Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МОРСКОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ ПО РАЗДЕЛУ

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Санкт-Петербург
2012

Типовой расчет

«Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, теория поля»

Вариант расчета (образец)

1. а) Найти массу пластины, ограниченной линией
$$L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),\ x\ge 0,\ y\ge 0,$$
если $a>0$, $\delta(x,y)=xy$ - поверхностная плотность пластины в точке.

   б) Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$, $y=0$, $z=0$.

2. а) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями
$$z=4-x^2-y^2,\ y=x\ (y\ge x),\ x=0\ (x\ge 0),\ z=0.$$
   б) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями
$$x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2=3z^2,\ z=0\ (z\ge 0).$$

3. а) Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$, $y=0$, $(y\ge 0)$.

   б) Найти момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=z^2$, $(z\ge 0)$ относительно оси Oz.

   в) Найти статический момент однородного тела, ограниченного поверхностью $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, относительно координатной плоскости xOy.

4. а) Вычислить длину одного витка винтовой линии $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\sin t \\ z=t \end{cases}$.

   б) Найти статический момент относительно оси Oy однородной дуги параболы $y=x^2$ от ее вершины до точки $A(1,1)$.

   в) Найти момент инерции относительно начала координат дуги лемнискаты $L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ при $x\ge 0,\ y\ge 0$, если ее плотность $\delta(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

5. а) Вычислить момент инерции относительно оси Oy однородного участка поверхности $x^2+z^2=y^2$ при $0\le y\le 4$.

   б) Вычислить площадь участка сферы $x^2+y^2+z^2=2$, вырезанного параболоидом $x^2+y^2=z$.

6. а) Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=4x^2+y^2-z^2-3xyz$ в точке $M(1;1;1)$ по направлению нормали к поверхности $S:\ 2x^2+y^2-2z^2=1$ в этой точке.

   б) Найти направление наискорейшего возрастания поля $u=\sqrt{xy}+zy^2$ в точке $M(2;2;1)$ и наибольшую скорость возрастания в этой точке.

7. а) Вычислить работу векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}+x\vec{j}+(x-y)\vec{k}$ вдоль отрезка прямой MN, если $M(1;1;1)$, $N(2;4;5)$.

   б) Вычислите работу векторного поля $\vec{a}=(x^2+y)\vec{i}+2xy\,\vec{j}$ вдоль линии
$$L:\ y=\begin{cases} 1-x^2, & 0\le x\le 1 \\ 0, & 1\le x\le 2 \end{cases}.$$

8. а) Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = xz\vec{i} + xy\vec{j} - yz\vec{k}$ через часть поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ при $0 \le z \le 3$ в направлении внешней нормали по теореме Гаусса - Остроградского и непосредственно (нормаль внешняя к замкнутой поверхности).

   б) Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = y^2\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограниченную цилиндром $x^2 + z^2 = 4$ и плоскостями $y = 0$ и $y = 2$, по теореме Гаусса - Остроградского и непосредственно (нормаль внешняя к замкнутой поверхности).

9. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = x^2 z^3\,\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$ по контуру $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x = 1 \end{cases}$ с помощью формулы Стокса и непосредственно.

10. Проверить потенциальность поля вектора $\vec{a} = -\dfrac{yz^2}{x^2}\vec{i} + \dfrac{z^2}{x}\vec{j} + \dfrac{2yz}{x}\vec{k}$, найти потенциал.

Справочный материал

Двойной интеграл

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и ограничена в замкнутой области D. Разобьем эту область произвольным образом на n частей: $D_1, D_2, ..., D_n$ (рис. 1), площади которых обозначим $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$.

Диаметром d_i области D_i назовем максимальное расстояние между двумя точками этой области.

В каждой области D_i выберем произвольно точку $P(\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Для всех $i = 1, 2, ..., n$ вычислим $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i$ и просуммируем эти выражения по i от 1 до n. В результате получим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i .$$

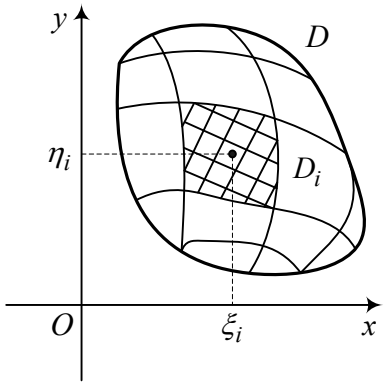

Рис. 1.

Предел интегральной суммы $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i (d_i)\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i$, если он существует, конечен, не зависит от способа разбиения области D на части $D_1, D_2, ..., D_n$ и от выбора точек $P(\xi_i, \eta_i)$ в каждой части D_i, называется *двойным интегралом* по области D от функции $f(x, y)$:

$$\iint\limits_D f(x, y) dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i (d_i)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i .$$

Функция $f(x, y)$ называется при этом *интегрируемой* на области D.

Теорема (достаточное условие интегрируемости функции)

Функция $f(x, y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D, интегрируема в этой области.

Свойства двойного интеграла

Свойство линейности

Если функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ интегрируемы в области D, то справедливо равенство

$$\iint\limits_D (C_1 f_1(x, y) + C_2 f(x, y)) dS = C_1 \iint\limits_D f_1(x, y) dS + C_2 \iint\limits_D f_2(x, y) dS .$$

Свойство аддитивности

Если область D разбивается кривой l на две непересекающиеся области $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$, и если функция $f(x, y)$ интегрируема на каждой из этих областей, то справедливо равенство

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dS = \iint\limits_{D^{(1)}} f(x, y) dS + \iint\limits_{D^{(2)}} f(x, y) dS .$$

Двойной интеграл в декартовых координатах

Пусть область D, на которой определен двойной интеграл $\iint\limits_{D} f(x, y)\, dS$, задана неравенствами

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \end{cases}.$$

Разобьем эту область на части $D_1, D_2, ..., D_n$ прямыми, параллельными координатным осям. Будем считать, что каждая из этих прямых пересекает границу области D не более чем в двух точках (рис. 2). В противном случае область следует разбить на несколько областей (см. свойство аддитивности).

При таком способе разбиения площадь каждой частичной области D_i равна $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. Двойной интеграл как предел интегральной суммы можно записать в виде:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dS = \lim_{\substack{n \to \infty \\ d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i ,$$

где $d_i = \max\limits_{i} \{\Delta x_i, \Delta y_i\}$.

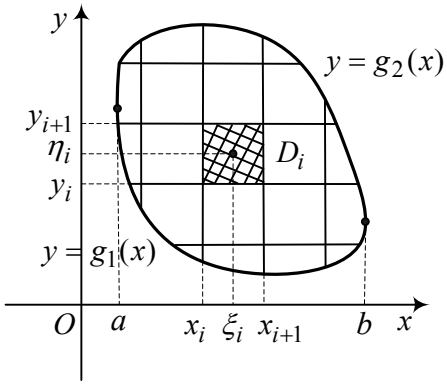

Рис. 2.

Интегралы

$$\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

называются повторными интегралами.

Двойной интеграл $\iint\limits_{D} f(x, y)\, dx\, dy$ вычисляется сведением его к одному из повторных интегралов.

Пусть область *D* ограничена, замкнута и такова, что любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу этой области не более чем в двух точках. Если такая область *D* может быть задана неравенствами

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \end{cases}, \text{ (см. рис. 3)}$$

то

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy .$$

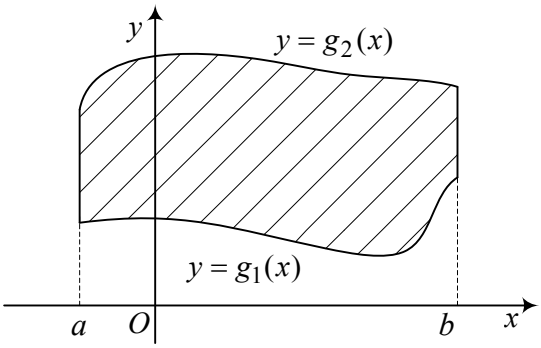

Рис. 3

Если же область *D* может быть задана неравенствами

$$\begin{cases} a \le y \le b \\ g_1(y) \le x \le g_2(y) \end{cases} \text{(см. рис. 4),}$$

то

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx .$$

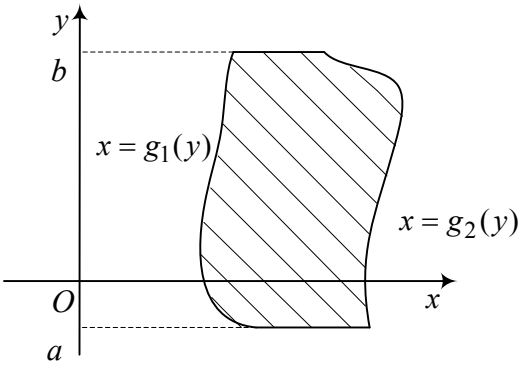

Рис. 4

Вычислять повторный интеграл, например, интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$, следует, начиная с частного интегрирования по y внутреннего интеграла $\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$. После подстановки пределов интеграции получится функция переменной x. Ее нужно проинтегрировать по переменной x в пределах от a до b.

Двойной интеграл в полярных координатах

Полярная система координат задается точкой O, называемой полюсом, и лучом Ol, называемым полярной осью (рис. 5).

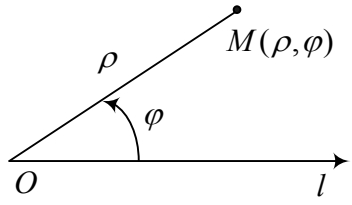

Рис. 5

Положение точки M на плоскости определяется ее расстоянием ρ от полюса и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью. Числа ρ и φ называются *полярными координатами* точки M, при этом ρ - *полярный радиус* ($\rho \geq 0$), φ - *полярный угол*.

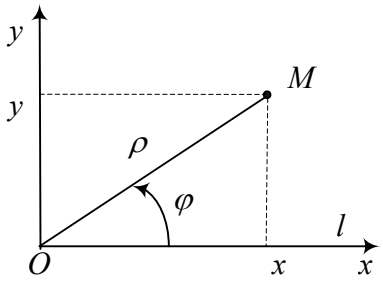

Рис. 6

Из рис. 6 видно, что прямоугольные координаты точки M выражаются через полярные по формулам

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}.$$

Заметим, что в полярных координатах $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Если при вычислении двойного интеграла необходимо перейти от декартовых координат к полярным, то следует иметь в виду, что если в декартовых координатах $dS = dxdy$, то при переходе к полярным координатам $dS = \rho d\rho d\varphi$. Двойной интеграл в полярных координатах примет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho d\varphi \quad ,$$

где D' – область изменения полярных координат.

Если область D заключена между лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, и любой луч $\varphi = c$ ($\alpha < c < \beta$) входит в область D через линию $\rho = \rho_1(\varphi)$ и выходит через линию $\rho = \rho_2(\varphi)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho .$$

Двойной интеграл в эллиптических координатах

Декартовы координаты выражаются через эллиптические координаты по формулам

$$\begin{cases} x = a\rho \cdot \cos\varphi \\ y = b\rho \cdot \sin\varphi \end{cases},$$

где ρ - полярный радиус, φ - полярный угол.

Уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в эллиптических координатах имеет вид $\rho=1$. Элемент площади dS в эллиптических координатах равен: $dS=ab\rho d\rho d\varphi$.

Механический смысл двойного интеграла

Если функция $\delta(x,\,y)\geq 0$ имеет смысл распределенной плотности в каждой точке области *D*, то

$$\iint\limits_D \delta(x,\,y)\,dS=m\,,$$

где m - масса тонкой плоской пластины, занимающей в координатной плоскости xOy область *D.*

Геометрический смысл двойного интеграла

1. Если $\delta(x,\,y)=1$, то масса тонкой пластины равна ее площади. Поэтому

$$\iint\limits_D dS=S\,,$$

где S - площадь области *D.*

2. Если цилиндрическое тело с боковой поверхностью, параллельной оси Oz, ограничено снизу плоскостью $z=0$, а сверху поверхностью $z=f(x,y)$, то его объем V можно вычислить по формуле

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dS\,,$$

где D - область, которую вырезает в плоскости xOy боковая поверхность тела.

Задача 1

а) Найти массу пластины, ограниченной линией

$$L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),\ x\geq 0,\ y\geq 0\,,$$

если $a>0$, $\delta(x,y)=xy$ - поверхностная плотность пластины в точке;

б) Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$, $y=0$, $z=0$ ($z\geq 0$), $y=x$.

Решение задачи 1а

Уравнение $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ задает кривую, называемую лемнискатой Бернулли. Область D, которую она ограничивает, изображена на рис. 7. Заштрихованная часть соответствует условию $x\geq 0,\ y\geq 0$.

