Рассматривается динамическая система

где

Найдем положения равновесия системы. Для этого приравняем правую часть уравнений системы к нулю:

Из второго уравнения получаем или . Для первое уравнение принимает вид . Оно имеет два корня: и , что дает две стационарные точки: и . Для из первого уравнения получаем . Таким образом, мы имеем три (при ) или две (при ) особые точки: , , . При точки и совпадают.

Исследуем поведение системы вблизи точки . Cделаем замену, перенеся начало координат в точку :

 Имеем: , . Подставляя в исходную систему выражения через , получаем:

Таким образом, в координатах система принимает вид:

Отбрасывая слагаемые второго порядка, получаем линеаризованную систему:

Матрицу этой системы обозначим :

Составим характеристическое уравнение:

Для удобства введем вспомогательный параметр: . По условию, и . Характеристическое уравнение перепишется в виде

Корни этого уравнения:

Дискриминант равен , в силу условия знак дискриминанта совпадает со знаком выражения

Понятно, что

Зависимость знака дискриминанта от соотношения между параметрами и графически показана на рисунке:



Рассмотрим три случая по отдельности.

Если , то корни комплексно сопряженные, и их общая вещественная часть равна . Поэтому точка в данном случае представляет собой устойчивый фокус.

Если , то — в этом случае точка представляет собой устойчивый узел.

Остается рассмотреть случай , когда оба корня вещественные. Корень

заведомо отрицательный, так что поведение системы вблизи точки определяется вторым корнем:

Если , то , и поэтому . В этом случае мы имеем два различных отрицательных корня характеристического уравнения, поэтому точка представляет собой устойчивый узел.

Если , то , а в этом случае о поведении динамической системы вблизи стационарной точки нельзя судить по линеаризованной системе: надо учитывать и слагаемые высших порядков. К рассмотрению этого случая мы вернемся ниже.

Если , то , а значит, . Один корень характеристического уравнения отрицателен, а другой положителен: следовательно, точка представляет собой седло.

Остается рассмотреть случай , то есть . C учетом этого равенства наша система в координатах принимает вид:

Заметим что на прямой векторное поле, задаваемое правой частью, принимает вид

Это означает, что в нижней полуплоскости интегральные кривые пересекают ось слева направо — см. рисунок:



Рассмотрим также прямую . На этой прямой векторное поле, задаваемое правой частью, принимает вид

На всей прямой , кроме точки , эти векторы направлены вниз. Значит, интегральные кривые пересекают эту прямую сверху вниз — см. рисунок:



Перейдем к полярным координатам где , , , . Обозначим через область (сектор), определяемую неравенствами :



Из вида векторного поля на границе области ясно, что интегральные кривые изучаемой нами системы входят в эту область, но никогда не покидают ее.

Перепишем теперь саму систему в полярных координатах:

Отсюда получаем:

Умножим первое уравнение на , а второе на :

Теперь сложим два уравнения системы:

Множитель всегда положителен. При множитель тоже положителен. При малых знак выражения определяется знаком суммы , но для имеем . Следовательно, при и при достаточно малых имеем . Это значит, что интегральные кривые, стартующие вблизи начала координат в секторе , удаляются от положения равновесия, пока остается малым. А поскольку траектории не покидают сектора (как мы заметили выше), можно выбрать такую область вида

что любая интегральная кривая , стартующая в этом множестве сколь угодно близко к положению равновесия, при некотором покидает область и впоследствии никогда не оказывается на расстоянии от точки равновесия, меньшем . Это означает, что данная стационарная точка неустойчива по Ляпунову. См. рисунок:

