ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

51(07)
Н192

МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению
семестрового задания

Часть 4

Челябинск
2009

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра «Общеобразовательные дисциплины»

51(07)
Н192

МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению семестрового задания

Часть 4

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2009

УДК 51(075.8)
Н192

Одобрено
учебно-методической комиссией международного факультета

Рецензент М.Ю. Вагина

Н192 **Математика:** методические указания к выполнению семестрового задания / составитель Е.И. Назарова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2009. – Ч. 4. – 79 с.

Целью методических указаний является систематизация заданий по основным темам, соответствующим учебному плану дисциплины «Математика» четвертого семестра, а также оказание помощи студентам при выполнении семестрового задания № 4. В методических указаниях приведен круг задач, удовлетворяющих требованиям к уровню освоения содержания дисциплины «Математика» для различных специальностей международного факультета, представлены образцы решения и оформления задач, приведен библиографический список [1–12].

Методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов второго курса очного обучения международного факультета ЮУрГУ в течение четвертого семестра по всем специальностям.

УДК 51(075.8)

ВВЕДЕНИЕ

Семестровая работа является одним из видов самостоятельной работы студентов, входит в учебный план дисциплины «Математика» как обязательный элемент учебной деятельности.

Данные методические указания включают подборку заданий по основным темам, соответствующим учебному плану дисциплины «Математика» четвертого семестра для всех специальностей, а именно «Дискретная математика», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Математическое программирование».

Для выполнения работы студент должен знать перечень заданий, которые необходимо выполнить, и номер своего варианта.

Набор заданий, которые будут включены в семестровую работу студентов каждой из специальностей, определяет преподаватель.

Номер варианта определяется порядковым номером студента в списке, представленном в журнале группы. Номер каждого задания состоит из двух частей: первое число определяет номер раздела, к которому относится задание, второе число – порядковый номер задания в данном разделе.

Работа выполняется в отдельной тетради (12–18 листов) в клеточку.

Обложка тетради оформляется в печатном виде в соответствии с образцом, представленном в приложении 1. В местах пропусков должны быть внесены соответствующие данные выполнившего работу студента и преподавателя, который будет проверять семестровое задание. Регистрационные данные вносится секретарем кафедры при поступлении работы.

На последнюю страницу тетради (обложку) клеится лист проверки, представленный в приложении 2. На листе проверки необходимо указать данные студента, а также номера заданий, которые были включены в семестровую работу.

Требования при выполнении работы:

- условие каждой задачи вклеивается в тетрадь в печатном виде (или пишется от руки разборчивым почерком),
- приводится полное решение с необходимыми пояснениями, вычислениями и расчетами,
- после решения записывается ответ (если задание содержит несколько пунктов, то ответ необходимо записывать для каждого пункта решения),
- графические построения выполняются карандашом,
- текст решения всех задач должен быть в письменном виде,
- для отметок и замечаний преподавателя должны быть оставлены поля (3–4 см),
- решение задач должно быть представлено по порядку.

Семестровая работа сдается на кафедру «Общеобразовательные дисциплины (108 аудитория 8 корпуса) до указанного преподавателем срока и регистрируется секретарем кафедры. Работа принимается на проверку только в том случае, если содержит все задания, которые были включены в семестровую работу, и удовлетворяет требованиям к оформлению.

На проверку семестрового задания преподавателю необходимо не менее 10 дней со дня сдачи работы.

Результаты проверки семестровой работы преподаватель заносит в списки, находящиеся на кафедре, по мере проверки работ.

Если семестровая работа содержит все задания, удовлетворяет предъявляемым требованиям к оформлению и выполнена без серьезных ошибок, то она считается допущенной к экзамену, иначе возвращается на доработку. Для чего семестровую работу следует взять у преподавателя (или у секретаря кафедры) выполнить в течение 2–3 дней работу над ошибками в этой же тетради и сдать для повторной проверки на кафедру «Общеобразовательные дисциплины».

Рекомендуется выполнение заданий семестровой работы по мере изучения соответствующих тем, поскольку это способствует более глубокому усвоению полученных знаний и своевременному формированию умений. Необходимо отметить, что правильное своевременное выполнение семестровой работы является одним из основных параметров, определяющих успешность освоения предмета.

Раздел I. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

В этой части представлены основные задачи тем «Комбинаторика»; «Элементы математической логики»; «Графы». Часть задач несет прикладной характер, показывая применение дискретной математики в решении экономических задач.

Перед решением задач рекомендуется повторить теоретический материал и задачи, рассмотренные на лекциях и практических занятиях по данным темам. Учебные пособия В.И. Игошина, Е.В. Шикина и А.Г. Чхартишвили и задачники Г.П. Гаврилова, Н.Я Виленкина и В.Г. Потапова помогут найти ответы на вопросы, которые могут возникнуть при самостоятельной работе над темами не только во время выполнения семестрового задания, но и при подготовке к экзамену.

Задача 1.1. Составить таблицу истинности для формулы $F = F(P, Q, R)$ и указать, является ли данная формула выполнимой, опровержимой, тавтологией или противоречием.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $F = \left(Q \to (P \wedge R)\right) \wedge \overline{\left((P \vee R) \to Q\right)}$;

2) $F = (P \to Q) \to \left(\left(P \to (\bar{Q} \vee R)\right) \to (P \to R)\right)$;

3) $F = \overline{\left(P \to (Q \wedge R)\right)} \vee \left((\bar{Q} \to \bar{P}) \to \bar{P}\right)$;

4) $F = \overline{\left((P \to \bar{Q}) \wedge (\bar{Q} \to P) \vee R\right)} \wedge Q$;

5) $F = (P \to Q) \wedge \overline{\left(\left(P \to (\bar{Q} \vee R)\right) \to (P \to R)\right)}$;

6) $F = (P \vee Q) \to \left((\bar{P} \wedge Q) \vee (P \wedge \bar{Q})\right)$;

7) $F = \left(P \to (Q \wedge R)\right) \leftrightarrow \left((P \to Q) \wedge (P \to R)\right)$;

8) $F = \left((P \to Q) \wedge (Q \to R)\right) \to (\bar{R} \to \bar{P})$;

9) $F = \left((P \to Q) \wedge (Q \to R)\right) \wedge \overline{(P \to Q)}$;

10) $F = \overline{\left(P \to (Q \wedge R)\right)} \leftrightarrow \overline{\left((P \to Q) \wedge (P \to R)\right)}$;

11) $F = \left(P \to (Q \wedge R)\right) \to (\bar{Q} \to \bar{P}) \to \bar{P}$;

12) $F = (P \to R) \to \left((Q \to R) \to \left((P \vee Q) \to R\right)\right)$;

13) $F = \left((P \to Q) \wedge (Q \to R)\right) \to (P \to Q)$;

14) $F = \left((P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \wedge Q)\right) \leftrightarrow (R \leftrightarrow Q)$;

15) $F=\overline{(P\to R)}\vee\big((P\vee Q)\to(R\vee Q)\big)$;

16) $F=(P\to R)\wedge\overline{\big((Q\to R)\to\big((P\vee Q)\to R\big)\big)}$;

17) $F=\big((P\wedge Q)\to R\big)\to\big(P\wedge(Q\to R)\big)$;

18) $F=\big((P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R)\big)\to(P\vee R)$;

19) $F=(P\to R)\to\Big(\overline{(Q\to R)}\vee\big((P\vee Q)\to R\big)\Big)$;

20) $F=\big((P\vee Q)\vee R\big)\to\big((P\vee Q)\wedge(P\vee R)\big)$;

21) $F=(P\to R)\to\big((P\vee Q)\to(R\vee Q)\big)$;

22) $F=\big((P\wedge\bar{Q})\to(R\wedge\bar{R})\big)\to(P\to Q)$;

23) $F=(P\wedge Q)\to\big((R\vee Q)\to(Q\wedge\bar{Q})\big)$;

24) $F=\overline{\big((P\wedge Q)\to R\big)}\vee\big(P\wedge(Q\to R)\big)$;

25) $F=\big((P\wedge\bar{Q})\to(R\wedge\bar{R})\big)\wedge\overline{(P\to Q)}$;

26) $F=\big((P\to Q)\wedge(R\to\bar{Q})\wedge(P\vee R)\big)\to R$;

27) $F=\big((P\wedge Q)\to R\big)\wedge\overline{\big(P\wedge(Q\to R)\big)}$;

28) $F=\overline{(P\to R)\to\big((P\vee Q)\to(R\vee Q)\big)}$;

29) $F=\overline{(P\wedge Q)}\vee\big((R\vee Q)\to(Q\wedge\bar{Q})\big)$;

30) $F=\big(\overline{(P\to Q)}\wedge(R\to Q)\wedge(P\vee R)\big)\to R$.

Пример 1.1

Составить таблицу истинности для формулы $F=\big(\overline{P\wedge Q}\to R\big)\leftrightarrow\big(P\wedge(Q\to R)\big)$ и указать, является ли данная формула выполнимой, опровержимой, тавтологией или противоречием.

Решение

Число строк таблицы истинности определяется формулой

$$n=2^k, \tag{1.1}$$

где k – количество переменных в формуле.

Поскольку в заданной формуле три переменных, то, согласно (1.1), таблица будет содержать $2^3=8$ строк.

В первых трех столбцах таблицы выпишем всевозможные тройки логических значений, которые могут принимать переменные P, Q и R. В последующих столбцах выписываем логические значения формул, образующих порождающую последовательность для данной формулы. Руководствуемся при этом определениями логических операций отрицания, конъюнкция, импликация и эквивалентности.

Итак, получим таблицу истинности данной формулы

P	Q	R	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P \wedge Q} \to R$	$Q \to R$	$P \wedge (Q \to R)$	$F(P,Q,R)$
1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	1

Из построенной таблицы истинности видно, что существуют наборы значений переменных $(1,1,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,0,0)$ которые обращают формулу в истинное высказывание $F(1,1,1)$, $F(1,0,1)$, $F(0,1,0)$, $F(0,0,0)$ соответственно. Все остальные наборы значений переменных обращают формулу в ложное высказывание.

Ответ: формула является и выполнимой, и опровержимой.

Задача 1.2. Пусть n – натуральное число. Даны следующие утверждения: $A(n)$ – «число n кратно 5»; $B(n)$ – «число n кратно 2»; $C(n)$ – «число n кратно 4»; $D(n)$ – «число n кратно 10»; $E(n)$ – «число n кратно 20». Записать высказывание в словесной форме и указать, истинно оно или ложно, привести примеры.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 1 по 15:

1) $\exists n\big(C(n) \leftrightarrow B(n)\big)$;
2) $\forall n\big(E(n) \vee D(n) \to A(n)\big)$;
3) $\forall n\big(D(n) \to A(n) \wedge B(n)\big)$;
4) $\exists n\big(A(n) \wedge B(n)\big)$;
5) $\forall n\big(C(n) \to B(n)\big)$;
6) $\forall n\big(A(n) \wedge C(n) \leftrightarrow E(n)\big)$;
7) $\exists n\big(C(n) \vee D(n)\big)$;
8) $\forall n\big(D(n) \leftrightarrow A(n) \vee B(n)\big)$;
9) $\forall n\big(B(n) \wedge D(n) \to E(n)\big)$;
10) $\forall n\big(\overline{A(n)} \to \overline{E(n)}\big)$;
11) $\exists n\big(A(n) \wedge B(n) \to C(n)\big)$;
12) $\forall n\big(A(n) \vee C(n) \to E(n)\big)$;
13) $\exists n\big(B(n) \wedge C(n) \to \overline{D(n)}\big)$;
14) $\forall n\big(A(n) \vee B(n)\big)$;
15) $\exists n\big(C(n) \to A(n)\big)$.

Записать приведенное утверждение с помощью следующих обозначений: x, y – человек, $S(x)$ – студент, $Sc(x)$ – школьник, $E(x)$ – отличник, $C(x)$ – староста, $T(x)$ – преподаватель, $W(x)$ – работающий, $P(x)$ – член профсоюза, $Y(x)$ – молодой, $O(x)$ – старый, $J(x)$ – справедливый, $G(x)$ – девушка, $A(x,y)$ – x боится y, $Ad(x,y)$ – x восхищен человеком y.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 16 по 30:

16) Некоторые школьники и студенты – отличники.
17) Не все молодые преподаватели справедливы.
18) Все студенты боятся старых преподавателей.
19) Некоторые молодые и все старые преподаватели справедливы.
20) Все школьницы восхищаются отличниками.
21) Все студенты и некоторые преподаватели молоды.
22) Среди работающих студентов есть отличники.
23) Все студенты восхищаются преподавателями.
24) Все старосты отличники и работают.
25) Среди студенток–старост есть отличницы.
26) Есть школьники, которые работают.
27) Студентки не боятся молодых преподавателей.
28) Все работающие студенты – молодые.
29) Некоторые молодые преподаватели боятся студентов–отличников.
30) Некоторые преподаватели и все студенты являются членами профсоюза.

Пример 1.2

Записать утверждение «Есть справедливые студенты, которые восхищаются всеми преподавателями» с помощью следующих обозначений: x, y – человек, $S(x)$ – студент, $T(x)$ – преподаватель, $J(x)$ – справедливый, $Ad(x,y)$ – x восхищен человеком y.

Решение

В соответствии с обозначениями данное утверждение будет записано в следующем виде

$$\exists x\left(S\left(x\right)\wedge J\left(x\right)\right)\wedge\forall y\left(T\left(y\right)\wedge Ad\left(x,y\right)\right).$$

Ответ: $\exists x\left(S\left(x\right)\wedge J\left(x\right)\right)\wedge\forall y\left(T\left(y\right)\wedge Ad\left(x,y\right)\right)$.

Задача 1.3

Задачи, соответствующие вариантам:

1. Из города A в город B ведут пять дорог, а из города B в город C – три дороги. Сколько путей, проходящих через B, ведут через A и C?

2. В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 5 мест каждый. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть лицом к паровозу, а трое – спиной к паровозу, остальным трем безразлично, как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

3. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсин. Ваня выбирает из нее яблоко или апельсин, после него Надя берет и яблоко, и апельсин. В каком случае Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или если он взял апельсин?

4. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? Каково количество способов, если одна из полос должна быть красной?

5. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

6. Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека в каждой команде, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

7. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более трех различных имен?

8. Сколькими способами можно разложить 12 одинаковых конфет по пяти различным пакетам, если ни один из пакетов не должен быть пустым?

9. Бросают игральную кость с 6 гранями и запускают волчок, имеющий восемь граней. Сколькими различными способами могут они одновременно упасть?

10. Сколькими способами можно выбрать 6 человек из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. сделать?

11. Хор состоит из 10 участников: 5 девочек и 5 мальчиков. Сколькими способами можно выбрать 6 участников концерта так, чтобы трое определенных мальчиков участвовали в концерте?

12. Сколько различных четырехзначных чисел, кратных 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, каждая цифра может встречаться в записи числа несколько раз?

13. Сколько различных «слов» можно получить, меняя местами буквы в слове «математика»?

14. Телефонный номер состоит из 7 цифр. Абонент забыл последние три цифры. Какое максимальное количество попыток он может сделать, прежде чем правильно наберет номер, если он помнит, что забытые цифры различны?

15. Сколькими способами можно поменять местами буквы слова «Юпитер» так, чтобы гласные шли в алфавитном порядке?

16. В селении проживает 2000 русских жителей. Возможно ли, что инициалы каждого из них различны? Сколько человек может иметь различные инициалы?

17. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

18. На собрании должно выступать 5 человек: $А$, $Б$, $В$, $Г$ и $Д$. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что $Б$ не должен выступать до того, как выступит $А$?

19. Сколько существует чисел от 0 до 999, которые не делятся ни на 3, ни на 5?

20. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и 20 рядовых?

21. Сколькими способами можно разбить 30 студентов на три подгруппы по 10 человек в каждой подгруппе?

22. В букинистическом магазине лежат 6 экземпляров романа И.С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра – «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра – «Отцы и дети». Также есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими действиями можно сделать покупку, содержащего по одному экземпляру каждого из романов?

23. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. Сколькими способами можно наудачу отобрать по списку 9 студентов так, чтобы среди них было не менее 6 отличников?

24. Сколькими способами можно расположить в 9 различных лузах 7 белых шаров, и 2 черных шара, если ни одна из луз не может быть пустой?

25. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы один туз? Во скольких случаях не менее двух тузов?

26. В урне лежат жетоны с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. 9, 10. Из нее вынимают три жетона. Во скольких случаях сумма написанных на них чисел рана 9? Меньше 9? Больше 9?

27. Переплетчик должен переплести 4 различные книги в красный, зеленый или коричневый переплеты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

28. Сколькими способами можно составить 6 слов (каждое слово состоит не менее чем из трех букв) из 32 букв, если в совокупности этих шести слов каждая буква используется только один раз?

29. Из 3 экземпляров учебника экономики, 7 экземпляров учебника геометрии и 7 экземпляров учебника философии надо выбрать по два экземпляра каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

30. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 различных чашки, 5 различных блюдец и 6 различных чайных ложек. Сколькими способами они могут взять чашку, блюдце и ложку для чаепития?

Пример 1.3

В «секретном» замке на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на пять секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Сколько существует вариантов таких четырехзначных чисел?

Решение

В результате последовательного выбора секторов на каждом диске образуется набор цифр, составляющих «секретное» четырехзначное число. На каждом диске элемент может быть выбран 5 способами (соответствует количеству секторов), тогда выбор всех упорядоченных четверок цифр, согласно правилу произведения, может быть осуществлен $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ способами.

Ответ: существует 625 вариантов кода для данного замка.

Задача 1.4. В таблице заданы декартовы координаты вершин неориентированного графа и перечислены ребра графа. Необходимо построить граф на плоскости xOy и найти:

а) таблицу степеней вершин;

б) матрицу смежности и матрицу инцидентности;

в) таблицу расстояний в графе и определить радиус и центр графа.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(1;3)$	$(3;5)$	$(6;5)$	$(2;2)$	$(3;3)$	$(1;0)$	$(3;0)$	$(6;2)$
$(x_1;x_2)$, $(x_1;x_6)$, $(x_2;x_3)$, $(x_2;x_4)$, $(x_2;x_5)$, $(x_2;x_8)$, $(x_6;x_7)$							

2)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(1;1)$	$(2;2)$	$(2;4)$	$(2;5)$	$(3;5)$	$(5;5)$	$(3;2)$	$(5;2)$
$(x_1;x_2)$, $(x_2;x_3)$, $(x_2;x_7)$, $(x_3;x_5)$,$(x_4;x_8)$ $(x_5;x_6)$, $(x_5;x_7)$, $(x_6;x_8)$							

3)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(4;6)$	$(2;4)$	$(4;4)$	$(6;4)$	$(2;0)$	$(4;1)$	$(6;0)$	$(9;2)$
$(x_1;x_2)$, $(x_1;x_3)$, $(x_1;x_4)$, $(x_2;x_3)$, $(x_2;x_5)$, $(x_3;x_6)$, $(x_4;x_7)$, $(x_7;x_8)$							

4)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(1;4)$	$(3;5)$	$(5;4)$	$(1;2)$	$(5;2)$	$(1;0)$	$(5;0)$	$(7;1)$
$(x_1;x_8)$, $(x_2;x_3)$, $(x_2;x_4)$, $(x_4;x_5)$, $(x_4;x_6)$, $(x_5;x_8)$, $(x_6;x_7)$.							

5)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(2;3)$	$(2;6)$	$(3;7)$	$(3;5)$	$(5;6)$	$(5;4)$	$(6;6)$	$(4;1)$
$(x_1;x_2)$, $(x_2;x_3)$, $(x_3;x_4)$, $(x_3;x_5)$, $(x_4;x_7)$, $(x_5;x_8)$, $(x_6;x_8)$.							

6)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(2;4)$	$(1;2)$	$(4;6)$	$(2;3)$	$(5;1)$	$(0;4)$	$(3;5)$	$(4;7)$
$(x_1;x_5)$, $(x_1;x_8)$, $(x_2;x_4)$, $(x_3;x_6)$, $(x_3;x_7)$, $(x_4;x_6)$, $(x_7;x_8)$.							

7)

<table>
<tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td>x_5</td><td>x_6</td><td>x_7</td><td>x_8</td></tr>
<tr><td>$(1;7)$</td><td>$(2;7)$</td><td>$(6;7)$</td><td>$(8;5)$</td><td>$(6;2)$</td><td>$(2;2)$</td><td>$(6;5)$</td><td>$(4;5)$</td></tr>
<tr><td colspan="8">$(x_1;x_4),(x_2;x_3),(x_2;x_6),(x_2;x_8),(x_3;x_4),(x_3;x_7),(x_5;x_6),(x_6;x_8).$</td></tr>
</table>

8)

<table>
<tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td>x_5</td><td>x_6</td><td>x_7</td><td>x_8</td></tr>
<tr><td>$(4;2)$</td><td>$(3;-1)$</td><td>$(5;7)$</td><td>$(4;5)$</td><td>$(3;6)$</td><td>$(0;4)$</td><td>$(2;0)$</td><td>$(-2;6)$</td></tr>
<tr><td colspan="8">$(x_1;x_4),(x_1;x_5),(x_1;x_7),(x_2;x_6),(x_2;x_7),(x_3;x_8),(x_4;x_5),(x_4;x_8).$</td></tr>
</table>

9)

<table>
<tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td>x_5</td><td>x_6</td><td>x_7</td><td>x_8</td></tr>
<tr><td>$(1;2)$</td><td>$(2;4)$</td><td>$(3;5)$</td><td>$(4;4)$</td><td>$(4;3)$</td><td>$(2;2)$</td><td>$(2;3)$</td><td>$(4;2)$</td></tr>
<tr><td colspan="8">$(x_1;x_2),(x_2;x_3),(x_2;x_5),(x_3;x_4),(x_3;x_5),(x_4;x_6),(x_4;x_8),(x_5;x_7).$</td></tr>
</table>

10)

<table>
<tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td>x_5</td><td>x_6</td><td>x_7</td><td>x_8</td></tr>
<tr><td>$(0;2)$</td><td>$(1;4)$</td><td>$(2;5)$</td><td>$(3;6)$</td><td>$(4;5)$</td><td>$(5;4)$</td><td>$(6;2)$</td><td>$(3;2)$</td></tr>
<tr><td colspan="8">$(x_1;x_3),(x_2;x_3),(x_2;x_6),(x_4;x_5),(x_5;x_6),(x_5;x_7),(x_5;x_8).$</td></tr>
</table>

11)

<table>
<tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td>x_5</td><td>x_6</td><td>x_7</td><td>x_8</td></tr>
<tr><td>$(2;2)$</td><td>$(2;5)$</td><td>$(3;6)$</td><td>$(5;6)$</td><td>$(3;4)$</td><td>$(4;5)$</td><td>$(4;4)$</td><td>$(5;4)$</td></tr>
<tr><td colspan="8">$(x_1;x_2),(x_2;x_3),(x_3;x_4),(x_3;x_5),(x_3;x_8),(x_5;x_8),(x_7;x_8).$</td></tr>
</table>

12)

<table>
<tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td>x_5</td><td>x_6</td><td>x_7</td><td>x_8</td></tr>
<tr><td>$(7;1)$</td><td>$(6;5)$</td><td>$(-3;3)$</td><td>$(0;4)$</td><td>$(2;6)$</td><td>$(3;2)$</td><td>$(8;8)$</td><td>$(5;4)$</td></tr>
<tr><td colspan="8">$(x_1;x_8),(x_1;x_4),(x_1;x_5),(x_2;x_6),(x_2;x_7),(x_3;x_5),(x_4;x_8),(x_5;x_8).$</td></tr>
</table>

13)

<table>
<tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td>x_5</td><td>x_6</td><td>x_7</td><td>x_8</td></tr>
<tr><td>$(3;2)$</td><td>$(4;1)$</td><td>$(1;1)$</td><td>$(6;6)$</td><td>$(7;2)$</td><td>$(0;4)$</td><td>$(5;2)$</td><td>$(2;0)$</td></tr>
<tr><td colspan="8">$(x_1;x_5),(x_1;x_7),(x_2;x_4),(x_2;x_6),(x_3;x_7),(x_5;x_7),(x_7;x_8).$</td></tr>
</table>

14)

<table>
<tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td>x_5</td><td>x_6</td><td>x_7</td><td>x_8</td></tr>
<tr><td>$(4;8)$</td><td>$(5;5)$</td><td>$(2;3)$</td><td>$(7;2)$</td><td>$(3;0)$</td><td>$(2;8)$</td><td>$(6;1)$</td><td>$(1;1)$</td></tr>
<tr><td colspan="8">$(x_1;x_3),(x_1;x_4),(x_1;x_8),(x_2;x_7),(x_3;x_6),(x_4;x_6),(x_4;x_8),(x_5;x_8).$</td></tr>
</table>

15)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(-1;5)$	$(2;-2)$	$(4;0)$	$(2;5)$	$(3;2)$	$(8;3)$	$(0;6)$	$(7;5)$
$(x_1;x_4), (x_2;x_6), (x_2;x_8), (x_3;x_4), (x_3;x_5), (x_4;x_6), (x_4;x_7).$							

16)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(2;6)$	$(5;6)$	$(0;7)$	$(4;8)$	$(7;0)$	$(3;7)$	$(6;1)$	$(1;9)$
$(x_1;x_8), (x_2;x_6), (x_2;x_7), (x_3;x_5), (x_4;x_5), (x_4;x_8), (x_6;x_8).$							

17)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(2;5)$	$(3;1)$	$(0;4)$	$(4;3)$	$(6;2)$	$(1;1)$	$(7;3)$	$(5;5)$
$(x_1;x_3), (x_1;x_8), (x_2;x_4), (x_2;x_5), (x_2;x_7), (x_4;x_5), (x_4;x_8), (x_6;x_7).$							

18)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(1;4)$	$(6;8)$	$(0;0)$	$(6;1)$	$(4;4)$	$(5;7)$	$(3;3)$	$(2;7)$
$(x_1;x_6), (x_2;x_5), (x_2;x_6), (x_3;x_6), (x_3;x_7), (x_3;x_8), (x_4;x_7), (x_4;x_8).$							

19)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(-2;3)$	$(0;-4)$	$(4;4)$	$(2;3)$	$(6;7)$	$(1;5)$	$(8;8)$	$(8;2)$
$(x_1;x_3), (x_1;x_8), (x_2;x_4), (x_3;x_4), (x_3;x_6), (x_4;x_6), (x_5;x_8).$							

20)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(1;5)$	$(2;4)$	$(4;4)$	$(5;5)$	$(4;2)$	$(2;2)$	$(1;1)$	$(3;3)$
$(x_1;x_3), (x_1;x_4), (x_1;x_7), (x_2;x_3), (x_2;x_5), (x_4;x_8), (x_6;x_7).$							

21)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(2;5)$	$(1;6)$	$(3;2)$	$(4;1)$	$(2;7)$	$(0;3)$	$(7;4)$	$(6;3)$
$(x_1;x_3), (x_1;x_6), (x_1;x_8), (x_2;x_7), (x_3;x_6), (x_4;x_8), (x_5;x_6), (x_7;x_8).$							

22)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(4;2)$	$(3;-1)$	$(5;7)$	$(4;5)$	$(3;6)$	$(0;4)$	$(2;0)$	$(-2;6)$
$(x_1;x_4), (x_1;x_5), (x_1;x_7), (x_2;x_6), (x_2;x_7), (x_3;x_8), (x_4;x_8).$							

23)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(1;2)$	$(3;6)$	$(5;0)$	$(2;5)$	$(7;3)$	$(6;1)$	$(3;0)$	$(5;3)$
$(x_1;x_2)$, $(x_1;x_5)$, $(x_2;x_4)$, $(x_2;x_7)$, $(x_3;x_5)$, $(x_3;x_6)$, $(x_4;x_6)$, $(x_6;x_8)$.							

24)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(3;1)$	$(2;8)$	$(0;4)$	$(4;2)$	$(1;8)$	$(5;8)$	$(3;4)$	$(7;1)$
$(x_1;x_4)$, $(x_1;x_8)$, $(x_2;x_5)$, $(x_3;x_8)$, $(x_5;x_6)$, $(x_5;x_7)$, $(x_7;x_8)$.							

25)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(-2;3)$	$(2;5)$	$(4;7)$	$(3;5)$	$(5;-6)$	$(5;4)$	$(6;3)$	$(4;1)$
$(x_1;x_4)$, $(x_2;x_3)$, $(x_3;x_5)$, $(x_3;x_8)$, $(x_4;x_7)$, $(x_5;x_7)$, $(x_6;x_8)$.							

26)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(4;4)$	$(1;3)$	$(2;6)$	$(2;3)$	$(5;-1)$	$(1;4)$	$(3;5)$	$(4;7)$
$(x_1;x_5)$, $(x_1;x_7)$, $(x_2;x_4)$, $(x_3;x_5)$, $(x_3;x_7)$, $(x_4;x_6)$, $(x_6;x_8)$.							

27)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(1;5)$	$(2;1)$	$(6;5)$	$(8;5)$	$(6;2)$	$(2;2)$	$(6;5)$	$(4;4)$
$(x_1;x_5)$, $(x_2;x_4)$, $(x_2;x_6)$, $(x_2;x_8)$, $(x_3;x_5)$, $(x_3;x_7)$, $(x_5;x_7)$, $(x_6;x_8)$.							

28)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(4;-2)$	$(3;1)$	$(5;6)$	$(4;5)$	$(3;7)$	$(0;5)$	$(2;0)$	$(-2;6)$
$(x_1;x_4)$, $(x_1;x_5)$, $(x_2;x_3)$, $(x_2;x_6)$, $(x_3;x_7)$, $(x_3;x_8)$, $(x_4;x_5)$, $(x_7;x_8)$.							

29)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(5;2)$	$(2;4)$	$(3;3)$	$(1;4)$	$(4;3)$	$(2;7)$	$(2;3)$	$(4;2)$
$(x_1;x_2)$, $(x_1;x_3)$, $(x_2;x_5)$, $(x_3;x_4)$, $(x_3;x_5)$, $(x_5;x_6)$, $(x_5;x_7)$, $(x_5;x_8)$.							

30)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(0;-2)$	$(2;4)$	$(3;5)$	$(4;6)$	$(4;5)$	$(5;-4)$	$(6;2)$	$(-3;2)$
$(x_1;x_3)$, $(x_1;x_6)$, $(x_2;x_6)$, $(x_3;x_4)$, $(x_3;x_5)$, $(x_6;x_7)$, $(x_6;x_8)$.							

Пример 1.4

В таблице заданы декартовы координаты вершин неориентированного графа и перечислены ребра графа.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$(1;3)$	$(3;6)$	$(6;5)$	$(2;1)$	$(5;1)$	$(1;0)$	$(3;0)$	$(7;2)$
$(x_1;x_2),\ (x_1;x_3),\ (x_2;x_4),\ (x_2;x_8),\ (x_3;x_5),\ (x_4;x_6),\ (x_7;x_8).$							

Необходимо построить граф на плоскости xOy и найти:

а) таблицу степеней вершин;

б) матрицу смежности и матрицу инцидентности;

в) таблицу расстояний в графе и определить радиус и центр графа.

Решение

На рис. 1 изобразим вершины x_i и ребра a_{ij} заданного графа, $i=\overline{1;8}$, $j=\overline{1;8}$, a_{ij} – ребро, соединяющее вершины x_i и x_j.

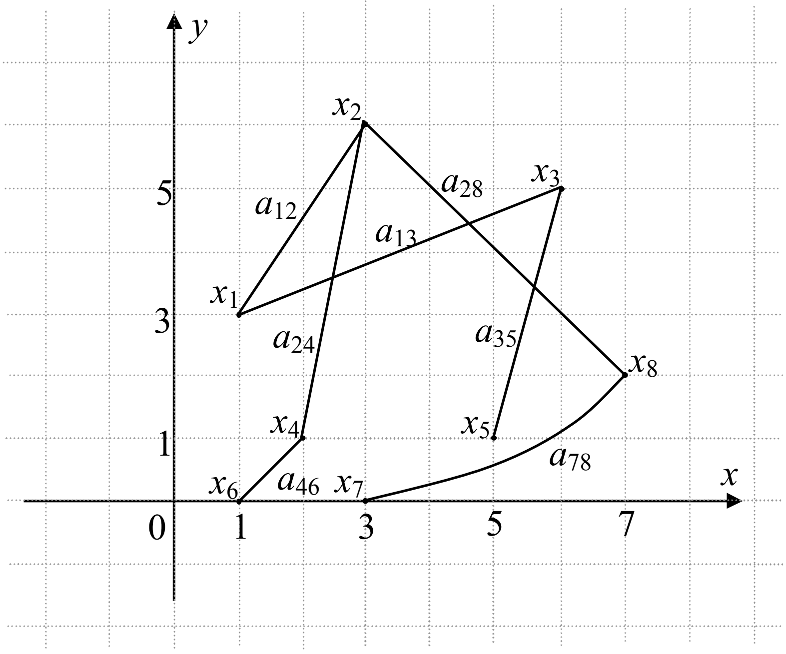

Рис. 1

а) В таблице степеней вершин неориентированного графа указывается число ребер $\sigma(x_i)$, инцидентных каждой вершине x_i, $i=\overline{1;n}$. Таблица степеней вершин данного графа имеет вид ($n=8$):

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$\sigma(x_i)$	2	3	2	2	1	1	1	2

б) Матрицей смежности $A(G)=(a_{ij})$, $i=\overline{1;n}$, $j=\overline{1;n}$ неориентированного графа G называется матрица размерности $n\times n$, элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i \text{ и } x_j \text{ смежны}, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица смежности для данного графа ($n = 8$):

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицей инцидентности $B(G) = (b_{ik})$, $i = \overline{1;n}$, $k = \overline{1;m}$ неориентированного графа G с n вершинами и m ребрами называется матрица размерности $n \times m$, элементы которой определяются следующим образом:

$$b_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } a_k = a_{ij}, \\ 0, \text{ в противном случае или если } a_k = a_{ij} - \text{петля.} \end{cases}$$

Составим матрицу инцидентности для заданного графа

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где столбцы соответствуют ребрам в следующем порядке a_{12}, a_{13}, a_{24}, a_{28}, a_{35}, a_{46}, a_{78}.

в) Расстоянием $d(x, y)$ между вершинами x и y в неориентированном графе G называется наименьшее число ребер, соединяющих эти вершины. Условный радиус $r(z)$ графа G относительно вершины z определяется формулой:

$$r(z) = \max_{x \in V(G)} d(z, x), \tag{1.2}$$

где $- V(G)$ это множество вершин графа G.

Радиус $r(G)$ графа G определяется как наименьший из условных радиусов графа

$$r(G) = \min_{z \in V(G)} r(z). \tag{1.3}$$

Центр графа составляют вершины, условные радиусы графа относительно которых совпадают с радиусом графа.

Найдем таблицу расстояний данного графа и на ее основе определим условные радиусы вершин по формуле (1.2), а затем радиус и центр графа:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$r(x_i)$
x_1	0	1	1	2	2	3	3	2	3
x_2	1	0	2	1	3	2	2	1	3
x_3	1	2	0	3	1	4	4	3	4
x_4	2	1	3	0	4	1	3	2	4
x_5	2	3	1	4	0	5	5	4	5
x_6	3	2	4	1	5	0	4	3	5
x_7	3	2	4	3	5	4	0	1	5
x_8	2	1	3	2	4	3	1	0	4

Итак, в соответствии с (1.3) радиус графа $r(G)=3$, следовательно, центром графа является множество вершин $\{x_1;x_2\}$.

Ответ: $r(G)=3$, центр графа: $\{x_1;x_2\}$.

Задача 1.5. Телефонная компания планирует соединить подземным кабелем пять городов, расстояния в километрах между которыми заданы при помощи таблицы. Найти минимальную длину кабеля, позволяющего жителям любых двух городов связаться друг с другом по телефону.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1)

	A	B	C	D	E
A	–	5	6	3	12
B	5	–	5	8	14
C	6	5	–	9	10
D	3	8	9	–	6
E	12	14	10	6	–

2)

	A	B	C	D	E
A	–	10	9	12	8
B	10	–	6	2	8
C	9	6	–	11	7
D	12	2	11	–	12
E	8	8	7	12	–

3)

	A	B	C	D	E
A	–	9	15	6	4
B	9	–	7	12	11
C	15	7	–	3	8
D	6	12	3	–	6
E	4	11	8	6	–

4)

	A	B	C	D	E
A	–	8	9	9	8
B	8	–	7	6	5
C	9	7	–	9	5
D	9	6	9	–	4
E	8	5	5	4	–

5)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	12	10	6	8
B	12	–	3	5	11
C	10	3	–	8	6
D	6	5	8	–	10
E	8	11	6	10	–

6)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	8	9	7	10
B	8	–	5	6	11
C	9	5	–	12	13
D	7	6	12	–	7
E	10	11	13	7	–

7)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	12	15	11	10
B	12	–	6	12	9
C	15	6	–	8	11
D	11	12	8	–	9
E	10	9	11	9	–

8)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	7	6	4	12
B	7	–	5	10	13
C	6	5	–	9	8
D	4	10	9	–	6
E	12	13	8	6	–

9)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	9	10	12	8
B	9	–	6	13	9
C	10	6	–	11	7
D	12	13	11	–	6
E	8	9	7	6	–

10)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	11	10	7	8
B	11	–	13	5	9
C	10	13	–	5	6
D	7	5	5	–	10
E	8	9	6	10	–

11)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	7	5	8	13
B	7	–	11	9	5
C	5	11	–	14	8
D	8	9	14	–	10
E	13	5	8	10	–

12)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	15	10	12	11
B	15	–	8	13	9
C	10	8	–	11	10
D	12	13	11	–	7
E	11	9	10	7	–

13)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	4	8	9	7
B	4	–	5	10	6
C	8	5	–	4	9
D	9	10	4	–	8
E	7	6	9	8	–

14)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	9	10	6	5
B	9	–	7	13	11
C	10	7	–	4	8
D	6	13	4	–	7
E	5	11	8	7	–

15)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	7	9	10	8
B	7	–	7	6	6
C	9	7	–	12	5
D	10	6	12	–	4
E	8	6	5	4	–

16)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	11	9	12	11
B	11	–	10	13	9
C	9	10	–	11	6
D	12	13	11	–	7
E	11	9	6	7	–

17)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	6	8	9	8
B	6	–	5	10	4
C	8	5	–	4	9
D	9	10	4	–	7
E	8	4	9	7	–

18)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	10	15	12	7
B	10	–	6	6	8
C	15	6	–	11	7
D	12	6	11	–	5
E	7	8	7	5	–

19)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	12	15	6	7
B	12	–	7	9	11
C	15	7	–	3	8
D	6	9	3	–	5
E	7	11	8	5	–

20)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	14	15	11	10
B	14	–	6	12	13
C	15	6	–	8	11
D	11	12	8	–	10
E	10	13	11	10	–

21)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	8	9	4	12
B	8	–	15	6	11
C	9	15	–	9	13
D	4	6	9	–	7
E	12	11	13	7	–

22)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	10	8	9	5
B	10	–	11	12	6
C	8	11	–	4	9
D	9	12	4	–	8
E	5	6	9	8	–

23)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	6	9	7	11
B	6	–	7	6	11
C	9	7	–	12	5
D	7	6	12	–	7
E	11	11	5	7	–

24)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	5	9	3	12
B	5	–	8	6	11
C	9	8	–	9	10
D	3	6	9	–	7
E	12	11	10	7	–

25)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	8	6	9	10
B	8	–	7	6	5
C	6	7	–	9	11
D	9	6	9	–	7
E	10	5	11	7	–

26)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	7	6	8	13
B	7	–	11	9	15
C	6	11	–	10	8
D	8	9	10	–	11
E	13	15	8	11	–

27)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	9	10	12	11
B	9	–	8	7	9
C	10	8	–	11	8
D	12	7	11	–	7
E	11	9	8	7	–

28)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	–	12	14	11	6
B	12	–	6	10	9
C	14	6	–	7	11
D	11	10	7	–	8
E	6	9	11	8	–

29)

	A	B	C	D	E
A	–	16	12	6	8
B	16	–	9	5	11
C	12	9	–	10	6
D	6	5	10	–	10
E	8	11	6	10	–

30)

	A	B	C	D	E
A	–	8	6	8	13
B	8	–	11	9	12
C	6	11	–	7	8
D	8	9	7	–	10
E	13	12	8	10	–

Пример 1.5

Телефонная компания планирует соединить подземным кабелем пять городов, расстояния в километрах между которыми заданы при помощи таблицы:

	A	B	C	D	E
A	–	11	13	12	8
B	11	–	6	9	15
C	13	6	–	10	7
D	12	9	10	–	14
E	8	15	7	14	–

Найти минимальную длину кабеля, позволяющего жителям любых двух городов связаться друг с другом по телефону.

Решение

Сначала выбираем два города, расстояние между которыми самое маленькое – BC (6 км.), затем к ним присоединяем города, имеющие самое маленькое расстояние из оставшихся – CE (7 км.), далее AE (8 км.). И на последнем, четвертом шаге вновь выбираем самое маленькое расстояние (но так, чтобы не образовалось никакого цикла) – BD (9 км.) (рис. 2).

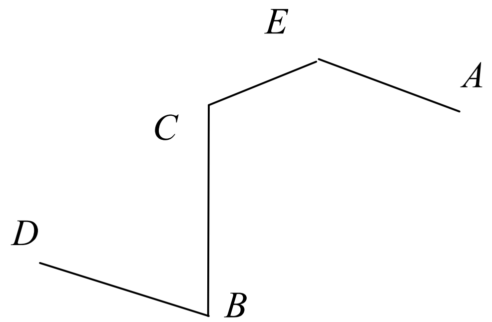

Рис. 2

Таким образом, минимальная длина кабеля, позволяющего жителям любых двух городов связаться друг с другом по телефону равна

$$6+7+8+9=30 \text{ км.}$$

Ответ: минимальная длина кабеля составит 30 км.

Раздел II. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

В разделе «Теория вероятностей и математическая статистика» даны задачи на классическое определение вероятности, сложение и умножение вероятностей, формулу полной вероятности и формулу Байеса, схему испытаний Бернулли; дискретные и непрерывные случайные величины, вариационные ряды, статистические оценки и доверительные интервалы параметров распределения, проверку гипотез, корреляцию и регрессию. Основная часть представленных задач имеет экономическое содержание.

Весь необходимый при решении задач теоретический материал можно найти в учебной литературе следующих авторов: М.С. Красс и Б.П. Чупрынов, В.И. Ермаков, В.Е. Гмурман. В практикумах Н.Я. Виленкина и В.Г. Потапова, Е.С. Вентцеля, В.Е. Гмурмана даны примеры решения некоторых задач. Основным ориентиром в поиске необходимой информации при самостоятельной работе является материал, данный на лекциях и практических занятиях.

Задача 2.1

Задачи, соответствующие вариантам:

1. При перевозке 20 изделий первого типа и 15 изделий второго типа повреждены два изделия. Найти вероятность того, что повреждены изделия: а) одного типа, б) разных типов.

2. В лотерее 20 билетов, из них 8 выигрышных. Какова вероятность выиграть: а) один раз, б) хотя бы один раз, купив 3 билета?

3. Необходимо отправить делегацию из пяти человек. В коллективе 4 бухгалтера, 10 менеджеров и 5 научных сотрудников. Найти вероятность того, что среди делегатов будет 1 бухгалтер, 2 менеджера и 2 научных сотрудника.

4. В коробке 15 плиток шоколада, среди которых 9 с орехами. Найти вероятность того, что из наудачу взятых 3 шоколадок: а) две будут с орехами, б) хотя бы две будут с орехами.

5. Восемь счетов, среди которых 3 оформлены с ошибками, поступили на ревизорскую проверку. Какова вероятность того, что эти три счета будут лежать в пачке счетов рядом?

6. В соревновании участвуют 12 команд. Какова вероятность того, что некоторая определенная команда займет призовое место?

7. Среди 40 счетов четыре оформлены с ошибками. Ревизор наугад берет три счета. Найти вероятность того, что среди этих счетов: а) один будет с ошибками, б) хотя бы один содержит ошибки.

8. Для аттестации группы студентов из 30 человек произвольно выбирают 5 студентов. Какова вероятность того, что будут отобраны: а) два вполне определенных студента, б) ни один из них?

9. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых изображены буквы Б, И, К, Н, О, Р, С, получится слово «СБОРНИК»?

10. В отделе работают 8 женщин и 6 мужчин. Трое из них по жребию отправятся в командировку. Какова вероятность того, что: а) все трое будут мужчины, б) все трое будут женщины?

11. В магазин поступили 20 телевизоров одной марки и 10 телевизоров другой марки. Для школы наудачу закупили три телевизора. Какова вероятность того, что: а) все три телевизора будут одной марки, б) хотя бы один телевизор будет второй марки?

12. В кабинете имеются 30 книг выпуска 2004 г. и 20 книг выпуска 2000 г. На группу студентов выдали 5 произвольно выбранных книг. Какова вероятность того, что: а) 2 книги будут выпуска 2004 года, б) все книги будут выпуска 2004г.?

13. На склад поступили 15 пылесосов одного типа и 10 пылесосов другого типа. На проверку взяли произвольно три пылесоса. Какова вероятность того, что: а) все пылесосы первого типа, б) хотя бы один пылесос второго типа?

14. В группу принесли 30 методических пособий по математике, среди которых 20 по математическому анализу и 10 по теории вероятностей. Студент наугад берет 2 методички. Найти вероятность того, что: а) обе методички будут по теории вероятности, б) хотя бы одна будет по теории вероятности.

15. В пачке 10 тетрадей, среди которых три в линейку, остальные в клеточку. Найти вероятность того, что среди 3 наудачу взятых тетрадей: а) одна будет в линейку, б) хотя бы одна будет в клеточку.

16. К зачету студент подготовил 40 вопросов из 50. Какова вероятность получить зачет, если для его получения надо ответить хотя бы на 2 вопроса из трех случайно выбранных компьютером-экзаменатором?

17. В пачке 10 тетрадей, среди которых три в линейку, остальные в клеточку. Найти вероятность того, что все тетради в линейку лежат рядом друг с другом.

18. В коробке 10 плиток шоколада, среди которых 6 с орехами. Найти вероятность того, что из наудачу взятых 4 шоколадок: а) три будут с орехами, б) хотя бы одна будет с орехами.

19. В пачке 12 тетрадей, среди которых 5 в линейку, остальные в клеточку. Найти вероятность того, что среди трех наудачу взятых тетрадей: а) одна будет в линейку, б) хотя бы две будут в клеточку.

20. На карточках написаны целые числа от 1 до 15 включительно. Наудачу выбираются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на этих карточках равна 10?

21. В коробке имеются 6 красных и 15 черных ручек. Из коробки случайно вынимают 3 ручки. Какова вероятность, что: а) все три ручки черные, б) хотя бы одна ручка черная?

22. Из 60 вопросов к экзамену студент подготовил 50 вопросов. Какова вероятность сдать экзамен, если из четырех предложенных вопросов нужно ответить, по крайней мере, на два вопроса?

23. На один ряд из 7 мест случайным образом рассаживаются 7 студентов. Какова вероятность того, что трое определенных студентов окажутся рядом?

24. Какова вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число не содержит ни одной двойки?

25. Из урны, содержащей 9 белых, 9 черных, 8 синих и 8 красных шаров, наудачу извлекаются 3 шара. Какова вероятность того, что извлеченными окажутся белые или черные шары?

26. Из 30 вопросов к экзамену и 60 задач студент подготовил 10 вопросов и умеет решать 20 задач. Какова вероятность сдать экзамен, если из предложенных вопросов нужно ответить на один вопрос и из двух задач решить хотя бы одну?

27. Имеется 6 билетов в театр, из которых 4 билета в партер. Какова вероятность того, что из 3 наудачу выбранных билетов два окажутся билетами в партер?

28. Группа, состоящая из 5 юношей и 10 девушек, распределяют по жребию 4 билета в театр. Какова вероятность того, что в числе тех, кто получил билет, окажутся: а) одни юноши, б) одни девушки?

29. Билет в партер стоит 100 рублей, на бельэтаж – 80 рублей, на ярус – 60 рублей. Какова вероятность того, что взятые наудачу два билета стоят 160 рублей?

30. Из букв слова «событие», составленного с помощью разрезной азбуки, наудачу выбирают и располагают в ряд 3 буквы. Какова вероятность получить при этом слово «быт»?

Пример 2.1

Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Извлекают три кубика. Найти вероятность того, что два извлеченных кубика имеют одну окрашенную грань и один кубик – три окрашенные грани.

Решение

Событие A – два кубика имеют одну окрашенную грань и один кубик – три окрашенные грани.

Найдем вероятность $P(A)$ события A по классическому определению вероятности

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{2.1}$$

где m – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A, n – общее число произведенных испытаний.

Выборки в данной задаче неупорядоченные и без повторений. Поскольку всего кубиков 1000, а извлекаются 3, то

$$n=C_{1000}^{3}=\frac{1000!}{3!\cdot(1000-3)!}=\frac{1000\cdot 999\cdot 998}{1\cdot 2\cdot 3}=997002000.$$

Три окрашенные грани имеет 8 кубиков, находившихся в вершинах куба. Одну окрашенную грань имеет 384 кубика. Тогда,

$$m=C_{384}^{2}\cdot C_{8}^{1}=\frac{384!}{2!\cdot(384-2)!}\cdot\frac{8!}{1!\cdot(8-1)!}=\frac{384\cdot 383\cdot 7}{1\cdot 2}=1029504.$$

Подставим найденные значения m и n в формулу (2.1)

$$P(A)=\frac{1029504}{997002000}\approx 0{,}001.$$

Ответ: вероятность того, что два извлеченных кубика имеют одну окрашенную грань и один кубик – три окрашенные грани равна 0,001.

Задача 2.2

Задачи, соответствующие вариантам:

1. Имеются три партии ламп, насчитывающих соответственно 20, 30, 50 штук. Вероятности того, что лампа проработает гарантийный срок, равны соответственно 0,7, 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что наудачу выбранная лампа из ста данных проработает гарантийный срок? Какова вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии?

2. В экзаменационном билете два теоретических вопроса и одна задача. Всего составлены 30 билетов, содержащих разные вопросы и задачи. Студент подготовил 50 теоретических вопросов и сможет решить по билетам 24 задачи. Какова вероятность того, что, взяв наудачу один билет, студент ответит на все вопросы?

3. Количество изделий данного типа, поступающих в магазин для продажи, с заводов A, B, C пропорционально 5:7:8. Процент выпуска брака на заводах A, B и C соответственно – 5%, 4% и 3%. Какова вероятность того, что случайно приобретенное в магазине изделие окажется бракованным и брак окажется с завода B?

4. Вероятность одного попадания стрелком в мишень равна 0,8. Найти вероятность попадания в мишень в трех случаях при четырех выстрелах.

5. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при двух выстрелах равна 0,96. Найти вероятность попадания в мишень в трех случаях при четырех выстрелах.

6. Три автомата изготавливают одинаковые детали. Их производительности относятся как 2:3:5, а стандартные детали среди их продукции составляют соответственно 90%, 95%. 85%. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется нестандартной и изготовлена третьим автоматом?

7. В трех одинаковых коробках лежат шоколадки: в первой коробке из 20 шоколадок 5 с орехами, во второй из 16 шоколадок 7 с орехами, в третьей из 30 шоколадок 15 с орехами. Какова вероятность того, что из наудачу выбранной коробки наудачу взятая шоколадка будет с орехами?

8. По одному и тому же маршруту в течение дня совершают полет 5 самолетов. Вероятность того, что в пункт назначения самолет прибудет по расписанию, равна 0,8. Найти вероятность того, что хотя бы два самолета отклонятся от расписания.

9. Для данного участника игры вероятность кольцо на колышек равна 0,3, Какова вероятность того, что при 6 бросках а)4 кольца окажутся на колышке, в) не менее 3 колец окажутся на колышках?

10. По одному и тому же маршруту в течение дня совершают полет 4 самолетов. Вероятность того, что в пункт назначения самолет прибудет по расписанию, равна 0,9. Найти вероятность того, что по крайней мере три самолета отклонятся от расписания.

11. Вероятность того, что телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,9. Детский садик прибрел 4 телевизора. Найти вероятность того, что, по крайней мере, два телевизора не потребуют ремонта в течение гарантийного срока.

12. В одной группе обучается 25 студентов, в другой – 30 студентов, в третьей – 28 студентов. По математике на экзамене получили «отлично» 5 студентов первой группы, 5 студентов второй группы и 4 студента третьей группы. Наугад вызванный с лекции, читаемой для студентов этих трех групп, студент получил на экзамене по математике «отлично». Какова вероятность того, что этот студент учится в третьей группе?

13. Для сдачи зачета студентам необходимо подготовить 40 вопросов. Из 30 студентов группы 10 студентов подготовили ответы на все вопросы, 8 человек подготовили 25 вопросов, 7 студентов – 20 вопросов, 5 студентов подготовили только 10 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на поставленный вопрос. Какова вероятность того, что этот студент подготовил только половину вопросов?

14. В группе 10 юношей стреляют по мишени, из них 5 юношей могут попасть в цель с вероятностью 0,7, двое – с вероятностью 0,9, один – с вероятностью 0,4, остальные – с вероятностью 0,8.В мишень при выстреле попали. Какова вероятность, что это был один из 5 юношей, которые стреляют с вероятностью 0,7?

15. По одному и тому же маршруту в течение дня совершают полет 4 самолета. Вероятность того, что в пункт назначения самолет прибудет по расписанию, равна 0,7. Найти вероятность того, что два самолета отклонятся от расписания.

16. На самолете имеются 4 двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя равна 0,95. Найти вероятность того, что могут появиться неполадки а) в одном двигателе, в) хотя бы в одном двигателе.

17. Тест состоит из 4 вопросов, на каждый из которых дается 5 ответов, один из которых правильный. Какова вероятность того, что при простом угадывании правильный ответ будет дан а) на три вопроса, в) не мене чем на три вопроса?

18. В горном районе имеется 4 автоматические сейсмические станции. Каждая из станций может выйти из строя в течение года с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что года не менее двух станций потребуют ремонт.

19. Вероятность перерасхода энергии за сутки равна 0,3. Какова вероятность того, что в течение пяти из семи дней будет перерасход энергии?

20. Вероятность отказа прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести (приборы испытываются независимо друг от друга)?

21. Вероятность попадания в цель пи одном выстреле равна 0,85. Стрелок делает 25 независимых выстрелов. Найти наивероятнейшее число попаданий.

22. На самолете имеются 4 двигателя. Вероятность нормальной работы двух двигателей равна 0,95, двух других – 0,9. Найти вероятность того, что могут появиться неполадки а) в одном двигателе, в) хотя бы в одном двигателе.

23. Известно, что вероятность прорастания семян данной партии зерна равна 0,95. Сколько семян следует взять из этой партии, чтобы наивероятнейшее число взошедших семян равнялось 100?

24. Магазин получил 50 изделий. Вероятность наличия нестандартного изделия равна 0,05. Найти наивероятнейшее число нестандартных изделий в этой партии.

25. При высаживании рассады помидоров 80% растений приживается. Найти вероятность того, что приживутся не менее 5 кустов из 6 посаженных.

26. Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

27. Прибор состоит из 6 элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента – 0,7. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы работало не менее двух элементов. Какова вероятность того, что прибор будет работать безотказно?

28. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 0,1. Какова вероятность того, что из 6 купленных билетов хотя бы один окажется выигрышным?

29. В группе 30 студентов, из них 20 девушек. К семинару не подготовились 5 девушек и 4 юноши. Наудачу вызванный студент оказался неподготовленным. Какова вероятность того, что это был юноша?

30. Вероятность сдачи студентом зачета равна 0,9. В сессию надо сдать 4 зачета и 3 экзамена. Если студент сдал все зачеты, то он допускается к экзамену, вероятность сдачи каждого экзамена равна 0,8. Какова вероятность сдачи студентом всех зачетов и не менее двух экзаменов?

Пример 2.2

Работают четыре магазина по продаже стиральных машин. Вероятность отказа покупателю вследствие отсутствия товара в каждом магазине равна 0,1. Считая, что ассортимент товара в магазинах формируется независимо от других, определить вероятность того, что покупатель получит отказ во всех магазинах; не получит отказ ни в одном из магазинов. Найти наиболее вероятное число магазинов, дающих отказ.

Решение

Событие A – покупатель получит отказ во всех магазинах; событие B – покупатель не получит отказ ни в одном из магазинов.

Тогда $P(A)$ – вероятность того, что в $n=4$ независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p=0{,}1$, событие A наступит ровно $k=4$ раза. По формуле Бернулли

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{2.2}$$

где $q=1-p$, получим

$$P(A)=P_4(4)=C_4^4\cdot 0{,}1^4\cdot(1-0{,}1)^{4-4}=\frac{4!}{4!(4-4)!}\cdot 0{,}0001\cdot 0{,}9^0=0{,}0001.$$

Аналогично по формуле (2.2) находим $P(B)$, где $k=0$

$$P(B) = P_4(0) = C_4^0 \cdot 0{,}1^0 \cdot (1-0{,}1)^{4-0} = \frac{4!}{0!(4-0)!} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561.$$

Для нахождения наиболее вероятного числа успехов k_0 в серии из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна p, можно воспользоваться двойным неравенством

$$np - q \le k_0 \le np + p. \tag{2.3}$$

Подставим данные задачи в формулу (2.3)

$$4 \cdot 0{,}1 - 0{,}9 \le k_0 \le 4 \cdot 0{,}1 + 0{,}1,$$

$$-0{,}5 \le k_0 \le 0{,}5.$$

По условию k_0 – целое, поэтому из последнего неравенства находим $k_0 = 0$.

Ответ: вероятность того, что покупатель получит отказ во всех магазинах равна 0,0001; вероятность того, что покупатель не получит отказ ни в одном из магазинов – 0,6561, 0 – наиболее вероятное число магазинов, дающих отказ.

Задача 2.3. Из n частных банков, работающих в городе, нарушения в оплате налогов имеют место в m банках. Налоговая инспекция проводит проверку четырех банков, выбирая их случайным образом. Банки проверяются независимо друг от друга. Допущенные в проверяемом банке нарушения могут быть обнаружены налоговой инспекцией с вероятностью p. Какова вероятность того, что в ходе проверки будет установлен факт наличия среди частных банков города таких банков, которые допускают нарушения в оплате налогов? Если установлен факт наличия среди частных банков города таких, которые допускают нарушения в оплате налогов, то какова вероятность того, что среди случайным образом отобранных четырех банков оказалось таких i банков?

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $n = 24, m = 9, p = 0{,}7, i = 2$;
2) $n = 30, m = 8, p = 0{,}8, i = 1$;
3) $n = 33, m = 10, p = 0{,}9, i = 3$;
4) $n = 26, m = 7, p = 0{,}7, i = 4$;
5) $n = 26, m = 5, p = 0{,}8, i = 2$;
6) $n = 24, m = 5, p = 0{,}9, i = 0$;
7) $n = 29, m = 8, p = 0{,}7, i = 2$;
8) $n = 28, m = 10, p = 0{,}8, i = 3$;
9) $n = 27, m = 8, p = 0{,}9, i = 4$;
10) $n = 31, m = 10, p = 0{,}9, i = 2$;
11) $n = 25, m = 6, p = 0{,}7, i = 1$;
12) $n = 24, m = 7, p = 0{,}8, i = 0$;
13) $n = 32, m = 10, p = 0{,}8, i = 3$;
14) $n = 25, m = 8, p = 0{,}9, i = 1$;
15) $n = 24, m = 8, p = 0{,}7, i = 0$;
16) $n = 28, m = 9, p = 0{,}8, i = 4$;
17) $n = 27, m = 6, p = 0{,}9, i = 1$;
18) $n = 28, m = 8, p = 0{,}7, i = 3$;
19) $n = 32, m = 11, p = 0{,}8, i = 0$;
20) $n = 25, m = 7, p = 0{,}9, i = 1$;
21) $n = 24, m = 6, p = 0{,}7, i = 4$;
22) $n = 29, m = 10, p = 0{,}8, i = 2$;
23) $n = 26, m = 6, p = 0{,}7, i = 0$;
24) $n = 30, m = 11, p = 0{,}9, i = 3$;

25) $n=29, m=9, p=0,7, i=3$; 28) $n=33, m=12, p=0,8, i=1$;
26) $n=28, m=7, p=0,9, i=4$; 29) $n=31, m=9, p=0,7, i=4$;
27) $n=34, m=11, p=0,7, i=0$; 30) $n=26, m=8, p=0,8, i=2$.

Пример 2.3

Из 27 частных банков, работающих в городе, нарушения в оплате налогов имеют место в 7 банках. Налоговая инспекция проводит проверку четырех банков, выбирая их случайным образом. Банки проверяются независимо друг от друга. Допущенные в проверяемом банке нарушения могут быть обнаружены налоговой инспекцией с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что в ходе проверки будет установлен факт наличия среди частных банков города таких банков, которые допускают нарушения в оплате налогов? Если установлен факт наличия среди частных банков города таких, которые допускают нарушения в оплате налогов, то какова вероятность того, что среди случайным образом отобранных четырех банков оказалось таких 2 банка?

Решение

Введем обозначения:

Событие A – в ходе проверки будет установлен факт наличия среди частных банков города таких банков, которые допускают нарушения в оплате налогов.

Гипотезы: H_i – среди выбранных для проверки четырех банков ровно в i банках имеют место нарушения в оплате налогов, $i=0;1;2;3;4$.

События H_0, H_1, H_2, H_3, H_4 образуют полную группу несовместных событий. Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right), \tag{2.4}$$

где $P(H_i)$ – вероятности гипотез H_i; $P\left(A/H_i\right)$ – условные вероятности события A относительно гипотез H_i, $i=0;1;2;3;4$.

Вычислим вероятности гипотез по формуле (2.1). Поскольку выборки банков неупорядоченные и без повторений, то

$$P(H_0)=\frac{C_{20}^4\cdot C_7^0}{C_{27}^4}=\frac{20!\cdot 4!\cdot 23!}{4!\cdot 16!\cdot 27!}=0,2761;$$

$$P(H_1)=\frac{C_{20}^3\cdot C_7^1}{C_{27}^4}=\frac{20!\cdot 7!\cdot 4!\cdot 23!}{3!\cdot 17!\cdot 1!\cdot 6!27!}=0,4547;$$

$$P(H_2)=\frac{C_{20}^2\cdot C_7^2}{C_{27}^4}=\frac{20!\cdot 7!\cdot 4!\cdot 23!}{2!\cdot 18!\cdot 2!\cdot 5!27!}=0,2273;$$

$$P\left(H_3\right)=\frac{C_{20}^1\cdot C_7^3}{C_{27}^4}=\frac{20!\cdot 7!\cdot 4!\cdot 23!}{1!\cdot 19!\cdot 3!\cdot 4!27!}=0,0399;$$

$$P\left(H_4\right)=\frac{C_{20}^0\cdot C_7^4}{C_{27}^4}=\frac{7!\cdot 4!\cdot 23!}{4!\cdot 3!27!}=0,002.$$

Проверим условие нормировки:

$$\sum_{i=1}^{4}P\left(H_i\right)=0,2761+0,4547+0,2273+0,0399+0,002=1.$$

Найдем $P\left(A/H_i\right)$, $i=0;1;2;3;4$, т.е. найдем вероятности того, что нарушения в оплате налогов будут выявлены хотя бы в одном из проверяемых четырех банков в каждом рассматриваемом случае.

Вероятность появления события A хотя бы раз в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p составляет

$$P\left(A\right)=1-q^n, \tag{2.5}$$

где $q=1-p$.

По условию $p=0,8$, следовательно, $q=0,2$. Банки проверяются независимо друг от друга, поэтому по формуле (2.5) находим

$$P\left(A/H_0\right)=1-0,2^0=0; \qquad P\left(A/H_3\right)=1-0,2^3=0,992;$$

$$P\left(A/H_1\right)=1-0,2^1=0,8; \qquad P\left(A/H_4\right)=1-0,2^4=0,9984.$$

$$P\left(A/H_2\right)=1-0,2^2=0,96;$$

Подставим найденные значения в формулу (2.4)

$$P\left(A\right)=0,2761\cdot 0+0,4547\cdot 0,8+0,2273\cdot 0,96+0,0399\cdot 0,992+$$
$$+0,002\cdot 0,9984=0,6235$$

Согласно обозначениям $P\left(H_2/A\right)$ – вероятность того, что среди случайным образом отобранных четырех банков оказалось 2 банка, которые допускают нарушения в оплате налогов, если установлен факт наличия среди частных банков города таковых. Воспользуемся формулой Байеса

$$P\left(H_i/A\right)=\frac{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A/H_i\right)}{P\left(A\right)}, \tag{2.6}$$

Подставляя необходимые значения в формулу (2.6) получим

$$P\left(\frac{H_2}{A}\right)=\frac{P(H_2)\cdot P\left(\frac{A}{H_2}\right)}{P(A)}=\frac{0,2273\cdot 0,96}{0,6235}=0,35.$$

Ответ: вероятность того, что в ходе проверки будет установлен факт наличия среди частных банков города таких банков, которые допускают нарушения в оплате налогов равна 0,6235. 0,35 – вероятность того, что среди случайным образом отобранных четырех банков оказалось 2 банка, которые допускают нарушения в оплате налогов, если установлен факт наличия среди частных банков города таковых.

Задача 2.4. Предприниматель может получить кредиты в трех независимо работающих друг от друга банках. В первом банке он может получить A млн. руб. с вероятностью $\frac{1}{m+1}$, во втором банке – B млн. руб. с вероятностью $\frac{1}{m}$, в третьем банке – C млн. руб. с вероятностью $\frac{1}{m-1}$. Необходимо:

а) найти закон распределения случайной величины X – возможной суммы кредитов и построить многоугольник распределения;

б) найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины X;

в) найти функцию распределения дискретной случайной величины X, построить ее график и найти вероятность того, что предприниматель получит кредит в размере от 35 до 50 млн. руб.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $A=10, B=25, C=10, m=3$;
2) $A=20, B=10, C=15, m=4$;
3) $A=10, B=10, C=20, m=4$;
4) $A=15, B=5, C=20, m=5$;
5) $A=5, B=10, C=15, m=6$;
6) $A=15, B=15, C=20, m=6$;
7) $A=10, B=20, C=10, m=4$;
8) $A=20, B=15, C=5, m=5$;
9) $A=5, B=10, C=25, m=3$;
10) $A=15, B=15, C=20, m=6$;
11) $A=10, B=20, C=25, m=4$;
12) $A=5, B=15, C=25, m=5$;
13) $A=10, B=20, C=30, m=5$;
14) $A=15, B=10, C=25, m=4$;
15) $A=5, B=15, C=20, m=3$;
16) $A=20, B=5, C=25, m=4$;
17) $A=10, B=10, C=5, m=5$;
18) $A=15, B=10, C=25, m=6$;
19) $A=25, B=5, C=20, m=3$;
20) $A=25, B=5, C=15, m=5$;
21) $A=20, B=10, C=10, m=6$;
22) $A=10, B=15, C=5, m=4$;
23) $A=5, B=20, C=15, m=6$;
24) $A=15, B=10, C=5, m=3$;
25) $A=10, B=10, C=15, m=5$;
26) $A=20, B=5, C=15, m=4$;
27) $A=15, B=10, C=5, m=6$;
28) $A=10, B=5, C=10, m=3$;
29) $A=20, B=15, C=10, m=5$;
30) $A=15, B=15, C=5, m=6$.

Пример 2.4

Предприниматель может получить кредиты в трех независимо работающих друг от друга банках. В первом банке он может получить 35 млн. руб. с вероятностью $\frac{1}{4}$, во втором банке – 15 млн. руб. с вероятностью $\frac{1}{2}$, в третьем банке – 25 млн. руб. с вероятностью $\frac{1}{3}$. Необходимо:

а) найти закон распределения случайной величины X – возможной суммы кредитов и построить многоугольник распределения;

б) найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины X;

в) найти функцию распределения дискретной случайной величины X, построить ее график и найти вероятность того, что предприниматель получит кредит в размере от 35 до 50 млн. руб.

Решение

а) Пусть событие A_i – получение кредита в i-ом банке, $i = 1; 2; 3$. Тогда по условию

$$P(A_1) = \frac{1}{4};\ P(A_2) = \frac{1}{2};\ P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Поскольку банки работают независимо друг от друга (события A_1, A_2, A_3 – независимы), то предприниматель может получить кредиты как в одном банке, так и в нескольких одновременно, следовательно, возможные суммы кредитов (x_i млн. руб.): 0; 15; 25; 35; 40; 50; 60; 75. Найдем вероятности p_i получения этих сумм, $i = \overline{0;7}$.

$$p_0 = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4};$$

$$p_1 = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4};$$

$$p_2 = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8};$$

$$p_3 = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12};$$

$$p_4 = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8};$$

$$p_5 = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12};$$

$$p_6 = P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{24};$$

$$p_7 = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{24}.$$

Закон распределения случайной величины X – возможной суммы кредитов

x_i	0	15	25	35	40	50	60	75
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$

где x_i – возможные значения случайной величины X, p_i – соответствующие этим значениям вероятности.

Проверим условие нормировки:

$$\sum_{i=0}^{7} p_i = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24} = 1.$$

Многоугольник распределения – ломаная линия, соединяющая точки с координатами $(x_i; p_i)$, $i=\overline{0,n}$ (рис. 3).

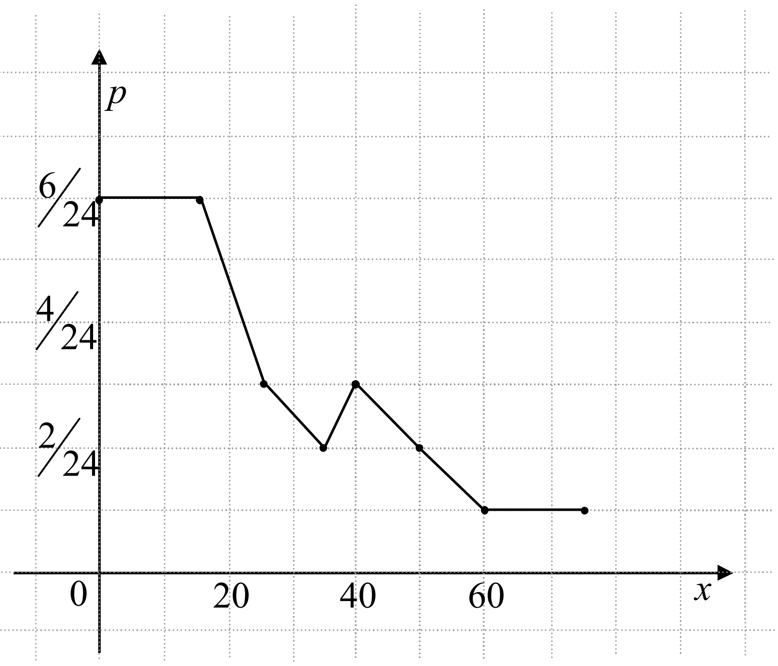

Рис. 3

б) Математическое ожидание дискретной случайной величины:

$$M(X) = \sum_{i=0}^{7} x_i p_i = 0\cdot\frac{1}{4} + 15\cdot\frac{1}{4} + 25\cdot\frac{1}{8} + 35\cdot\frac{1}{12} + 40\cdot\frac{1}{8} + 50\cdot\frac{1}{12} +$$

$$+60\cdot\frac{1}{24} + 75\cdot\frac{1}{24} = 24\frac{7}{12} \approx 24{,}58.$$

Дисперсия:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=0^2\cdot\frac{1}{4}+15^2\cdot\frac{1}{4}+25^2\cdot\frac{1}{8}+35^2\cdot\frac{1}{12}+40^2\cdot\frac{1}{8}+$$

$$+50^2\cdot\frac{1}{12}+60^2\cdot\frac{1}{24}+75^2\cdot\frac{1}{24}-\left(24\frac{7}{12}\right)^2\approx 424,83.$$

Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{424,83}\approx 20,61.$$

Ответ: $M(X)=24,58$ млн. руб., $D(X)=424,83$, $\sigma(X)=20,61$ млн. руб.

в) Функция распределения дискретной случайной величины определяется формулой $F(x)=p(X<x)$. На основе закона распределения X – возможной суммы кредитов, получаем функцию распределения, график которой изображен на рис. 4

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad x\le 0,\\ 1/4,\ 0<x\le 15,\\ 1/2,\ 15<x\le 25,\\ 5/8,\ 25<x\le 35,\\ 17/24,\ 35<x\le 40,\\ 20/24,\ 40<x\le 50,\\ 22/24,\ 50<x\le 60,\\ 23/24,\ 60<x\le 75,\\ 1, \quad x>75.\end{cases}$$

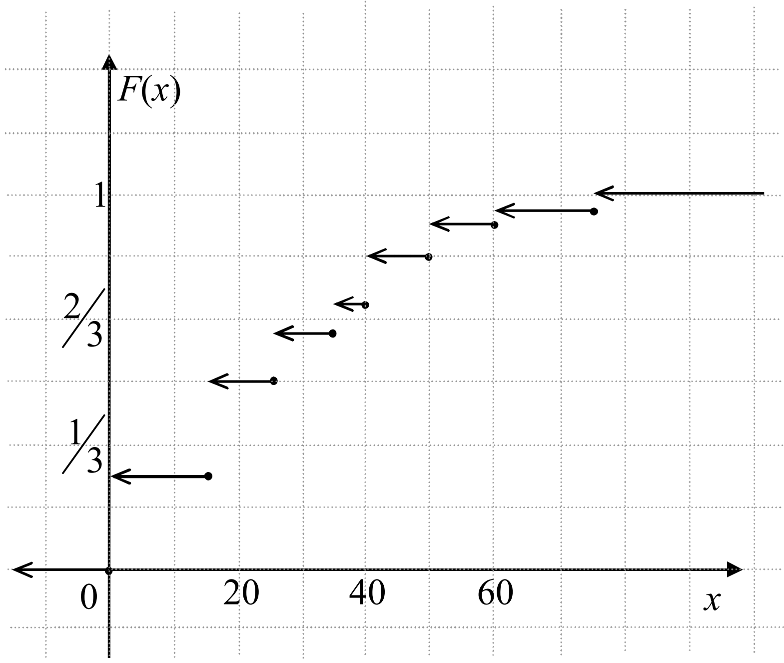

Рис. 4

Вероятность того, что предприниматель получит кредит в размере от 35 до 50 млн. руб. найдем с помощью функции распределения

$$P(35\le X\le 50)=P(35\le X<60)=F(60)-F(35)=\frac{22}{24}-\frac{5}{8}=\frac{7}{24}.$$

Ответ: вероятность того, что предприниматель получит кредит в размере от 35 до 50 млн. руб. составляет $\frac{7}{24}$.

Задача 2.5. Случайная величина X – годовой доход наугад взятого лица, облагаемого налогом. Ее плотность вероятности имеет вид :

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le b,\\ a\cdot x^{-1-n}, \text{ при } x>b.\end{cases}$$

Требуется найти: а) значение параметра a; б) функцию распределения $F(x)$ случайной величины X; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение; г) размер годового дохода, не ниже которого с вероятностью 0,6 окажется годовой доход случайно выбранного налогоплательщика; д) построить графики функций $F(x)$, $f(x)$.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $b=4, n=2,4$;
2) $b=2, n=2,1$;
3) $b=3, n=2,6$;
4) $b=3, n=2,3$;
5) $b=5, n=2,4$;
6) $b=4, n=2,0$;
7) $b=2, n=2,2$;
8) $b=6, n=2,1$;
9) $b=3, n=2,5$;
10) $b=4, n=2,2$;
11) $b=5, n=2,0$;
12) $b=5, n=2,5$;
13) $b=2, n=2,3$;
14) $b=6, n=2,4$;
15) $b=3, n=2,0$;
16) $b=4, n=2,5$;
17) $b=2, n=2,4$;
18) $b=5, n=2,3$;
19) $b=5, n=2,1$;
20) $b=2, n=2,0$;
21) $b=6, n=2,0$;
22) $b=4, n=2,6$;
23) $b=4, n=2,1$;
24) $b=4, n=2,3$;
25) $b=6, n=2,2$;
26) $b=3, n=2,4$;
27) $b=5, n=2,2$;
28) $b=3, n=2,1$;
29) $b=3, n=2,2$;
30) $b=6, n=2,3$.

Пример 2.5

Случайная величина X – годовой доход наугад взятого лица, облагаемого налогом. Ее плотность вероятности имеет вид :

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 7,\\ a\cdot x^{-3,7}, \text{ при } x>7.\end{cases}$$

Требуется найти: а) значение параметра a; б) функцию распределения $F(x)$ случайной величины X; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение; г) размер годового дохода, не ниже которого с вероятностью 0,6 окажется годовой доход случайно выбранного налогоплательщика; д) построить графики функций $F(x)$, $f(x)$.

Решение

а) Для непрерывных случайных величин выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{7} 0dx+\int_{7}^{+\infty} a\cdot x^{-3,7}dx=1.$$

Вычислим несобственные интегралы

$$0+\lim_{b\to+\infty} a\cdot\frac{x^{-2,7}}{-2,7}\Bigg|_7^b=1,$$

$$a\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-2,7}}{-2,7}-\frac{7^{-2,7}}{-2,7}\right)=1,$$

$$a\cdot\left(0-\frac{7^{-2,7}}{-2,7}\right)=1.$$

Из последнего равенства находим значение a

$$a=2,7\cdot 7^{2,7}\text{, тогда } f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 7,\\ 2,7\cdot 7^{2,7}x^{-3,7}, \text{ при } x>7.\end{cases}$$

Ответ: $a=2,7\cdot 7^{2,7}$.

б) Функцию распределения найдем по формуле

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \tag{2.7}$$

Разобьем числовую прямую на промежутки, соответствующие различным значениям плотности распределения X – годового дохода наугад взятого лица, облагаемого налогом.

Если $x\le 7$, то согласно (2.7)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0.$$

Если $x>7$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{7} 0dx+2,7\cdot 7^{2,7}\int_{7}^{x} x^{-3,7}dx=2,7\cdot 7^{2,7}\cdot\frac{x^{-2,7}}{-2,7}\Bigg|_7^x=1-\left(\frac{7}{x}\right)^{2,7}.$$

Тогда,

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 7,\\ 1-\left(\dfrac{7}{x}\right)^{2,7}, \text{ при } x>7.\end{cases}$$

Ответ: $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 7,\\ 1-\left(\dfrac{7}{x}\right)^{2,7}, \text{ при } x>7.\end{cases}$

в) Найдем числовые характеристики случайной величины X.

Математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{7} 0\cdot x\,dx+2,7\cdot 7^{2,7}\int_{7}^{+\infty} x\cdot x^{-3,7}dx=$$

$$=0+2,7\cdot 7^{2,7}\int\limits_{7}^{+\infty}x^{-2,7}dx=2,7\cdot 7^{2,7}\cdot\left.\frac{x^{-1,7}}{-1,7}\right|_{7}^{+\infty}=2,7\cdot 7^{2,7}\cdot\frac{7^{-1,7}}{1,7}\approx 11,12.$$

Дисперсия:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-11,12^2=2,7\cdot 7^{2,7}\int\limits_{7}^{+\infty}x^{-1,7}dx=$$

$$=2,7\cdot 7^{2,7}\cdot\left.\frac{x^{-0,7}}{-0,7}\right|_{7}^{+\infty}-11,12^2=2,7\cdot 7^{2,7}\cdot\frac{7^{-0,7}}{0,7}-11,12^2\approx 65,35.$$

Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{65,35}=8,08.$$

Ответ: $M(X)=11,12$ ден.ед, $D(X)=65,35$, $\sigma(X)=8,08$ ден.ед.

г) Определим x_1 – размер годового дохода – такой, что $P\left(X\geq x_1\right)=0,6$. Поскольку

$$P(X<x)+P(X\geq x)=1 \text{ и } F(x)=P(X<x),$$

то

$$P\left(X\geq x_1\right)=1-F\left(x_1\right),$$

т.е. нужно найти решение неравенства

$$1-\left(1-\left(\frac{7}{x_1}\right)^{2,7}\right)=0,6;\ \left(\frac{7}{x_1}\right)^{2,7}=0,6;$$

откуда

$$x_1^{2,7}=\frac{7^{2,7}}{0,6},\ x_1=\left(\frac{7^{2,7}}{0,6}\right)^{\frac{10}{27}}\approx 8,458.$$

Ответ: 8,458 ден.ед.

д) При $x\leq 7$ значения функций равны нулю. При $x>7$ функция $f(x)$ убывает, $F(x)$ – возрастает. Вычислим правосторонний предел функций в точке $x=7$:

$$\lim_{x\to 7^{+0}}f(x)=\lim_{x\to 7^{+0}}\left(2,7\cdot 7^{2,7}x^{-3,7}\right)=\frac{2,7}{7}\approx 0,39.$$

$$\lim_{x\to 7^{+0}}F(x)=\lim_{x\to 7^{+0}}\left(1-\left(\frac{7}{x}\right)^{2,7}\right)=0.$$

Таким образом, плотность вероятности $f(x)$ имеет разрыв в точке $x=7$.

При больших значениях аргумента значение функции $f(x)$ стремится к нулю, а функции $F(x)$ – к единице.

Графики плотности вероятности и функции распределения случайной величины X – годового дохода наугад взятого лица, облагаемого налогом, изображены на рис. 5 и рис. 6 соответственно.

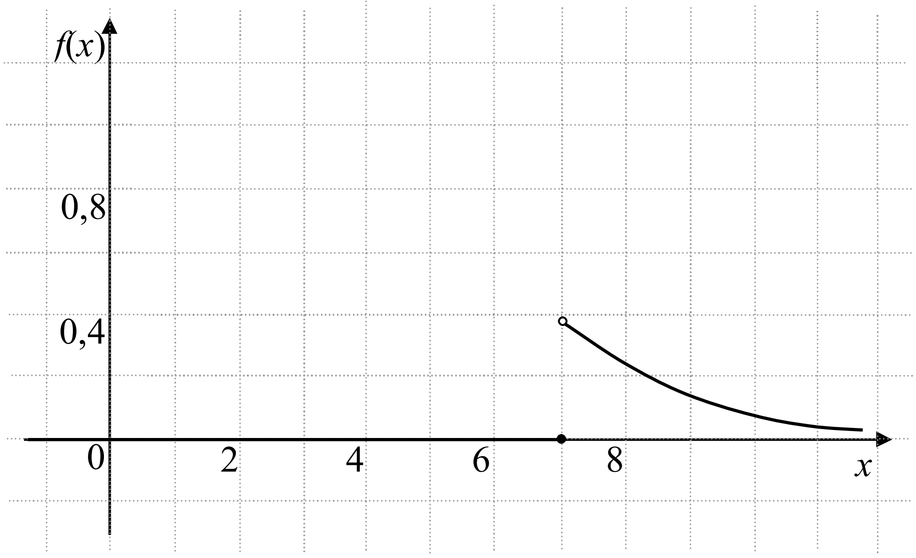

Рис. 5

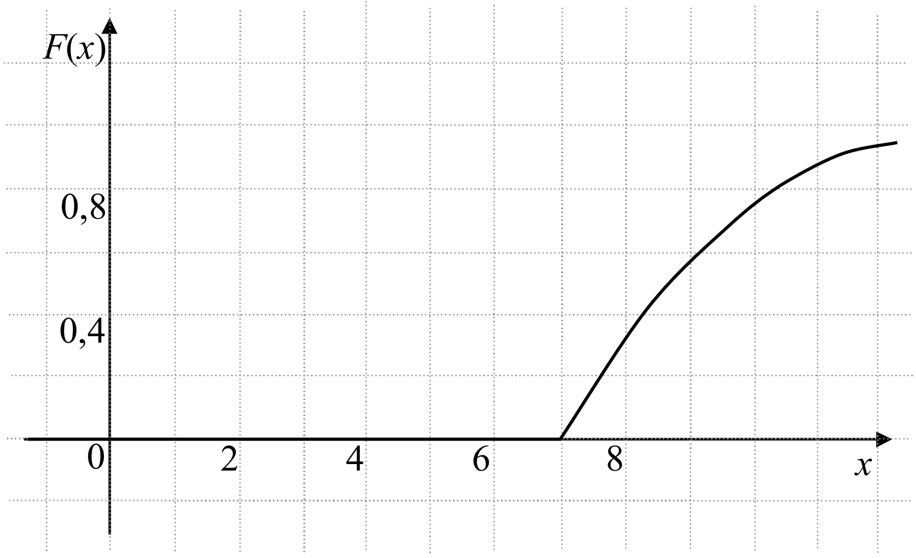

Рис. 6

Задача 2.6. Путем проверки размеров дневной выручки магазина по 100 рабочим дням получены следующие данные:

Выручка (у.е.)	**0-5**	**5-10**	**10-15**	**15-20**	**20-25**	**25-30**	**30-35**	**35-40**	**40-45**	**45-50**
Число дней	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9	N_{10}

Требуется: а) изобразить графически данную таблицу частот; б) найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины X – дневной выручки магазина; в) построить эмпирическую функцию распределения случайной величины X – выручки магазина в случайно взятый день; г) найти вероятность того, что в наудачу выбранный день выручка составит не менее 20 у.е.; д) с помощью критерия Пирсона проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины X – дневной выручки магазина при уровне значимости α; е) найти доверительные интервалы для оценки среднего значения и среднего квадратичного отклонения случайной величины X с надежностью γ.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

№	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9	N_{10}	α	γ
1)	1	3	5	9	20	22	18	12	7	3	0,05	0,999
2)	3	4	5	9	18	20	19	11	6	5	0,01	0,95
3)	2	4	6	8	19	21	20	12	6	2	0,01	0,999
4)	1	3	5	8	22	20	19	13	6	3	0,025	0,95
5)	2	4	6	9	20	20	17	12	7	3	0,025	0,99
6)	3	5	6	10	19	18	16	13	6	4	0,05	0,999
7)	1	4	7	10	18	21	16	12	7	4	0,01	0,95
8)	4	5	7	11	17	19	15	11	8	3	0,025	0,99
9)	2	3	7	10	18	19	17	13	7	4	0,01	0,999
10)	3	5	6	9	17	21	18	13	6	2	0,05	0,999
11)	1	2	5	8	19	21	20	15	6	3	0,025	0,95
12)	4	5	6	10	17	19	18	13	6	2	0,01	0,99
13)	2	3	5	9	19	20	21	12	7	2	0,05	0,999
14)	3	4	6	9	18	20	18	13	6	3	0,025	0,99
15)	1	4	5	8	20	21	18	14	5	4	0,01	0,95
16)	2	3	5	10	17	22	19	12	6	4	0,025	0,99
17)	1	3	6	9	17	21	18	13	7	5	0,05	0,95
18)	3	4	7	9	16	20	17	12	8	4	0,05	0,99
19)	4	6	7	10	16	19	17	12	6	3	0,01	0,999
20)	1	5	7	10	18	20	18	13	5	3	0,01	0,99
21)	2	4	7	10	17	21	18	12	6	3	0,05	0,95
22)	1	3	6	11	18	22	19	11	5	4	0,01	0,99
23)	3	5	7	11	17	20	18	11	5	3	0,05	0,999
24)	2	5	6	10	17	21	19	12	6	2	0,025	0,99
25)	4	6	7	9	16	20	18	12	5	3	0,05	0,95
26)	2	5	7	10	18	20	19	11	5	3	0,025	0,999
27)	3	6	7	10	17	20	18	11	6	2	0,01	0,95
28)	1	5	7	11	18	21	18	12	5	2	0,025	0,95
29)	1	4	6	9	18	22	19	13	5	3	0,01	0,999
30)	3	6	7	10	17	20	17	12	6	2	0,05	0,99

Пример 2.6

Путем проверки размеров дневной выручки магазина по 100 рабочим дням получены следующие данные:

Выручка (у.е.)	**0-5**	**5-10**	**10-15**	**15-20**	**20-25**	**25-30**	**30-35**	**35-40**	**40-45**	**45-50**
Число дней	2	4	8	11	17	21	15	12	7	3

Требуется: а) изобразить графически данную таблицу частот; б) найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины X – дневной выручки магазина; в) построить эмпирическую функцию распределения случайной величины X – выручки магазина в случайно взятый день; г) найти вероятность того, что в наудачу выбранный день выручка составит не менее 20 у.е.; д) с помощью критерия Пирсона проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины X – дневной выручки магазина при уровне значимости 0,05; е) найти доверительные интервалы для оценки среднего значения и среднего квадратичного отклонения случайной величины X с надежностью 0,95.

Решение

а) Интервальный вариационный ряд графически изображается с помощью гистограммы. Для ее построения в декартовой системе координат по оси Ox отложим отрезки частичных интервалов варьирования h и на этих отрезках как на основаниях построим прямоугольники с высотами

$$f^*\left(x_i\right)=\frac{n_i}{nh},$$

где n_i – частота i-го интервала, $i=\overline{1;10}$, n – объем выборки.

Необходимые для построения гистограммы (рис. 7) вычисления приведем в таблице

$\left(x_i;x_{i+1}\right]$	**0-5**	**5-10**	**10-15**	**15-20**	**20-25**	**25-30**	**30-35**	**35-40**	**40-45**	**45-50**
n_i	2	4	8	11	17	21	15	12	7	3
$f^*\left(x_i\right)$	0,004	0,008	0,016	0,022	0,034	0,042	0,03	0,024	0,014	0,006

Площадь гистограммы

$$S=h\cdot\sum_{i=1}^{10}f\left(x_i\right)=1.$$

б) Найдем статистические оценки параметров генеральной совокупности. Выборочная средняя является оценкой математического ожидания и представляет собой несмещенную оценку.

$$\overline{x}=\frac{\tilde{x}_1n_1+\tilde{x}_2n_2+\ldots+\tilde{x}_kn_k}{n}, \tag{2.8}$$

где $\tilde{x}_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ – середина частичного i-го интервала.

Выборочная дисперсия оценивает дисперсию генеральной совокупности и является смещенной оценкой.

$$D = \overline{x^2} - \overline{x}^2, \tag{2.9}$$

Несмещенной или «исправленной» оценкой дисперсии является величина s^2 равная

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D, \tag{2.10}$$

По формуле (2.8) найдем несмещенную оценку математического ожидания

$$\overline{x} = \frac{2,5 \cdot 2 + 7,5 \cdot 4 + 12,5 \cdot 8 + ... + 42,5 \cdot 7 + 47,5 \cdot 3}{100} = 26,65.$$

«Исправленная» оценка дисперсии, исходя из формул (2.9) и (2.10),

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D = \frac{100}{99} \cdot \left(\frac{2,5^2 \cdot 2 + 7,5^2 \cdot 4 + 12,5^2 \cdot 8 + ... + 47,5^2 \cdot 3}{100} - 26,65^2 \right) \approx$$

$$\approx \frac{100}{99} \cdot 104,53 = 105,58.$$

Ответ: $\overline{x} = 26,65$; $s^2 = 105,58$.

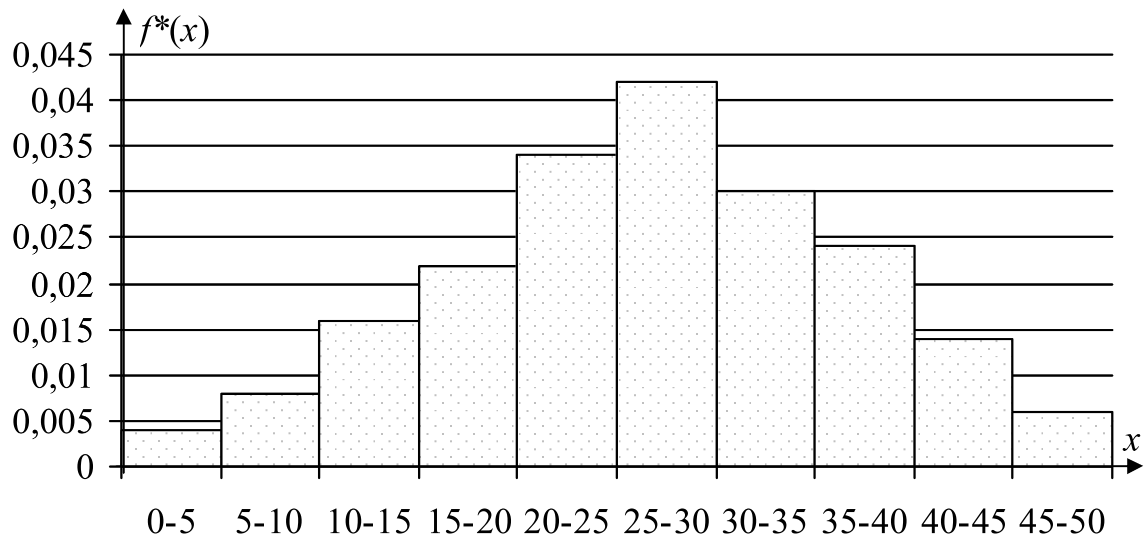

Рис. 7

в) Эмпирической функцией распределения называется функция $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n}$, где n_x – число выборочных значений величины X, меньших x, n – объем выборки. Для интервального ряда выборочную функцию распределения строят в виде непрерывной линии, соединяющей точки, первая координата которых – конец частичных интервалов, а вторая – значения функции $F^*(x)$ в виде «нарастающей относительной частоты».

Конец i-го интервала	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
n_i/n	0,02	0,04	0,08	0,11	0,17	0,21	0,15	0,12	0,07	0,03
$F^*(x)$	0,02	0,06	0,14	0,25	0,42	0,63	0,78	0,90	0,97	1

Для $x \le 0$ функция $F^*(x)=0$, т.к. $n_x = 0$, для $x > 50$ функция $F^*(x)=1$, т.к. $n_x = n$.

График эмпирической функции распределения (рис. 8):

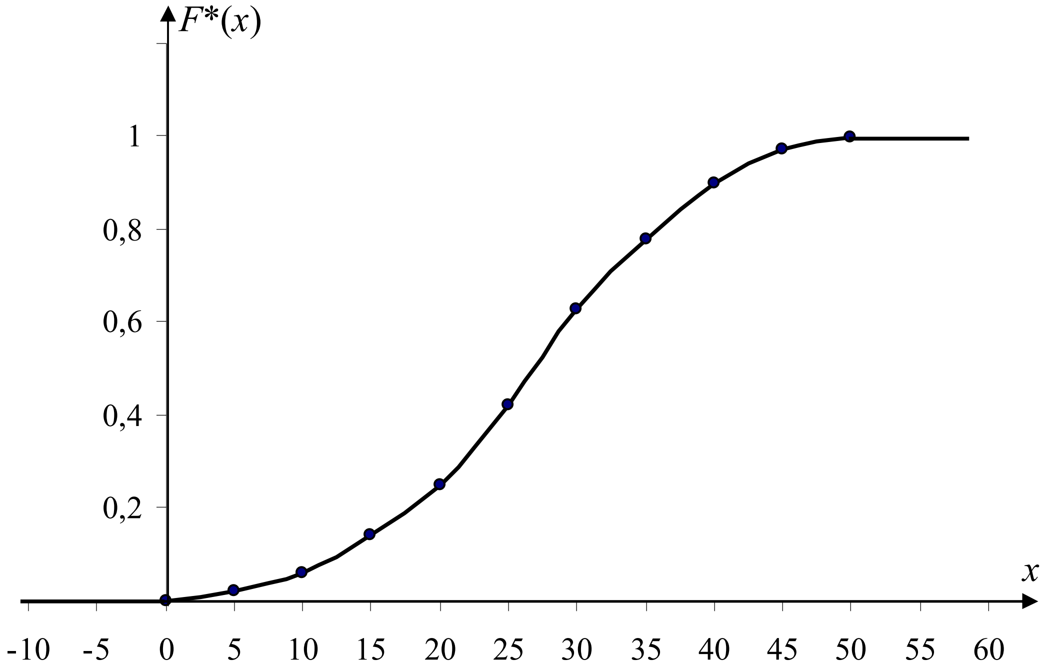

Рис. 8

г) По определению функции распределения

$$F(X) = P(X < x),$$

кроме этого, выполняется равенство

$$P(X < x) + P(X \ge x) = 1,$$

поэтому

$$P(X \ge 20) = 1 - F(20) = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Ответ: вероятность того, что в наудачу выбранный день выручка составит не менее 20 у.е. равна 0,75.

д) При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверим гипотезу H_0: генеральная совокупность – дневная выручка магазина – распределена нормально.

В исходных данных объединим интервалы, содержащие малое количество вариант (первые два интервала и последние два интервала), суммируя их частоты.

Вычислим теоретические частоты по формуле

$$np_i,\ p_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1}-\overline{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i-\overline{x}}{\sigma}\right), \qquad (2.11)$$

где $\sigma = \sqrt{D}$, $\Phi(t)$ – соответствующее значение функции Лапласа, n – объем выборки.

Из пункта б) найдем выборочное среднее квадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{104{,}53} \approx 10{,}22.$$

Все необходимые для формулы (2.11) вычисления представим в таблице

i	x_i	x_{i+1}	n_i	$\frac{x_i-\overline{x}}{\sigma}$	$\frac{x_{i+1}-\overline{x}}{\sigma}$	$\Phi\left(\frac{x_i-\overline{x}}{\sigma}\right)$	$\Phi\left(\frac{x_{i+1}-\overline{x}}{\sigma}\right)$	p_i	np_i
1	0	10	6	$-\infty$	–1,63	–0,5	–0,4484	0,05	5,16
2	10	15	8	–1,63	–1,14	–0,4484	–0,3729	0,08	7,55
3	15	20	11	–1,14	–0,65	–0,3729	–0,2422	0,13	13,07
4	20	25	17	–0,65	–0,16	–0,2422	–0,0636	0,18	17,86
5	25	30	21	–0,16	0,33	–0,0636	0,1293	0,19	19,29
6	30	35	15	0,33	0,82	0,1293	0,2939	0,16	16,46
7	35	40	12	0,82	1,31	0,2939	0,4049	0,11	11,1
8	40	50	10	1,31	∞	0,4049	0,5	0,10	9,51
$\sum$			100					1	100

Вычислим наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_i \frac{(n_i - np_i)^2}{n_i}, \qquad (2.12)$$

Все вычисления также приведем в табличной форме

i	n_i	np_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{n_i}$
1	6	5,16	0,84	0,71	0,14
2	8	7,55	0,45	0,20	0,03
3	11	13,07	–2,07	4,28	0,33
4	17	17,86	–0,86	0,74	0,04
5	21	19,29	1,71	2,92	0,15
6	15	16,46	–1,46	2,13	0,13
7	12	11,1	0,9	0,81	0,07
8	10	9,51	0,49	0,24	0,03

Итак, по формуле (2.12) получим

$$\chi^2_{\text{набл}} = 0{,}14 + 0{,}03 + 0{,}33 + 0{,}04 + 0{,}15 + 0{,}13 + 0{,}17 + 0{,}03 = 0{,}91.$$

По таблице критических точек распределения χ^2, по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = 5$ ($k = s - r - 1$, где s – число интервалов, r – число параметров предполагаемого распределения) находим

$$\chi^2_{\text{кр}}\left(0,05;5\right) = 11,1.$$

Поскольку $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу (расхождение теоретических и эмпирических частот незначимое). Таким образом, полученные данные согласуются с гипотезой о нормальном распределении случайной величины X – дневной выручки магазина.

е) Доверительный интервал для оценки математического ожидания случайной величины X с заданной надежностью γ в случае нормального распределения определяется на основе неравенств

$$\bar{x} - \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} < M < \bar{x} + \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (2.13)$$

где z – значение аргумента функции Лапласа с учетом того, что $\Phi\left(z\right) = \dfrac{\gamma}{2}$, σ – выборочное среднее квадратичное отклонение, n – объем выборки.

Как было определено выше, величина X распределена нормально, поэтому находим

$$\Phi\left(z\right) = \frac{0,95}{2} = 0,475, \ z = 1,96.$$

По формуле (2.13) получаем,

$$26,65 - \frac{1,96 \cdot 10,22}{\sqrt{100}} < M < 26,65 + \frac{1,96 \cdot 10,22}{\sqrt{100}},$$

$$24,65 < M < 28,65.$$

Доверительный интервал для оценки среднего квадратичного отклонения случайной величины X с заданной надежностью γ в случае нормального распределения определяется на основе неравенств

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q), \qquad (2.14)$$

где s – «исправленное» выборочное среднее квадратичное отклонение, $q = q\left(\gamma;n\right)$ – значение, определяемое таблицей приложения 4.

По формуле (2.14) получаем

$$10,28 \cdot (1 - 0,143) < \sigma < 10,28 \cdot (1 + 0,143),$$

$$8,81 < \sigma < 11,75.$$

Ответ: $24,65 < M < 28,65$; $8,81 < \sigma < 11,75$.

Задача 2.7. Проводится исследование спроса на некоторый вид товара. Пробные продажи показали следующие данные о зависимости дневного спроса от цены:

Цена, ден.ед.	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
Спрос, ед. товара	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5

Требуется: а) определить коэффициент корреляции между ценой P и спросом Q, построить прямую регрессии Q на P; б) используя прямую регрессии определить спрос при цене $p = p_0$ ден.ед. за ед. товара.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

№	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	p_0
1)	4	5	6	7	8	19	17	15	15	13	10
2)	11	13	15	17	19	90	75	70	58	52	14
3)	15	16	17	18	19	32	29	28	25	23	12
4)	20	22	24	26	28	11	10	8	7	6	25
5)	7	8	9	10	11	41	35	29	23	19	12
6)	9	11	13	15	17	76	66	61	52	45	16
7)	14	15	16	17	18	45	41	36	30	20	13
8)	22	24	26	28	30	35	31	28	25	20	31
9)	11	13	15	17	19	85	83	80	68	52	18
10)	15	16	17	18	19	39	33	29	23	19	10
11)	14	15	16	17	18	45	44	42	39	35	19
12)	9	11	13	15	17	91	79	61	52	45	8
13)	20	22	24	26	28	17	15	15	12	11	25
14)	4	5	6	7	8	38	35	29	28	25	11
15)	11	13	15	17	19	76	68	61	55	45	10
16)	7	8	9	10	11	28	25	21	18	17	6
17)	20	22	24	26	28	38	31	29	25	15	30
18)	14	15	16	17	18	38	34	30	25	20	12
19)	22	24	26	28	30	19	18	18	16	13	25
20)	9	11	13	15	17	70	65	59	58	50	10
21)	11	13	15	17	19	67	65	59	55	52	16
22)	15	16	17	18	19	26	24	20	19	15	14
23)	4	5	6	7	8	19	15	13	7	5	3
24)	22	24	26	28	30	40	35	32	25	21	18
25)	9	11	13	15	17	68	63	55	50	46	19
26)	20	22	24	26	28	31	28	25	19	15	15
27)	4	5	6	7	8	40	35	27	23	19	9
28)	15	16	17	18	19	65	56	54	45	43	21
29)	11	13	15	17	19	75	72	70	63	53	25
30)	7	8	9	10	11	52	44	37	35	30	4

Пример 2.7

Проводится исследование спроса на некоторый вид товара. Пробные продажи показали следующие данные о зависимости дневного спроса от цены:

Цена, ден.ед.	10	12	14	16	18
Спрос, ед. товара	91	76	68	59	53

Требуется:

а) определить коэффициент корреляции между ценой P и спросом Q, построить прямую регрессии Q на P;

б) используя прямую регрессии определить спрос при цене 15 ден.ед. за ед. товара.

Решение

а) По условию задачи P – цена товара, Q – дневной спрос на некоторый вид товара. В таблице представлены пары случайных величин $\left(p_i;q_i\right)$, $i=\overline{1;5}$ – данные о зависимости дневного спроса от цены в результате пробных продаж.

Формула коэффициента корреляции между случайными величинами P и Q:

$$r_{pq}=\frac{s_{pq}}{s_p s_q}, \tag{2.15}$$

где

$$s_p^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right)^2,\ s_q^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}q_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}q_i\right)^2 \tag{2.16}$$

$$s_{pq}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_iq_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}q_i \tag{2.17}$$

Вычисления, необходимые для расчета коэффициента корреляции между ценой и спросом приведем в таблице:

i	p_i	q_i	p_i^2	q_i^2	p_iq_i
1	10	91	100	8281	910
2	12	76	144	5776	912
3	14	68	196	4624	952
4	16	59	256	3481	944
5	18	53	324	2809	954
$\sum$	70	347	1020	24971	4672

Подставим найденные суммы в формулы (2.16) – (2.17)

$$s_p^2=\frac{1}{5}\cdot 1020-\left(\frac{1}{5}\cdot 70\right)^2=8,\ s_q^2=\frac{1}{5}\cdot 24971-\left(\frac{1}{5}\cdot 347\right)^2=177{,}84,$$

$$s_{pq}=\frac{1}{5}\cdot 4672-\frac{1}{5}\cdot 70\cdot\frac{1}{5}\cdot 347=-37{,}2.$$

По формуле (2.15) получаем

$$r_{pq} = \frac{-37,2}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{177,84}} = -0,986.$$

Таким образом, коэффициент корреляции оказался близким к -1, что указывает на сильную корреляцию между P и Q, т.е. зависимость между ценой и спросом близка к линейной. Этим можно воспользоваться при прогнозировании дневного спроса по установленной цене на товар. Для этого найдем уравнение прямой регрессии Q на P, выражающую статистическую связь между этими величинами,

$$q = ap + b, \tag{2.18}$$

где

$$a = \frac{s_{pq}}{s_p^2},\ b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i - a \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i. \tag{2.19}$$

Вычислим значения неизвестных параметров a и b по формулам (2.19)

$$a = \frac{-37,2}{8} = -4,65,\ b = \frac{1}{5} \cdot 347 + 4,65 \cdot \frac{1}{5} \cdot 70 = 134,5.$$

Итак, прямая регрессии, согласно формуле (2.18), имеет уравнение

$$q = -4,65p + 134,5.$$

Ответ: $r_{pq} = -0,986$, $q = -4,65p + 134,5$.

б) Согласно найденной в предыдущем пункте зависимости между спросом и ценой, определим величину спроса при цене 15 ден.ед.

$$q = -4,65 \cdot 15 + 134,5 = 64,75 \approx 65 \text{ ед.}$$

Ответ: предполагаемый спрос на товар при цене 15 ден.ед. составит 65 ед.

Раздел III. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В данный раздел включены задачи линейного и нелинейного программирования, транспортная задача. Экономическое содержание части задач показывает целесообразность применения математических методов в экономике.

Прежде чем приступить к решению задач, рекомендуется повторить материал первого семестра по линейной алгебре и аналитической геометрии, а также лекционный материал по соответствующим темам. Учебная литература В.И. Ермакова, Н.Ш. Кремера, М.С. Красса и Б.П. Чупрынова, Е.В. Шикина и А.Г. Чхартишвили содержит, кроме теоретических сведений по рассматриваемым темам, тексты более широкого круга задач и примеры их решения, ее изучение при самостоятельной работе способствует глубокому усвоению материала и систематизации полученных знаний.

Задача 3.1. Записать с помощью неравенств область, представляющую собой в плоскости xOy многоугольник с вершинами A, B, C.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $A(3;4), B(2;-1), C(-5;0)$;
2) $A(-4;-5), B(3;3), C(5;-2)$;
3) $A(-3;3), B(4;-1), C(-2;-4)$;
4) $A(3;-2), B(-5;-4), C(-1;6)$;
5) $A(2;5), B(-3;4), C(-2;-3)$;
6) $A(-3;2), B(-2;-5), C(6;-1)$;
7) $A(6;-4), B(-3;-7), C(-1;2)$;
8) $A(-2;-1), B(7;3), C(4;-3)$;
9) $A(3;4), B(6;2), C(1;1)$;
10) $A(-4;-5), B(-2;2), C(2;-2)$;
11) $A(3;-4), B(2;1), C(-1;-3)$;
12) $A(-4;5), B(3;-3), C(5;2)$;
13) $A(-6;-4), B(3;-7), C(1;2)$;
14) $A(3;2), B(2;-5), C(-6;-1)$;
15) $A(2;1), B(-7;3), C(-4;-3)$;
16) $A(-3;-4), B(-6;7), C(-1;1)$;
17) $A(4;-5), B(2;2), C(7;4)$;
18) $A(-3;4), B(-2;-1), C(7;1)$;
19) $A(4;-5), B(-3;3), C(-5;-2)$;
20) $A(3;5), B(-4;-3), C(2;-4)$;
21) $A(-3;-2), B(5;-4), C(1;6)$;
22) $A(-2;5), B(3;4), C(4;-4)$;
23) $A(-3;-5), B(4;2), C(-2;4)$;
24) $A(3;2), B(-5;4), C(-1;-6)$;
25) $A(2;-5), B(-3;-4), C(2;4)$;
26) $A(-3;-2), B(-2;5), C(6;1)$;
27) $A(-6;4), B(3;7), C(1;-2)$;
28) $A(2;1), B(-7;-3), C(-4;3)$;
29) $A(-3;4), B(-6;-7), C(1;-1)$;
30) $A(4;5), B(2;-2), C(7;-4)$.

Пример 3.1

Записать с помощью неравенств область, представляющую собой в плоскости xOy многоугольник с вершинами $A(4;3), B(3;-4), C(-3;1)$.

Решение

Построим многоугольник с заданными вершинами в плоскости xOy (рис. 9)

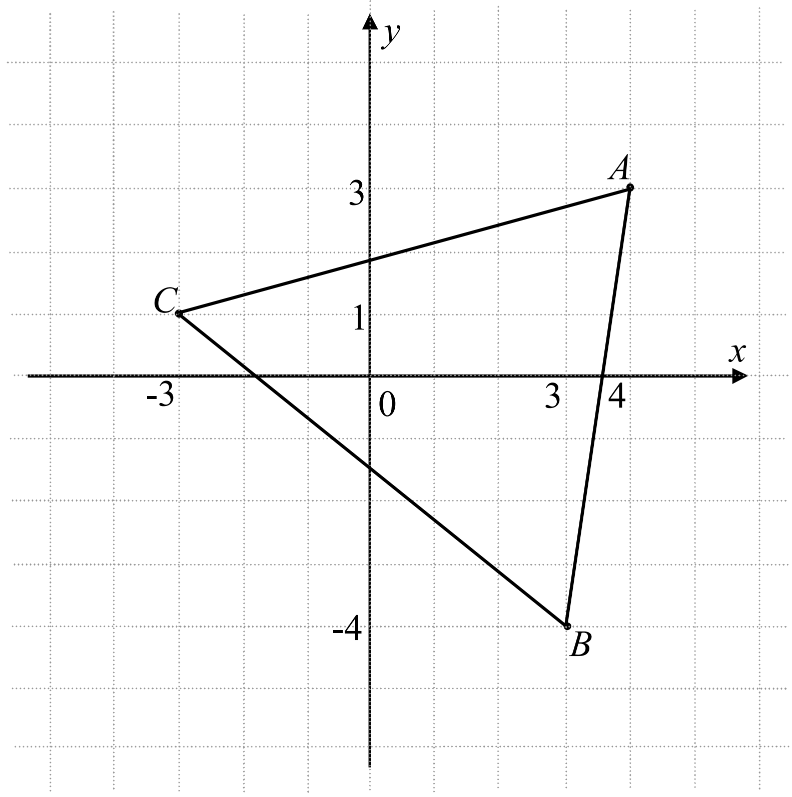

Рис. 9

Запишем уравнения прямых, которые ограничивают область. Для каждой прямой известны координаты двух точек, которые лежат на искомых линиях, поэтому по формуле (3.1) составим уравнения прямых, проходящих через две заданные точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \tag{3.1}$$

где $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ соответствующие координаты точек.

$$AB:\quad \frac{x-4}{3-4}=\frac{y-3}{-4-3},\ AC:\quad \frac{x-4}{-3-4}=\frac{y-3}{1-3},\ BC:\quad \frac{x-3}{-3-3}=\frac{y+4}{1+4},$$

откуда после преобразований записываем уравнения сторон многоугольника

$$AB:\quad 7x-y-25=0,\quad AC:\quad 2x-7y+13=0,\quad BC:\quad 5x+6y+9=0.$$

Каждое уравнение заменим на соответствующее неравенство так, чтобы оно определяло ту полуплоскость относительно этой прямой, в которой лежит многоугольник

$$\begin{cases}7x-y-25\le 0,\\ 2x-7y+13\ge 0,\\ 5x+6y+9\ge 0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}7x-y\le 25,\\ -2x+7y\le 13,\\ -5x-6y\le 9.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases}7x-y\le 25,\\ -2x+7y\le 13,\\ -5x-6y\le 9.\end{cases}$

Задача 3.2. Частное предприятие планирует выпускать продукцию двух видов A_1 и A_2, для производства которой необходимо сырье трех типов. Предприятие обеспечено сырьем каждого типа соответственно в количестве: b_1, b_2, b_3 кг. На изготовление единицы изделия первого вида требуется израсходовать сырья каждого типа соответственно в количестве: a_{11}, a_{21}, a_{31} кг., на единицу изделия второго вида – a_{12}, a_{22}, a_{32} кг. Прибыль от реализации единицы изделия первого вида составляет c_1 ден.ед, от реализации единицы изделия второго вида – c_2 ден.ед.

Тип сырья	**Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг**		**Запас сырья, кг**
	A_1	A_2	
1-й	a_{11}	a_{12}	b_1
2-й	a_{21}	a_{22}	b_2
3-й	a_{31}	a_{32}	b_3
Прибыль, ден.ед.	c_1	c_2	

Требуется составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную прибыль частного предприятия от реализации продукции, решив задачу геометрическим методом.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1)

Тип сырья	**Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг**		**Запас сырья, кг**
	A_1	A_2	
1-й	4	1	240
2-й	2	3	180
3-й	1	5	251
Прибыль, ден.ед.	40	30	

2)

Тип сырья	**Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг**		**Запас сырья, кг**
	A_1	A_2	
1-й	1	3	300
2-й	3	4	477
3-й	4	1	441
Прибыль, ден.ед.	52	39	

3)

Тип сырья	**Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг**		**Запас сырья, кг**
	A_1	A_2	
1-й	3	1	330
2-й	2	8	800
3-й	5	6	745
Прибыль, ден.ед.	33	24	

4)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	5	4	810
2-й	4	2	630
3-й	2	6	786
Прибыль, ден.ед.	34	36	

5)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	5	2	750
2-й	4	5	807
3-й	1	7	840
Прибыль, ден.ед.	30	49	

6)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	2	6	714
2-й	5	1	600
3-й	4	3	600
Прибыль, ден.ед.	13	21	

7)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	1	1	170
2-й	2	3	438
3-й	2	1	290
Прибыль, ден.ед.	22	15	

8)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	5	4	807
2-й	7	1	840
3-й	2	5	750
Прибыль, ден.ед.	49	30	

9)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	4	6	480
2-й	1	8	445
3-й	3	2	300
Прибыль, ден.ед.	21	56	

10)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	2	6	600
2-й	5	1	401
3-й	6	4	596
Прибыль, ден.ед.	20	11	

11)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	2	3	443
2-й	4	2	586
3-й	2	2	344
Прибыль, ден.ед.	66	45	

12)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	5	2	251
2-й	1	8	240
3-й	3	4	180
Прибыль, ден.ед.	15	40	

13)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	6	5	596
2-й	1	3	264
3-й	8	2	640
Прибыль, ден.ед.	32	44	

14)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	5	1	606
2-й	4	3	607
3-й	1	3	361
Прибыль, ден.ед.	39	63	

15)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	3	5	266
2-й	5	2	216
3-й	4	3	212
Прибыль, ден.ед.	75	51	

16)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	2	5	432
2-й	3	4	424
3-й	5	3	532
Прибыль, ден.ед.	34	50	

17)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	2	7	560
2-й	3	3	300
3-й	5	1	332
Прибыль, ден.ед.	55	35	

18)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	2	3	298
2-й	6	2	600
3-й	1	5	401
Прибыль	22	40	

19)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	3	4	600
2-й	3	1	357
3-й	1	5	600
Прибыль, ден.ед.	42	26	

20)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	2	4	580
2-й	4	4	680
3-й	3	2	438
Прибыль, ден.ед.	30	44	

21)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	6	4	360
2-й	5	1	251
3-й	1	4	240
Прибыль, ден.ед.	24	32	

22)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	2	2	200
2-й	1	5	332
3-й	7	2	560
Прибыль, ден.ед.	28	44	

23)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	2	4	630
2-й	3	1	393
3-й	4	5	810
Прибыль, ден.ед.	18	17	

24)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	8	6	848
2-й	3	5	532
3-й	5	2	432
Прибыль, ден.ед.	25	17	

25)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	4	1	400
2-й	6	5	745
3-й	2	6	660
Прибыль, ден.ед.	16	22	

26)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	2	4	440
2-й	6	1	300
3-й	8	3	473
Прибыль, ден.ед.	48	32	

27)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	6	2	794
2-й	4	5	819
3-й	2	4	636
Прибыль, ден.ед.	36	34	

28)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	1	5	166
2-й	7	2	280
3-й	4	4	200
Прибыль, ден.ед.	21	35	

29)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	7	1	848
2-й	2	5	757
3-й	5	4	816
Прибыль, ден.ед.	50	31	

30)

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	5	1	401
2-й	6	4	596
3-й	1	3	300
Прибыль, ден.ед.	60	33	

Пример 3.2

Частное предприятие планирует выпускать продукцию двух видов A_1 и A_2, для производства которой необходимо сырье трех типов. Запасы сырья каждого вида на предприятии; нормы расхода сырья на изготовление единицы изделия каждого вида; прибыль от реализации единицы изделия каждого вида даны в таблице

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. изделия, кг		Запас сырья, кг
	A_1	A_2	
1-й	4	4	300
2-й	2	1	122
3-й	3	2	192
Прибыль, ден.ед.	60	30	

Требуется составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную прибыль частного предприятия от реализации продукции, решив задачу геометрическим методом.