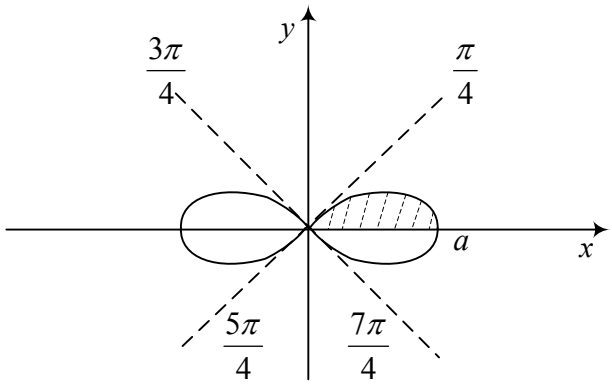

Рис. 7

Массу найдем по формуле $m = \iint\limits_D \delta(x,y)\, dS = \iint\limits_D xy\, dS$.

Из уравнения лемнискаты видно, что целесообразен переход к полярным координатам. В этих координатах уравнение будет иметь вид $\rho = a\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Тогда

$$m = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho\cos\varphi\rho\sin\varphi\rho d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho^3 d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi\left(a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^4 d\varphi = \frac{a^4}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi\cos^2 2\varphi d\varphi = -\frac{a^4}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi d\,\frac{\cos 2\varphi}{2} =$$

$$= -\frac{a^4}{16}\frac{\cos^3 2\varphi}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{a^4}{48}\left(\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos^3 0\right) = \frac{a^4}{48}.$$

Решение задачи 1б

Данное тело сверху ограничено цилиндрической поверхностью, заданной уравнением $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ (рис. 8), которое можно разрешить относительно переменной z и записать в виде $z = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$, так как по условию $z \ge 0$. Поэтому

$$V = \iint\limits_D z dxdy = \frac{3}{2}\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2}\, dxdy,$$

где область D есть треугольник, ограниченный в плоскости *Oxy* прямыми $y = x$, $y = 0$ и $x = 2$.

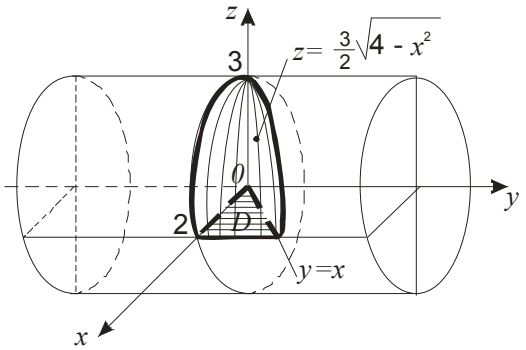

Рис. 8.

Вычислим полученный интеграл

$$V = \iint\limits_D z dxdy = \frac{3}{2}\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2}\, dxdy = \frac{3}{2}\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x \sqrt{4 - x^2}\, dy =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_0^2 dx\, \sqrt{4 - x^2}\; y\Big|_0^x = \frac{3}{2}\int\limits_0^2 \sqrt{4 - x^2}\cdot x dx =$$

$$= \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^2 \left(4 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(4 - x^2\right) = -\frac{3}{4}\frac{\left(4 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 = 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} = 4.$$

Справочный материал

Тройной интеграл

Пусть Ω - трёхмерная область, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью, и в каждой точке $M(x, y, z) \in \Omega$ определена функция $f(x, y, z)$. Разобьём область Ω произвольным образом на n частей: $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$. Области $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$ назовем элементарными областями или элементарными телами, а через $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$ будем обозначать объемы элементарных областей $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$.

Внутри каждой элементарной области Ω_i возьмём точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Omega_i$, вычислим $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$ и составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta V_i$. Введем ранг дробления $\delta = \max\limits_i d_i$, где d_i - диаметр элементарной области Ω_i.

Если при $n \to \infty$ и при $\delta \to 0$ существует конечный предел интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta V_i$, не зависящий от способа разбиения области и выбора точек M_i, то он называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области Ω. При этом функция $f(x, y, z)$ называется интегрируемой на области Ω.

Для тройного интеграла используется обозначение:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dV = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta V_i .$$

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна или кусочно-непрерывна на области Ω, то она на этой области интегрируема.

