменных

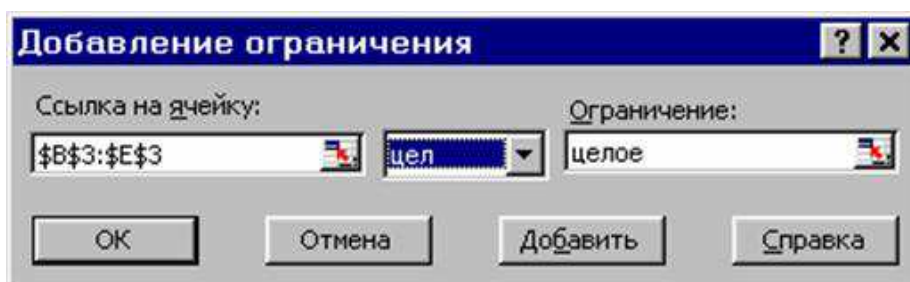


Рис.1.14. Ввод условия целочисленности переменных задачи (1.1)

На рис.1.13 представлено решение задачи (1.1), к ограничениям которой добавлено условие целочисленности значений ее переменных.

3.3. Двухиндексные задачи ЛП

Двухиндексные задачи ЛП вводятся и решаются в Excel аналогично одноиндексным задачам. Специфика ввода условия двухиндексной задачи ЛП состоит лишь в удобстве матричного задания переменных задачи и коэффициентов ЦФ.

Рассмотрим решение двухиндексной задачи, суть которой заключается в оптимальной организации транспортных перевозок штучного товара со складов в магазины (табл.1.2).

Таблица 1.2

Исходные данные транспортной задачи

Тарифы, руб./шт.	1-й магазин	2-й магазин	3-й магазин	Запасы, шт.
1-й склад	2	9	7	25
2-й склад	1	0	5	50
3-й склад	5	4	100	35
4-й склад	2	3	6	75
Потребности, шт.	45	90	50	

Целевая функция и ограничения данной задачи имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 35 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 75 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50 \\ \forall x_{ij} \geq 0, \forall x_{ij} \text{ целые} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Экранные формы, задание переменных, целевой функции, ограничений и граничных условий двухиндексной задачи (1.5) и ее решение представлены на рис.1.15, 1.16, 1.17 и в табл.1.3.

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н	И
1		ПЕРЕМЕННЫЕ					ОГРАНИЧЕНИЯ		
2		целые	x1	x2	x3	Лев. часть	Знак	Прав. часть	
3		x1j				0	=	25	
4		x2j				0	=	50	
5		x3j				0	=	35	
6		x4j				0	=	75	
7	ОГРАНИЧЕНИЯ	Лев. часть	0	0	0				
8		Знак	=	=	=				185
9		Прав. часть	45	90	50			185	БАЛАНС
10									
11		ТАРИФЫ	x1	x2	x3				
12		x1j	2	9	7				
13		x2j	1	0	5	ЦФ			
14		x3j	5	4	100	Значение	Направление		
15		x4j	2	3	6	0	min		

Рис.1.15. Экранная форма двухиндексной задачи (1.5)
(курсор в целевой ячейке F15)

Таблица 1.3

Формулы экранной формы задачи (1.5)

Объект математической модели	Выражение в Excel
Переменные задачи	C3:E6
Формула в целевой ячейке F15	=СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12:E15)
Ограничения по строкам в ячейках F3, F4, F5, F6	=СУММ(C3:E3) =СУММ(C4:E4) =СУММ(C5:E5) =СУММ(C6:E6)
Ограничения по столбцам	=СУММ(C3:C6)

Объект математической модели	Выражение в Excel
в ячейках C7, D7, E7	=СУММ(D3:D6) =СУММ(E3:E6)
Суммарные запасы и потребности в ячейках H8, G9	=СУММ(H3:H6) =СУММ(C9:E9)

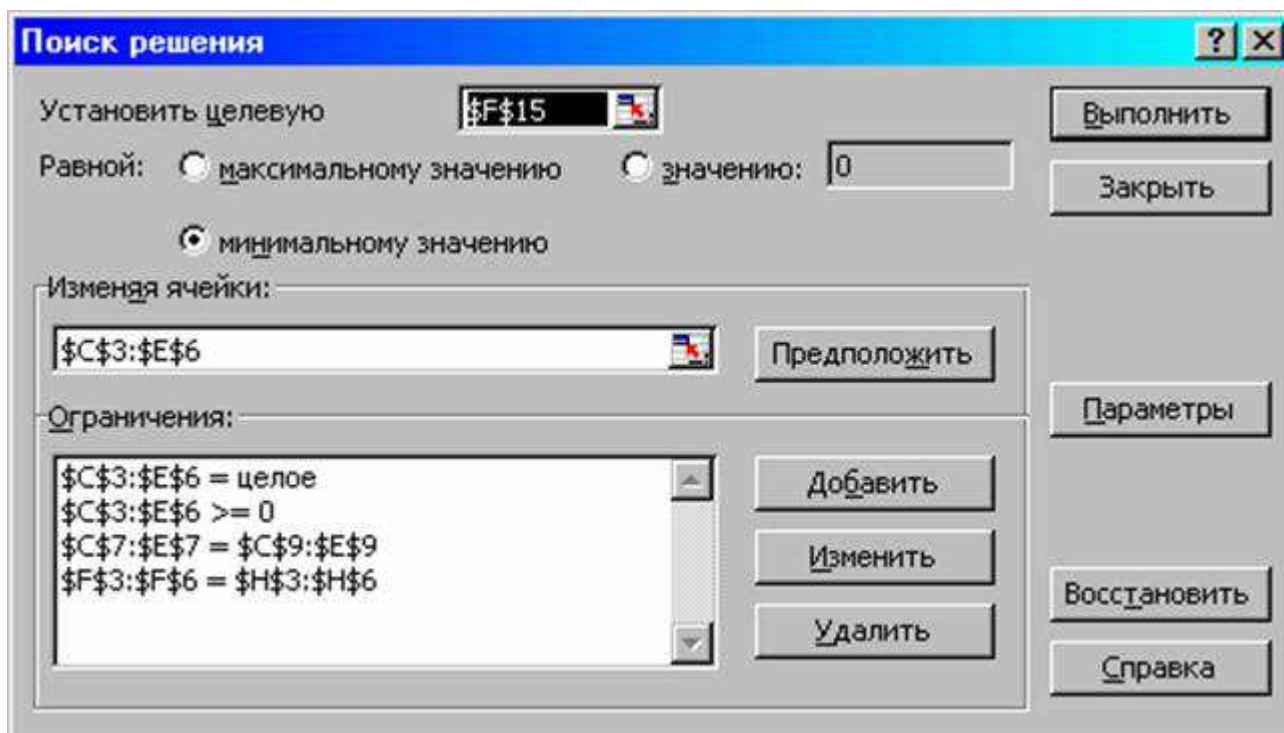


Рис. 1.16. Ограничения и граничные условия задачи (1.5)

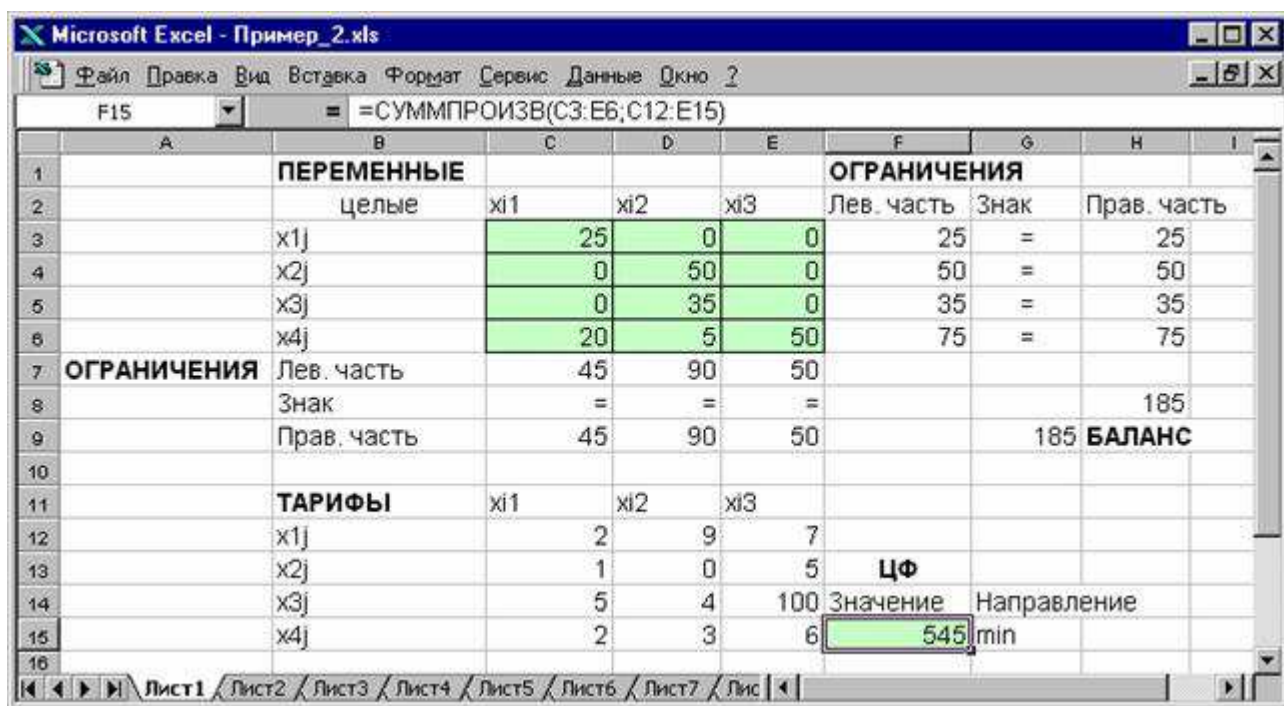


Рис.1.17. Экранная форма после получения решения задачи (1.5) (курсор в целевой ячейке F15)

3.4. Задачи с булевыми переменными

Частным случаем задач с целочисленными переменными являются задачи, в результате решения которых искомые переменные x_j могут принимать только одно из двух значений: 0 или 1. Такие переменные в честь предложившего их английского математика Джорджа Буля называют булевыми. На рис.1.18 представлена экранная форма с решением некоторой двухиндексной задачи с булевыми переменными.