Решение

Составим математическую модель данной задачи. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида A_1 и x_2 изделий вида A_2. Поскольку производство продукции ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого типа, то должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 2x_1 + x_2 \le 122, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 192. \end{cases}$$

Количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным и дробным, поэтому

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$x_1,\ x_2 \text{ – целые.}$$

Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида A_1 и x_2 изделий вида A_2 составит

$$F = 60x_1 + 30x_2.$$

Таким образом, получаем следующую математическую задачу: среди всех целых неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такие, при котором функция F принимает максимальное значение.

Найдем решение задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах заменим знаки неравенств на знаки точных равенств и построим соответствующие прямые:

$$l_1: \quad 4x_1 + 4x_2 = 300 \Rightarrow \frac{x_1}{75} + \frac{x_2}{75} = 1;$$

$$l_2: \quad 2x_1 + x_2 = 122 \Rightarrow \frac{x_1}{61} + \frac{x_2}{122} = 1;$$

$$l_3: \quad 3x_1 + 2x_2 = 192 \Rightarrow \frac{x_1}{64} + \frac{x_2}{96} = 1;$$

$$l_4: \quad x_1 = 0;$$

$$l_5: \quad x_2 = 0.$$

Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству, а другой – нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае – другая полуплоскость (отметим на рисунке штриховкой).

Найдем полуплоскость, определяемую каждым неравенством системы ограничений задачи. Во всех случаях возьмем точку с координатами $(1;1)$

$$4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \le 300 \text{ – верно;}$$

$$2 \cdot 1 + 1 \le 122 \text{ – верно;}$$

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \leq 192 \text{ – верно;}$$
$$1 \geq 0 \text{ – верно;}$$
$$1 \geq 0 \text{ – верно;}$$

Таким образом, относительно каждой прямой искомыми являются полуплоскости, в которых лежит точка $(1;1)$. Пересечение этих полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи (пятиугольник, ограниченный штриховкой).

Строим вектор цели $\vec{c}$, координаты которого есть коэффициенты при неизвестных в целевой функции F, и прямую нулевого уровня l_0, причем $l_0 \perp \vec{c}$ (рис.10)

$$\vec{c}\,(60;30);\; l_0:\; 60x_1 + 30x_2 = 0.$$

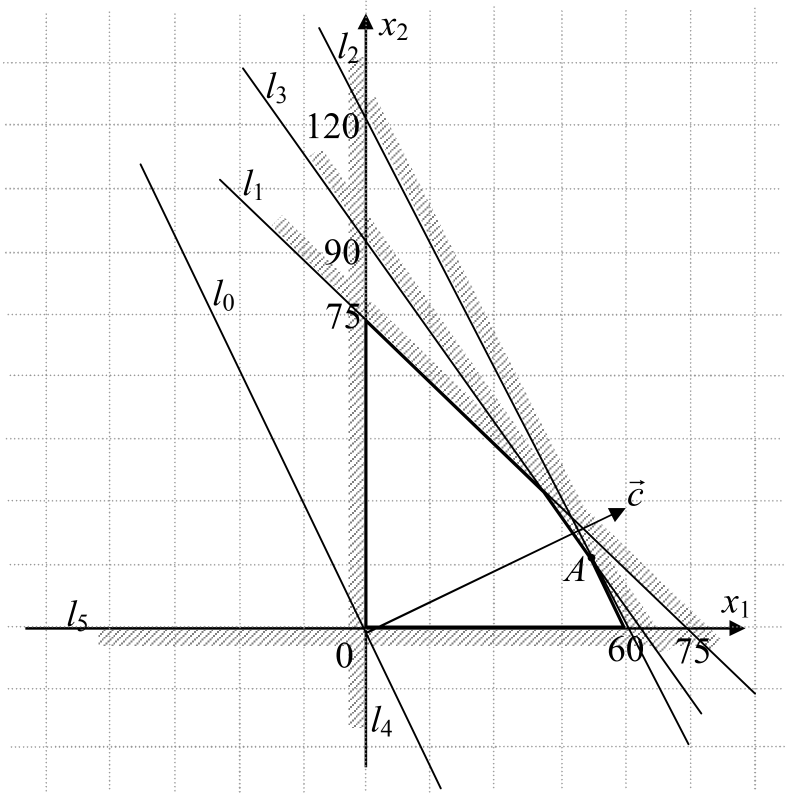

Рис. 10

Перемешаем прямую l_0 в направлении вектора $\vec{c}$ до последней общей точки ее с многоугольником решений – точки A. Если координаты этой точки целые, то они и определяют план выпуска изделий A_1 и A_2, при котором прибыль от их реализации является максимальной, иначе – целые координаты точки, ближайшей к A по направлению вектора $\vec{c}$.

Найдем координаты точки A как точки пересечения прямых l_2 и l_3:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 122, \\ 3x_1 + 2x_2 = 192; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 = -58, \\ 3x_1 + 2x_2 = 192; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = 52, \\ x_2^* = 18. \end{cases}$$

Следовательно, если предприятие изготовит 52 изделия вида A_1 и 18 изделий вида A_2, то оно получит максимальную прибыль

$$F_{\max} = 60 \cdot 52 + 30 \cdot 18 = 3660 \text{ ден.ед.}$$

Ответ: для получения максимальной прибыли от реализации продукции 3660 ден.ед. частному предприятию необходимо изготовить 52 изделия вида A_1 и 18 изделий вида A_2.

Задача 3.3. Решить задачу линейного программирования графическим методом.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $F = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_5 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 4, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

2) $F = x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 1x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

3) $F = -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = -2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

4) $F = x_1 - 3x_2 + x_4 + x_5 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

5) $F = 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = -1, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -4, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

6) $F = -x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 3, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

7) $F = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 + 5x_5 = 3, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

8) $F = x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 \to \min$,

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = -2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 2x_5 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 = 1, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

9) $F=-x_1+2x_4+x_5 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4-x_5=-2, \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4+2x_5=-1, \\ 4x_1+x_2+3x_3-x_4+x_5=1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1;5}$;

10) $F=x_1+x_2-x_3+x_4+x_5 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3+3x_4+x_5=4, \\ 5x_1+x_2-7x_3-x_4-2x_5=4, \\ 4x_1-3x_2+x_3-6x_4+x_5=-2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1;5}$;

11) $F=3x_1-x_2-x_3+x_4+2x_5 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1-5x_2+4x_3-2x_4-x_5=0, \\ 3x_1+x_2+x_3+x_4=2, \\ 5x_1-2x_2-x_3-x_4+x_5=5, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1;5}$;

12) $F=-x_2+2x_3+5x_4+2x_5 \to \min$,

$$\begin{cases} 4x_1-x_2+3x_4=0, \\ 3x_1+x_2-2x_3+x_4+x_5=4, \\ x_1+3x_2+x_3+x_5=4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1;5}$;

13) $F=-x_1+2x_2+x_3-x_5 \to \min$,

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+x_4+3x_5=4, \\ x_1+x_2+3x_3+2x_4+x_5=2, \\ -x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1;5}$;

14) $F=-3x_1+x_2-2x_3-4x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5=4, \\ x_1+x_2+x_3-4x_4-2x_5=2, \\ x_1-3x_2+x_3-4x_4+2x_5=3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1;5}$;

15) $F=2x_1-x_2+2x_3+x_5 \to \min$,

$$\begin{cases} 7x_1-6x_2+5x_3+2x_4-x_5=1, \\ 3x_1+x_2-4x_3+2x_4=-4, \\ 4x_1-4x_2+3x_3+x_5=5, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1;5}$;

16) $F=3x_1-x_2-x_3+x_4 \to \min$,

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3-3x_4+x_5=0, \\ 3x_1+x_2+x_3+x_4+2x_5=2, \\ x_1+2x_3+4x_4-x_5=5, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1;5}$;

17) $F=-2x_1+2x_3+x_5 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5=2, \\ 3x_1+x_2+x_3+x_4+2x_5=2, \\ 4x_1+x_2+3x_3+5x_4+x_5=3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1;5}$;

18) $F=x_1-x_2+3x_4+x_5 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3+5x_5=1, \\ x_1-3x_2+4x_3-5x_4-3x_5=-1, \\ 4x_1-3x_2+2x_3-5x_4+2x_5=0, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1;5}$;

19) $F=3x_2-2x_3+x_4-2x_5 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+x_4+3x_5=0, \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4-7x_5=1, \\ x_1-3x_2+x_3-7x_4+2x_5=1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1;5}$;

20) $F=-x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2-4x_3+x_4+3x_5=4, \\ 3x_1+8x_2-4x_3+2x_4+x_5=6, \\ -4x_1+3x_2-2x_3+2x_4-5x_5=3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j=\overline{1;5}$;

21) $F = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 \to \min$,
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 6x_3 + x_4 + 3x_5 = 3, \\ 1x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

22) $F = x_1 + 4x_3 + 3x_4 - 3x_5 \to \min$,
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -3, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

23) $F = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \to \min$,
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 8x_4 - 2x_5 = 4, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

24) $F = -2x_1 + x_3 + 3x_4 - x_5 \to \max$,
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

25) $F = -x_1 + 2x_2 + 3x_4 - 4x_5 \to \min$,
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 6x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

26) $F = -2x_1 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 \to \max$,
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = -3, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

27) $F = -x_1 - x_2 + x_5 \to \max$,
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

28) $F = x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 \to \min$,
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -1, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

29) $F = -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 \to \max$,
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 3x_5 = -2, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$;

30) $F = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \to \max$,
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_5 = -2, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;5}$.

Пример 3.3

Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$F = -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 7x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - 8x_5 = 3, \\ x_2 + x_3 - 4x_5 = -4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1;5}.$$

Решение

Методом Жордана–Гаусса приведем систему уравнений-ограничений задачи к равносильной

$$A|B = \left[\begin{array}{ccccc|c} \langle -1 \rangle & 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & -11 & 7 \\ 0 & \langle 1 \rangle & 1 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & \langle 3 \rangle & 3 & -3 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & -9 \end{array}\right].$$

Поскольку система совместна ($\mathrm{r} = \mathrm{rang}\ A = \mathrm{rang}\ A|B = 3$) и выполняется условие $n - r \le 2$, где n – число неизвестных системы ограничений, то данная задача линейного программирования может быть решена графическим методом.

На основе последней матрицы запишем систему в следующем виде

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - 2x_4 - x_5 = -8, \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ \qquad x_2 \qquad - x_4 - 3x_5 = -9. \end{cases} \qquad (*)$$

Выразим в системе (*) базисные неизвестные x_1, x_2, x_3 через свободные x_4, x_5

$$\begin{cases} x_1 = -8 + 2x_4 + x_5, \\ x_3 = 5 - x_4 + x_5, \\ x_2 = -9 + x_4 + 3x_5. \end{cases} \qquad (**)$$

Исключим базисные переменные из целевой функции

$$F = -(-8 + 2x_4 + x_5) - (-9 + x_4 + 3x_5) + 5 - x_4 + x_5 + 3x_4 + 7x_5 = 22 - x_4 + 4x_5.$$

По условию $x_j \ge 0,\ j = \overline{1;5}$, поэтому в преобразованных уравнениях-ограничениях (*) отбросим базисные неизвестные и заменим знаки равенства знаками неравенства «$\le$», получим вспомогательную задачу линейного программирования с двумя переменными

$$F = 22 - x_4 + 4x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_4 + x_5 \ge 8, \\ x_4 - x_5 \le 5, \\ x_4 + 3x_5 \ge 9, \end{cases}$$

$$x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

Решим задачу графическим методом. Свободный член в целевой функции 22 на отыскание оптимального решения не влияет и учитывается только при вычислении значения целевой функции.

Определим многоугольник решений

$$l_1: \quad 2x_4 + x_5 = 8,\ \frac{x_4}{4} + \frac{x_5}{8} = 1;$$

$$l_2: \quad x_4 - x_5 = 5;\ \frac{x_4}{5} + \frac{x_5}{-5} = 1;$$

$$l_3: \quad x_4 + 3x_5 = 9;\ \frac{x_4}{9} + \frac{x_5}{3} = 1;$$

$$l_4: \quad x_4 = 0;$$

$$l_5: \quad x_5 = 0.$$

Найдем полуплоскость, определяемую каждым неравенством. Возьмем точку с координатами $(5;3)$ для всех неравенств

$2 \cdot 5 + 3 \ge 8$ – верно;

$5 - 3 \le 5$ – верно;

$5 + 3 \cdot 3 \ge 9$ – верно;

$5 \ge 0$ – верно;

$5 \ge 0$ – верно;

Значит, относительно каждой прямой искомыми являются полуплоскости, в которых лежит точка $(5;3)$. Пересечение этих полуплоскостей является многоугольником решений задачи (рис. 11).

Построим вектор цели $\vec{c}(-1;4)$ и прямую нулевого уровня $l_0: -x_4 + 4x_5 = 0$. Переместим прямую l_0 в направлении противоположном вектору $\vec{c}$ до последней общей точки ее с многоугольником решений – точки A. Координаты этой точки определяют оптимальное решение вспомогательной задачи.

$A = l_2 \cap l_3$:

$$\begin{cases} x_4 - x_5 = 5, \\ x_4 + 3x_5 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 - x_5 = 5, \\ 4x_5 = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4^* = 6, \\ x_5^* = 1. \end{cases}$$

Вычислим минимальное значение целевой функции

$$F_{\min} = 22 - 6 + 4 \cdot 1 = 20.$$

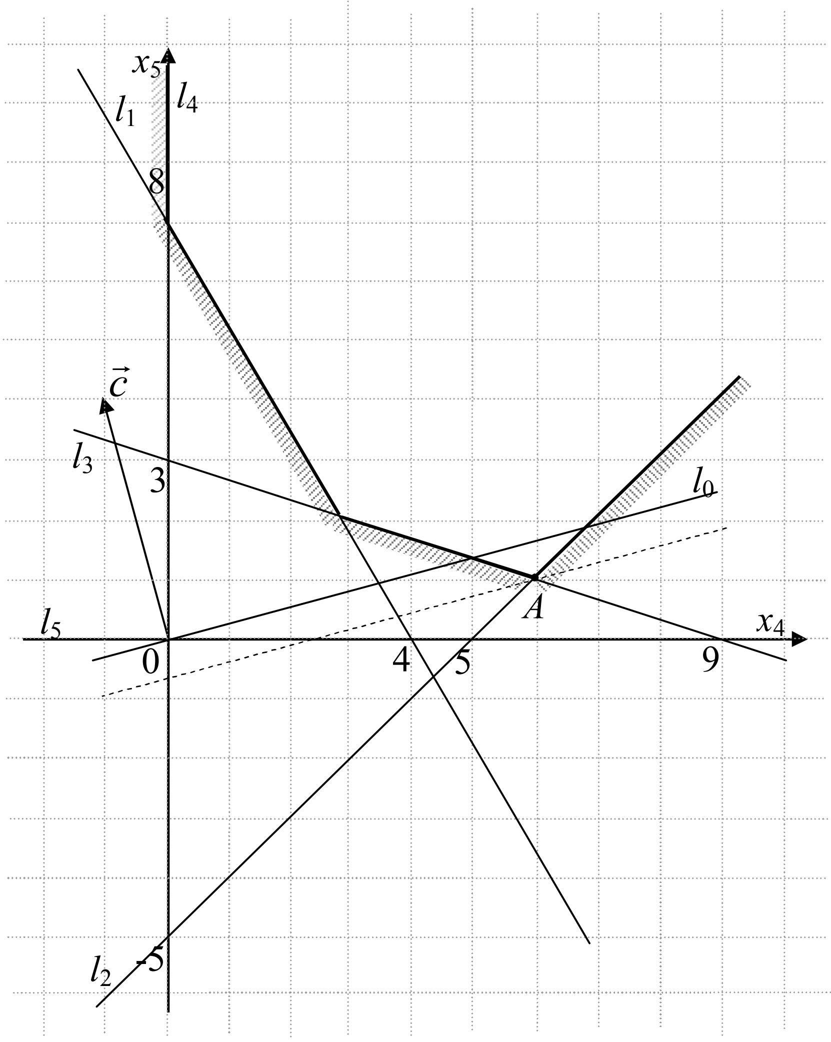

Рис. 11

Подставим найденные значения x_4^* и x_5^* в систему (**) и вычислим значения остальных переменных

$$\begin{cases} x_1 = -8 + 2 \cdot 6 + 1, \\ x_3 = 5 - 6 + 1, \\ x_2 = -9 + 6 + 3 \cdot 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_3 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, оптимальное решение исходной задачи:

$$X^* = (5; 0; 0; 6; 1).$$

Ответ: $F_{\min} = 20$ при $X^* = (5; 0; 0; 6; 1)$.

Задача 3.4. На три базы A_1, A_2, A_3 поступил однородный товар соответственно в количестве: a_1, a_2, a_3. Товар требуется перевезти в количестве b_1 единиц в магазин B_1, в количестве b_2 единиц в магазин B_2, b_3 ед. в магазин B_3, b_4 ед. в магазин B_4, b_5 ед. в магазин B_5. Матрица тарифов перевозок

(c_{ij}) **между базами и магазинами, запасы товаров на базах и потребности в товарах для магазинов заданы таблицей:**

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	a_2
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	a_3
Потребности b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	

Спланировать план перевозок таким образом, чтобы общая их стоимость была минимальной.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	14	8	17	5	3	120
A_2	21	10	7	11	6	180
A_3	3	5	8	4	9	200
Потребности b_j	70	120	105	125	110	

2)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	21	18	14	3	6	400
A_2	7	11	10	5	12	370
A_3	4	8	16	9	13	380
Потребности b_j	250	200	290	260	100	

3)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	14	8	17	5	3	530
A_2	21	10	7	11	6	570
A_3	3	5	8	4	9	600
Потребности b_j	300	380	450	370	250	

4)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	2	10	15	14	4	350
A_2	3	7	12	5	8	350
A_3	21	18	6	13	16	300
Потребности b_j	180	220	230	270	100	

5)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	12	9	7	11	6	350
A_2	4	3	12	2	8	300
A_3	5	17	9	4	11	300
Потребности b_j	180	220	230	270	100	

6)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	2	4	11	5	3	400
A_2	8	17	13	7	6	370
A_3	14	10	5	8	9	380
Потребности b_j	250	200	290	210	150	

7)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	2	4	5	11	3	120
A_2	12	8	6	14	11	150
A_3	10	15	7	9	18	100
Потребности b_j	85	65	90	60	70	

8)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	3	8	7	11	15	120
A_2	14	3	1	8	6	180
A_3	9	5	16	7	12	200
Потребности b_j	70	120	105	125	110	

9)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	11	4	15	7	2	260
A_2	20	9	7	14	5	400
A_3	18	10	3	8	6	240
Потребности b_j	180	200	190	230	100	

10)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	12	9	7	11	6	150
A_2	4	3	12	2	8	170
A_3	5	17	9	4	11	260
Потребности b_j	100	70	150	150	80	

11)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	7	4	15	9	14	170
A_2	11	2	7	3	10	150
A_3	4	5	12	8	17	180
Потребности b_j	90	120	110	130	70	

12)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	2	4	11	5	3	350
A_2	8	17	13	7	6	200
A_3	14	10	5	8	9	270
Потребности b_j	190	280	110	100	120	

13)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	3	10	14	15	6	370
A_2	2	22	4	12	9	450
A_3	8	5	11	15	7	480
Потребности b_j	300	280	330	290	100	

14)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	7	4	15	9	14	100
A_2	11	2	7	3	10	100
A_3	4	5	12	8	17	100
Потребности b_j	85	65	90	60	70	

15)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	14	8	17	5	3	370
A_2	21	10	7	11	6	450
A_3	3	5	8	4	9	480
Потребности b_j	300	280	320	200	100	

16)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	11	4	15	7	2	200
A_2	20	9	7	14	5	300
A_3	18	10	3	8	6	200
Потребности b_j	120	230	190	160	120	

17)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	3	8	7	11	15	560
A_2	14	3	1	8	6	570
A_3	9	5	16	7	12	620
Потребности b_j	300	330	350	370	250	

18)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	2	10	15	14	4	150
A_2	3	7	12	5	8	170
A_3	21	18	6	13	16	260
Потребности b_j	100	90	160	150	80	

19)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	14	8	17	5	3	120
A_2	21	10	7	11	6	100
A_3	3	5	8	4	9	230
Потребности b_j	70	120	105	125	110	

20)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	12	9	7	11	6	175
A_2	24	3	12	2	8	165
A_3	5	17	9	4	11	180
Потребности b_j	50	110	110	100	70	

21)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	3	8	7	11	15	200
A_2	14	3	1	8	6	400
A_3	9	5	16	7	12	200
Потребности b_j	180	200	190	230	100	

22)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	2	4	11	5	3	250
A_2	8	17	13	7	6	300
A_3	14	10	5	8	9	270
Потребности b_j	120	230	190	160	120	

23)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	3	10	14	15	6	100
A_2	2	22	4	12	9	150
A_3	8	5	11	15	7	180
Потребности b_j	90	120	110	130	70	

24)

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	21	18	14	3	6	370
A_2	7	11	10	5	12	450
A_3	4	8	16	9	13	480
Потребности b_j	300	280	330	290	100	

25)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	2	4	5	11	3	260
A_2	12	8	6	14	11	400
A_3	10	15	7	9	18	240
Потребности b_j	180	200	100	200	100	

26)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	7	4	15	9	14	150
A_2	11	2	7	3	10	170
A_3	4	5	12	8	17	260
Потребности b_j	100	90	160	150	80	

27)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	3	10	14	15	6	560
A_2	2	22	4	12	9	570
A_3	8	5	11	15	7	620
Потребности b_j	300	380	450	220	250	

28)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	2	4	5	11	3	400
A_2	12	8	6	14	11	370
A_3	10	15	7	9	18	380
Потребности b_j	250	200	290	260	150	

29)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	11	4	15	7	2	350
A_2	20	9	7	14	5	350
A_3	18	10	3	8	6	300
Потребности b_j	180	220	230	270	100	

30)

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	21	18	14	3	6	120
A_2	7	11	10	5	12	150
A_3	4	8	16	9	13	100
Потребности b_j	80	60	80	60	50	

Пример 3.4

На три базы A_i, $i = \overline{1;3}$ поступил однородный товар, который требуется перевезти в магазины B_j, $j = \overline{1;5}$. Матрица тарифов перевозок (c_{ij}) между базами и магазинами, запасы товаров (a_i) на базах и потребности в товарах (b_j) для магазинов заданы таблицей:

Магазины / Базы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Запасы** a_i
A_1	2	3	4	5	1	430
A_2	2	4	3	6	7	320
A_3	6	5	8	5	4	380
Потребности b_j	190	200	220	210	150	

Спланировать план перевозок таким образом, чтобы общая их стоимость была минимальной.