Свойства тройного интеграла

Свойство линейности

Если функции $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ интегрируемы в области D, то

$$\iiint\limits_{\Omega} (C_1 f_1(x, y, z) + C_2 f(x, y, z))dV =$$

$$= C_1 \iiint\limits_{\Omega} f_1(x, y, z)dV + C_2 \iiint\limits_{\Omega} f_2(x, y, z)dV .$$

Свойство аддитивности

Если область Ω разбивается на две непересекающиеся области Ω_1 и Ω_2, и если функция $f(x, y, z)$ интегрируема на каждой из этих областей, то справедливо равенство

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dV = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x, y, z)dV + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x, y, z)dV .$$

Тройной интеграл в декартовых и цилиндрических координатах

Предположим, что область интегрирования Ω в тройном интеграле $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dV$ ограничена гладкими поверхностями, заданными в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$.

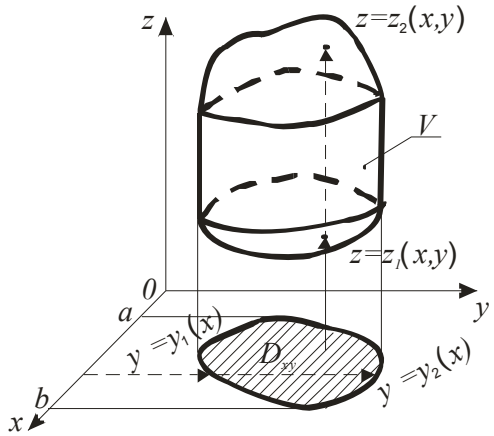

Рис. 9.

Пусть область Ω однозначно проектируется в область D на плоскости xOy. При этом поверхность, которая ограничивает область Ω, можно разбить на две поверхности: поверхность $z = z_1(x, y)$, ограничивающая Ω снизу, и поверхность $z = z_2(x, y)$, ограничивающая Ω сверху (рис. 9).

Следовательно, тройной интеграл равен двойному интегралу по проекции на плоскость xOy области Ω. Подынтегральной функцией этого двойного интеграла является интеграл по переменной z от функции $f(x, y, z)$ в пределах: от значения z на поверхности, являющейся нижней границей области Ω, до значения z на поверхности, являющейся верхней границей Ω.

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_{D} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) ds .$$

Иногда границы области V, т.е. поверхности, которыми она ограничена сверху или снизу, заданы различными уравнениями. В этом случае V следует разбить на две или более областей.

Расставляя пределы интеграции в двойном интеграле, в декартовых или в полярных координатах, тройной интеграл можно свести к трехкратному интегралу вида:

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \text{ или}$$

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} d\phi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int\limits_{z_1(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}^{z_2(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz .$$

Последний интеграл задан в цилиндрических координатах.

Иногда удобнее проектировать область V не на плоскость xOy, а на другие (xOz или yOz) координатные плоскости.

Тройной интеграл в сферических координатах

Сферические координаты точки $M(r, \varphi, \theta)$ (рис. 10) определяют следующим образом:

r - сферический радиус, расстояние от начала координат до точки M;

φ - полярный угол, угол поворота оси Ox до вектора $\overline{OM_1}$, а точка M_1 - проекция точки M в плоскость xOy;

θ - азимутальный угол, угол поворота оси Oz до вектора $\overline{OM}$.

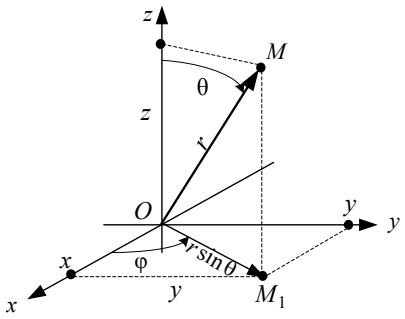

Рис. 10.

Декартовы координаты выражаются через сферические координаты по формулам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}.$$

Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в сферических координатах имеет вид $r = R$.

Элемент объема dV в сферических координатах равен $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$.

Если границы области интегрирования V удобно задавать в сферических координатах, то тройной интеграл преобразуется по формуле:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta d\varphi\, d\theta\, dr\ ,$$

где $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и $0 \leq \theta \leq \pi$, сферический радиус, полярный угол и азимутальный угол соответственно.

Тройной интеграл в обобщенно-эллиптических координатах

Декартовы координаты выражаются через обобщенно-эллиптические координаты по формулам:

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\theta \end{cases}.$$

Уравнение эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ в обобщенно-эллиптических координатах имеет вид: $r = 1$.

Элемент объема dV в этих координатах равен $dV = abcr^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$.

Геометрические и механические приложения тройного интеграла

Пусть масса распределена по пространственной области Ω с плотностью $\delta(x, y, z)$.