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н	И
1		ПЕРЕМЕННЫЕ					ОГРАНИЧЕНИЯ		
2		Целые, булевы	x1	x2	x3	Лев. часть	Знак	Прав. часть	
3		x1j	1	0	0	1	=	1	
4		x2j	0	0	1	1	=	1	
5		x3j	0	1	0	1	=	1	
6	ОГРАНИЧЕНИЯ	Лев. часть	1	1	1				
7		Знак	=	=	=				3
8		Прав. часть	1	1	1				3 БАЛАНС
9									
10		ТАРИФЫ	x1	x2	x3				
11		x1j		2	9	7	ЦФ		
12		x2j		1	0	5	Значение	Направление	
13		x3j		5	4	100	11	min	

Рис. 1.18. Решение двухиндексной задачи с булевыми переменными

Помимо задания требования целочисленности (см. подразд.1.3.2) при вводе условия задач с булевыми переменными необходимо:

- для наглядности восприятия ввести в экранную форму слово "булевы" в качестве характеристики переменных (см. рис.1.18);
- в окне "**Поиск решения**" добавить граничные условия, имеющие смысл ограничения значений переменных по их *единичной* верхней границе (рис. 1.19).

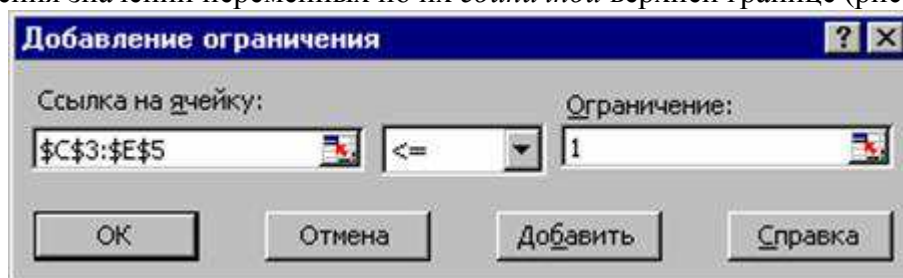


Рис. 1.19. Добавление условия единичной верхней границы значений переменных двухиндексной задачи с булевыми переменными

Вид окна "**Поиск решения**" для задачи с булевыми переменными, представленной на рис. 1.18, приведен на рис. 1.20.

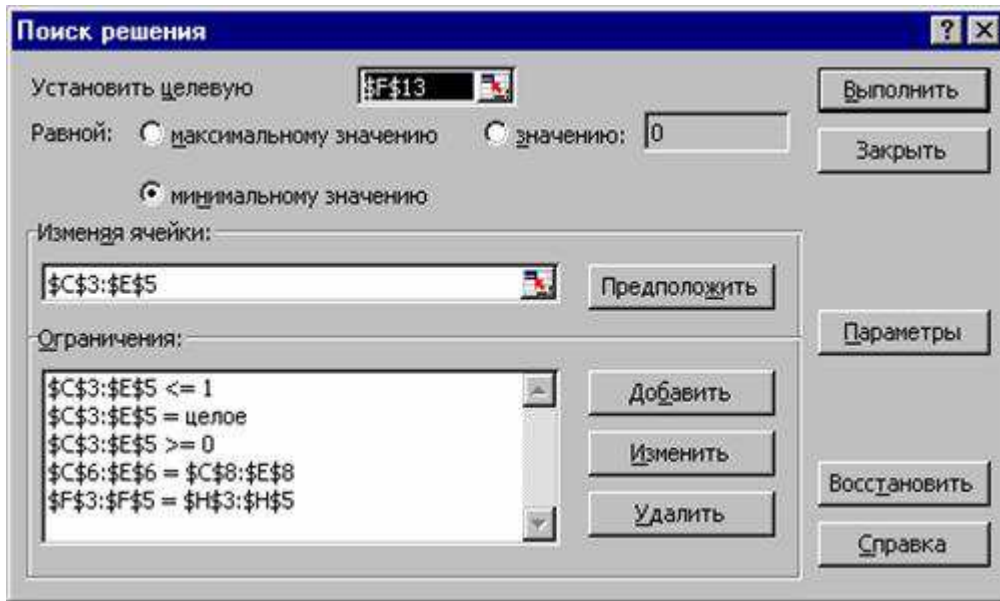


Рис. 1.20. Окно "Поиск решения" для задачи с булевыми переменными, представленной на рис. 1.18