Решение

Найдем суммарные запасы поставщиков (баз) и суммарные запросы потребителей (магазинов)

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 430 + 320 + 380 = 1130,$$

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 190 + 200 + 220 + 210 + 150 = 970.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{3} a_i > \sum_{j=1}^{5} b_j$, то данная задача с неправильным балансом. Необходимо ввести шестого, фиктивного потребителя с потребностями

$$b_6 = 1130 - 970 = 160$$

и нулевыми стоимостями перевозок единиц товара:

Базы \ Магазины	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	Запасы a_i
A_1	2	3	4	5	1	0	430
A_2	2	4	3	6	7	0	320
A_3	6	5	8	5	4	0	380
Потребности b_j	190	200	220	210	150	160	

Теперь $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$, значит, выполняется необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.

Найдем начальное опорное решение методом минимальной стоимости (стоимости перевозок товара фиктивному потребителю рассматриваются в последнюю очередь)

a_i \ b_j	190	200	220	210	150	160
430	$\boxed{2}$ 190	$\boxed{3}$ 90	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$ 150	$\boxed{0}$
320	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 100	$\boxed{3}$ 220	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{0}$
380	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{8}$	$\boxed{5}$ 210	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$ 160

Полученное решение X^1 имеет $m+n-1=3+6-1=8$ базисных переменных. Вычислим значение целевой функции на этом решении

$$F = 2\cdot 190 + 3\cdot 90 + 1\cdot 150 + 4\cdot 100 + 3\cdot 220 + 5\cdot 10 + 5\cdot 210 + 0\cdot 160 = 2960.$$

Если допустимое решение транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы поставщиков u_i, $i=\overline{1;3}$ и потребителей v_j, $j=\overline{1;6}$, удовлетворяющие условиям

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0, \qquad (i)$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0. \qquad (ii)$$

Определим потенциалы u_i и v_j, используя условия (i), согласно которым в каждой занятой опорным решением клетке таблицы транспортной задачи сумма потенциалов равна стоимости перевозок. Запишем систему и найдем ее решение

$$
\begin{cases}
u_1 + v_1 = 2, \\
u_1 + v_2 = 3, \\
u_1 + v_5 = 1, \\
u_2 + v_2 = 4, \\
u_2 + v_3 = 3, \\
u_3 + v_2 = 5, \\
u_3 + v_4 = 5, \\
u_3 + v_6 = 0;
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
u_1 = 0, \\
v_1 = 2, \\
v_2 = 3, \\
v_5 = 1, \\
u_2 = 1, \\
v_3 = 2, \\
u_3 = 2, \\
v_4 = 3, \\
v_6 = -2.
\end{cases}
$$

Система неопределенная, т.к. состоит из восьми уравнений и имеет девять переменных, поэтому потенциалу u_1 задали значение произвольно: $u_1 = 0$.

Значения потенциалов запишем в таблицу рядом с запасами или запросами соответствующих поставщиков и потребителей.

		$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	$v_5 = 1$	$v_6 = -2$
	a_i \ b_j	190	200	220	210	150	160
$u_1 = 0$	430	[2] − 190	[3] 90 +	[4] +	[5] +	[1] 150	[0] +
$u_2 = 1$	320	[2] + 1	[4] 100 −	[3] 220	[6] +	[7] +	[0] +
$u_3 = 2$	380	[6] +	[5] 10	[8] +	[5] 210	[4] +	[0] 160

Для всех незаполненных клеток таблицы проверим условия (ii)

$$
\begin{array}{lll}
u_1 + v_3 \le 4, & u_2 + v_1 \le 2, & u_3 + v_1 \le 6, \\
u_1 + v_4 \le 5, & u_2 + v_4 \le 6, & u_3 + v_3 \le 8, \\
u_1 + v_6 \le 0, & u_2 + v_5 \le 7, & u_3 + v_5 \le 4. \\
 & u_2 + v_6 \le 0, &
\end{array}
$$

Если неравенство верное, то в соответствующей клетке в правом нижнем углу поставим знак «+», иначе – запишем число Δ_{ij}, равное

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}.$$

Итак, начальное опорное решение не является оптимальным, поскольку для клетки $(2;1)$ условие (ii) не выполняется, $\Delta_{21} = 1$.

Перейдем к новому опорному решению. Для клетки $(2;1)$ построим цикл (если такого типа клеток несколько, то выбираем ту, в которой наибольшее значение Δ_{ij}): $(2;1)$, $(1;1)$, $(1;2)$, $(2;2)$. В угловых точках цикла расставим поочередно знаки «+» и «–», начиная с «+» в клетке $(2;1)$. Величина груза Θ, перераспределяемого по циклу равна наименьшей из перевозок в клетках цикла, отмеченных знаком «–»

$$\Theta = \min\{190;100\} = 100.$$

В клетки цикла, отмеченные знаком «+» добавляется груз Θ, из клеток, отмеченных знаком «–», убавляется такой же по величине груз. Так, осуществляя сдвиг по циклу на величину Θ, получим второе опорное решение X^2

		$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 3$	$v_4 = 3$	$v_5 = 1$	$v_6 = -2$
	$a_i \backslash b_j$	190	200	220	210	150	160
$u_1 = 0$	430	$\boxed{2}$ 90	$\boxed{3}$ 190	$\boxed{4}$ +	$\boxed{5}$ +	$\boxed{1}$ 150	$\boxed{0}$ +
$u_2 = 0$	320	$\boxed{2}$ 100	$\boxed{4}$ +	$\boxed{3}$ 220	$\boxed{6}$ +	$\boxed{7}$ +	$\boxed{0}$ +
$u_3 = 2$	380	$\boxed{6}$ +	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{8}$ +	$\boxed{5}$ 210	$\boxed{4}$ +	$\boxed{0}$ 160

Проверим это решение на оптимальность. Для чего, аналогично предыдущему решению, найдем потенциалы и проверим выполнение условий (ii):

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_1 + v_2 = 3, \\ u_1 + v_5 = 1, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_3 = 3, \\ u_3 + v_2 = 5, \\ u_3 + v_4 = 5, \\ u_3 + v_6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 2, \\ v_2 = 3, \\ v_5 = 1, \\ u_2 = 0, \\ v_3 = 3, \\ u_3 = 2, \\ v_4 = 3, \\ v_6 = -2. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u_1 + v_3 \le 4, \\ u_1 + v_4 \le 5, \\ u_1 + v_6 \le 0, \\ u_2 + v_2 \le 4, \\ u_2 + v_4 \le 6, \\ u_2 + v_5 \le 7, \\ u_2 + v_6 \le 0, \\ u_3 + v_1 \le 6, \\ u_3 + v_3 \le 8, \\ u_3 + v_5 \le 4. \end{array}$$

Условия (i) и (ii) выполняются, значит, второе опорное решение является оптимальным. Вычислим значение целевой функции на этом решении

$$F = 2\cdot 90 + 3\cdot 190 + 1\cdot 150 + 2\cdot 100 + 3\cdot 220 + 5\cdot 10 + 5\cdot 210 + 0\cdot 160 = 2950.$$

Ответ: общая стоимость перевозок составит $F_{\min} = 2950$ ден.ед. при плане перевозок $X^* = \begin{pmatrix} 90 & 190 & 0 & 0 & 150 \\ 100 & 0 & 220 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 210 & 0 \end{pmatrix}$, при этом на третей базе остается 160 единиц товара.

Задача 3.5. Изготовление некоторой продукции в производственном объединении можно осуществить двумя технологическими способами. При I способе изготовление x_1 изделий требует затрат, равных $a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0$, а при II способе затраты на изготовление x_2 изделий составляют $b_2x_2^2 + b_1x_2 + b_0$. Составить план производства продукции, согласно которому должно быть произведено d изделий при наименьших общих затратах.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

№	a_2	a_1	a_0	b_2	b_1	b_0	d
1	2	–16	4	2	–8	0	16
2	1	2	8	1	6	0	20
3	4	–16	–3	4	32	–2	32
4	2	–8	8	2	–16	9	26
5	3	12	7	3	0	5	14
6	1	–10	5	1	10	0	24
7	2	0	–6	2	8	–6	18
8	1	4	12	1	4	10	14
9	4	–32	5	4	0	2	28
10	1	8	9	1	4	–5	26
11	1	3	0	1	3	4	30
12	2	–8	5	2	0	9	18
13	3	15	–3	3	15	25	14
14	1	4	7	1	–4	–3	16
15	4	0	–6	4	16	4	24
16	1	–8	–8	1	0	8	18
17	1	–4	9	1	–8	–5	22
18	2	–2	1	2	6	3	34
19	3	6	0	3	–6	–9	28
20	1	4	–2	1	0	0	32
21	2	–2	–20	2	–10	4	30
22	3	0	8	3	12	–7	20
23	1	–8	–10	1	4	9	20
24	4	32	9	4	0	10	18
25	5	20	11	5	–20	–12	16
26	1	20	0	1	12	1	30
27	3	9	–4	3	–9	–2	35
28	2	16	6	2	–8	11	32
29	1	–14	7	1	–2	0	22
30	2	0	12	2	16	–9	26

Пример 3.5

Изготовление некоторой продукции в производственном объединении можно осуществить двумя технологическими способами. При I способе изготовление x_1 изделий требует затрат, равных $x_1^2+3x_1-12$, а при II способе затраты на изготовление x_2 изделий составляют $x_2^2+5x_2$. Составить план производства продукции, согласно которому должно быть произведено 19 изделий при наименьших общих затратах.

Решение

Составим математическую модель данной задачи. Согласно условию, затраты на производство продукции двумя технологическими способами составят

$$F = x_1^2+3x_1-12+x_2^2+5x_2,$$

при этом должно быть произведено точно 19 изделий, значит, необходимо выполнение условия

$$x_1+x_2=19.$$

Количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным и дробным, поэтому

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1,\ x_2 \text{ – целые.}$$

Итак, получаем следующую математическую задачу: среди всех целых неотрицательных решений $(x_1;x_2)$, удовлетворяющих условию $x_1+x_2=19$, требуется найти такое, при котором функция F принимает минимальное значение.

Данная задача относится к задачам нелинейного программирования, т.к. целевая функция в условии не является линейной. Используя геометрическую интерпретацию задачи, найдем ее решение.

Область решений задачи – множество точек прямой l: $x_1+x_2=19$, расположенных в первой четверти.

Полагая значение целевой функции равным некоторому числу h, определим линии уровня, выделив полные квадраты при переменных

$$x_1^2+3x_1-12+x_2^2+5x_2=h.$$

$$\left(x_1^2+2x_1\cdot 1{,}5+2{,}25\right)-2{,}25-12+\left(x_2^2+2x_2\cdot 2{,}5+6{,}25\right)-6{,}25=h,$$

$$\left(x_1+1{,}5\right)^2+\left(x_2+2{,}5\right)^2=h+20{,}5.$$

Итак, линии уровня представляют собой окружности с центром $O(-1{,}5;-2{,}5)$ и радиусом $\sqrt{h+20{,}5}$. С увеличением числа h значения функции F увеличиваются, поэтому необходимо определить общую точку прямой и окружности такую, что радиус окружности при этом минимален. В этом случае значение целевой функции так же будет минимально.

Проводя из точки O окружности разных радиусов, видим, что целевая функция принимает минимальное значение в точке A – точке касания окружности с прямой l (рис. 12).

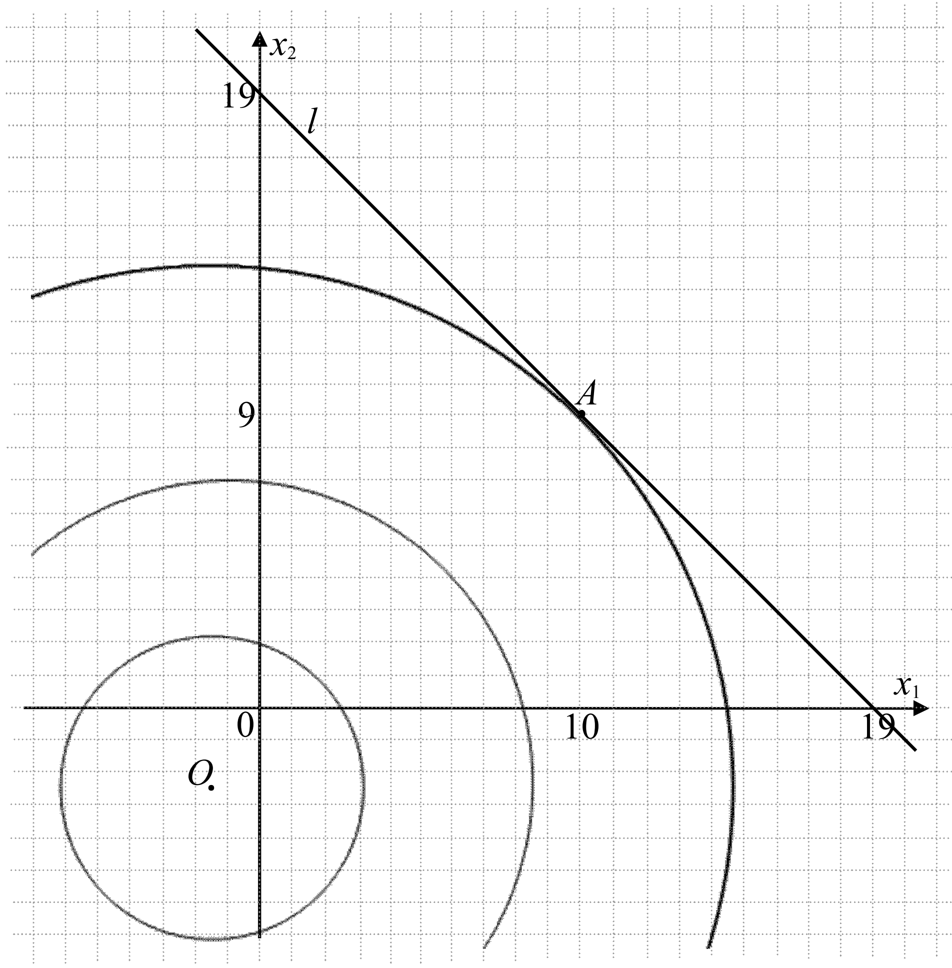

Рис. 12

Найдем координаты точки A как точки пересечения прямых l и l_1, где l_1 – прямая, проходящая через точку $O(-1{,}5;-2{,}5)$ перпендикулярно l. Уравнение l_1 можно составить как уравнение прямой, проходящей через точку O параллельно вектору нормали $\vec{n}(1;1)$ прямой l

$$l_1: \quad \frac{x+1{,}5}{1} = \frac{y+2{,}5}{1},$$

$$l_1: \quad x - y - 1 = 0.$$

Тогда из системы

$$\begin{cases} x + y = 19, \\ x - y = 1 \end{cases}$$

находим координаты точки $A(10;9)$, которые и определяют оптимальное решение задачи. Вычислим минимальное значение целевой функции

$$F_{\min} = 10^2 + 3\cdot 10 - 12 + 9^2 + 5\cdot 9 = 244.$$

Ответ: предприятию необходимо изготовить 10 изделий по I технологическому способу и 9 изделий по II, при этом наименьшие общие затраты составят 244 ден.ед.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие для втузов / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 7-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2006. – 448 с.

2. Виленкин, Н.Я., Потапов, В.Г. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики: учеб. пособие / Н.Я. Виленкин, В.Г. Потапов. – М.: «Посвещение», 1979. – 112 с.

3. Гаврилов, Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике: учеб. пособие / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. – 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для втузов / В.Е. Гмурман. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1979. – 400 с.

5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 4-е изд., доп. – М.: Высш. школа, 1972. – 368 с.

6. Игошин, В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.И. Игошин. – 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 304 с.

7. Игошин, В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.И. Игошин. – 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 448 с.

8. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.

9. Красс, М.С., Чупрынов, Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 720 с.

10. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / под общ. ред. В.И. Ермакова.– М.: ИНФРА-М, 2007. – 656 с.

11. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие / под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2004. – 575 с.

12. Шикин, Е.В., Чхартишвили, А.Г. Математические методы и модели в управлении: учебное пособие / Е.В. Шикин, А.Г. Чхартишвили. – 2-е изд., испр. – М.: Дело, 2002. – 440 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Южно-Уральский государственный университет

Международный факультет

Кафедра «Общеобразовательные дисциплины»

Семестровая работа № 4 по курсу

«Математика»

Выполнил(а): студент(ка) гр. МН – ________
группа

____
специальность

____
ФИО

Вариант № _________________________________

Проверил(а):_______________________________
Должность

____
ФИО

Регистрационные данные:

Дата_______ Дата_______ Дата_______

Номер _____ Номер _____ Номер _____

Челябинск

20____

Приложение 2

Результаты проверки семестровой работы студента(ки) гр. МН – _____________
____

Номер задачи	**Проверка 1**	**Проверка 2**	**Проверка 3**
Итог			
Дата			
Подпись преподавателя			

ОГЛАВЛЕНИЕ