Масса тела

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \delta(x, y, z)dV\ .$$

Объем тела

$$V = \iiint\limits_{\Omega} 1\, dV\ .$$

Статические моменты

Относительно координатных осей:

$$S_x = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{y^2 + z^2}\ \delta(x, y, z) dV\ ; S_y = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + z^2}\ \delta(x, y, z) dV\ ;$$

$$S_z = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\ \delta(x, y, z) dV\ .$$

Относительно начала координат:

$$S_o = \iint\limits_{D} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \delta(x, y, z) dS\ .$$

Относительно координатных плоскостей:

$$S_{xOy} = \iiint\limits_{\Omega} z\, \delta(x, y, z) dV\ ; \quad S_{xOz} = \iiint\limits_{\Omega} y\, \delta(x, y, z) dV\ ;$$

$$S_{yOz} = \iiint\limits_{\Omega} x\, \delta(x, y, z) dV\ .$$

Координаты центра тяжести $C(x_c, y_c, z_c)$

$$x_c = \frac{S_{yOz}}{m}\ ; y_c = \frac{S_{xOz}}{m}\ ; z_c = \frac{S_{xOy}}{m}\ ,$$

или

$$x_c = \frac{1}{m} \iiint\limits_{\Omega} x\, \delta(x, y, z) dV\ , y_c = \frac{1}{m} \iiint\limits_{\Omega} y\, \delta(x, y, z) dV\ , z_c = \frac{1}{m} \iiint\limits_{\Omega} z\, \delta(x, y, z) dV\ ,$$

где $m = \iiint\limits_{\Omega} \delta(x, y, z) dV$ - масса тела.

Моменты инерции

Относительно начала координат:

$$I_o = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \delta(x, y, z) dV\ .$$

Относительно координатных осей:

$$I_x = \iiint\limits_{\Omega} \left(y^2 + z^2\right) \delta(x, y, z) dV\ ;\ I_y = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + z^2\right) \delta(x, y, z) dV\ ;$$

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) \delta(x, y, z) dV\ .$$

Относительно координатных плоскостей:

$$I_{xOy} = \iiint\limits_{\Omega} z^2\ \delta(x, y, z) dV\ , I_{xOz} = \iiint\limits_{\Omega} y^2\ \delta(x, y, z) dV\ , I_{yOz} = \iiint\limits_{\Omega} x^2\ \delta(x, y, z) dV\ .$$

Задача 2

а) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2 - y^2$, $y = x$ ($y \geq x$), $x = 0$ ($x \geq 0$), $z = 0$.

б) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 3z^2$, $z = 0$ ($z \geq 0$).

Решение задачи 2а

Из геометрического смыла тройного интеграла следует, что

$$V = \iiint\limits_{\Omega} 1\, dV\ .$$

Пространственная область, ограниченная заданными поверхностями, изображена на рисунке 11.

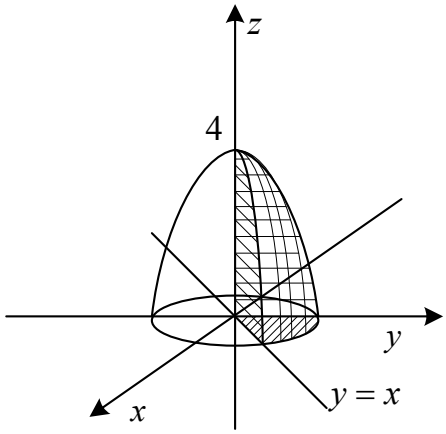

Рис. 11.

Из этого рисунка ясно, что область Ω проектируется на плоскость xOy в часть круга $x^2 + y^2 \le 4$, ограниченную прямыми $x = 0$ и $y = x$ (рис. 12)

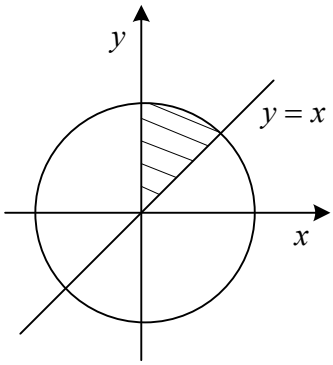

Рис. 12.

Область Ω ограничена снизу координатной плоскостью $z = 0$, а сверху – поверхностью параболоида $z = 4 - x^2 - y^2$. Поэтому тройной интеграл можно свести к следующему двойному интегралу:

$$V = \iiint\limits_{\Omega} 1\, dV = \iint\limits_{D} dx\, dy \int\limits_{0}^{4-x^2-y^2} dz = \iint\limits_{D} dx\, dy\, z\Big|_{0}^{4-x^2-y^2} = \iint\limits_{D} \left(4 - x^2 - y^2\right) dx\, dy$$

Область интегрирования D - часть круга. Поэтому перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases},\ x^2 + y^2 = \rho^2,\ \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 2 \end{cases}.$$

$$V = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2} \left(4 - \rho^2\right)\rho\, d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2} \left(4\rho - \rho^3\right) d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2} d\varphi = 4\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi .$$

Решение задачи 2б

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ определяет сферу с центром в начале координат и единичным радиусом. Уравнение $x^2 + y^2 = 3z^2$ задает конус с осью симметрии Oz. Перейдем для простоты дальнейших вычислений к сферическим координатам.

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ имеет в сферических координатах вид $r = 1$.

Запишем теперь уравнение конической поверхности $x^2 + y^2 = 3z^2$ в сферических координатах:

$$r^2 \sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 3r^2\cos^2\theta,$$

$$\text{или } \sin^2\theta = 3\cos^2\theta,\ \operatorname{tg}^2\theta = 3,\ \operatorname{tg}\theta = \pm\sqrt{3}.$$

Решим последние уравнения относительно азимутального угла $\theta = \frac{\pi}{3}$ и $\theta = \frac{2\pi}{3}$, и учтем, что неравенству $z \ge 0$ соответствует первое из этих уравнений $\theta = \frac{\pi}{3}$ (верхняя полость конуса).

Координатная плоскость $z = 0$ в сферических координатах задается двумя полуплоскостями: $\varphi = 0$ при $x \ge 0$ и $\varphi = \pi$ при $x \le 0$.

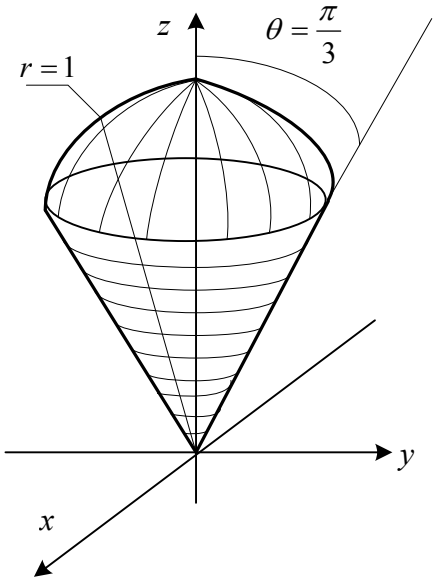

Рис. 13.

Вид области Ω показан на рисунке 13. В сферической системе координат эту область можно задать неравенствами:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \\ 0 \le r \le a \end{cases}.$$

$$V = \iiint\limits_{\Omega} 1\, dV.$$

Тройной интеграл запишется в сферических координатах в виде:

$$V = \iiint\limits_{\Omega} 1\, dV = \iiint\limits_{\Omega} r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\, d\theta \int_0^1 r^2\, dr = 2\pi\left(-\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Задача 3

а) Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, $(y \ge 0)$.

б) Найти момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=z^2$, $(z\ge 0)$ относительно оси Oz.

в) Найти статический момент однородного тела, ограниченного поверхностью $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, относительно координатной плоскости xOy.

Решение задачи 3а

Поскольку тело однородное, то можно положить плотность $\delta(x,y,z)\equiv 1$. Область Ω представляет собой полушар с радиусом 2 и с центром в начале координат (рис. 14).

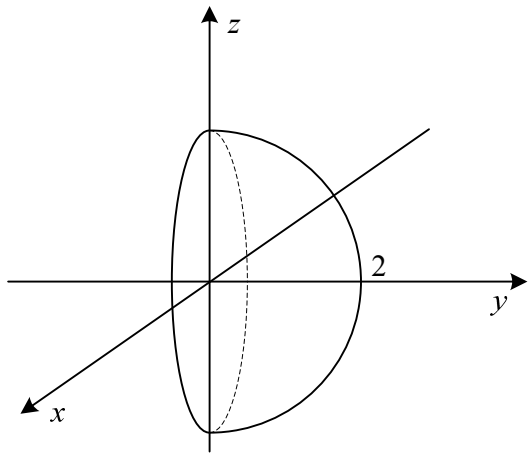

Рис. 14.

Тело является однородным и симметрично относительно координатных осей Ox и Oz. Поэтому центр тяжести находится на оси Oy, т.е. $x_c=z_c=0$.

Масса тела равна $m=\iiint\limits_{\Omega}\delta(x,y,z)dV=\iiint\limits_{\Omega}1dV=V$ - объему полушара. Следовательно, $m=\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi 2^3=\frac{16\pi}{3}$.

Тогда ординату центра тяжести можно определить через тройной интеграл $y_c=\frac{3}{16\pi}\iiint\limits_{\Omega}ydV$, в котором удобно перейти к сферическим координатам, т.е.

$$y_c=\frac{3}{16\pi}\iiint\limits_{\Omega}r\sin\varphi\sin\theta\, r^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr\text{, или } y_c=\frac{3}{16\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^{2}r^3dr=$$

$$=\frac{3}{16\pi}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2}=\frac{3}{32\pi}\left(\int_0^{\pi}d\theta-\underbrace{\int_0^{\pi}\cos 2\theta d\theta}_{=0}\right)\cdot 4=$$

$$=\frac{3}{32\pi}\cdot\left(\theta\Big|_0^{\pi}\right)\cdot 4=\frac{3}{32\pi}\cdot\pi\cdot 4=\frac{3}{8}.$$

Следовательно, центр тяжести находится в точке $C\left(0,\frac{3}{8},0\right)$.

Решение задачи 3б

Момент инерции пространственного тела относительно оси Oz определяется по формуле:

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)dV.$$

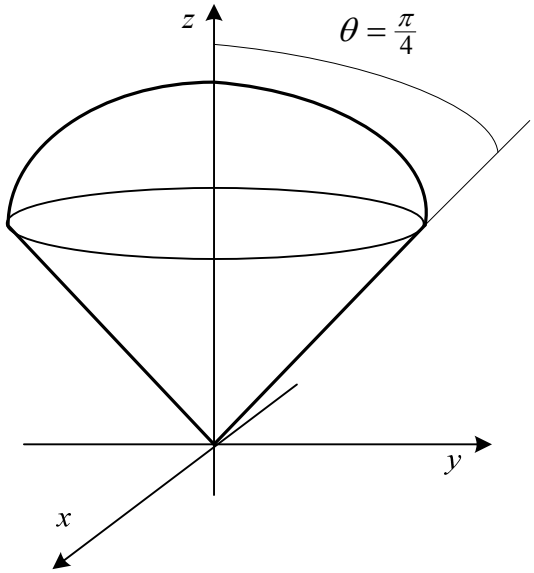

Рис. 15.

Поскольку тело однородное, то плотность $\delta(x, y, z) \equiv 1$. Область интегрирования Ω показана на рисунке 15. Она ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и конической поверхностью $x^2 + y^2 = z^2$ с осью симметрии Oz.

Тройной интеграл в данном случае удобно вычислять в сферических координатах. Поскольку в сферических координатах

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta = r^2 \sin^2 \theta ,$$

то

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega} r^2 \sin^2 \theta \, r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr = \iiint\limits_{\Omega} r^4 \sin^3 \theta \, d\varphi d\theta dr .$$

Расставляя в последнем интеграле пределы, получим

$$I_z = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \theta \, d\theta \int\limits_0^1 r^4 dr = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \cos^2 \theta\right) \sin\theta \, d\theta \left. \frac{r^5}{5} \right|_0^1 =$$

$$= -2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \cos^2 \theta\right) d\cos\theta \cdot \frac{1}{5} = -\frac{2\pi}{5} \left. \left(\cos\theta - \tfrac{1}{3}\cos^3 \theta\right) \right|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{2\pi}{5} \left(\cos\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{3}\cos^3 \tfrac{\pi}{4} - \cos 0 + \tfrac{1}{3}\cos 0\right) =$$

$$= -\frac{2\pi}{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{24} - 1 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{2\pi}{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{30}\left(8 - 5\sqrt{2}\right).$$

Решение задачи 3в

Статический момент однородного тела, относительно координатной плоскости xOy определяется по формуле

$$S_{xOy} = \iiint\limits_{\Omega} z \, \delta(x, y, z) dV = \iiint\limits_{\Omega} z \, dV .$$

Поскольку границей тела является эллипсоид $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, то в тройном интеграле следует перейти к обобщенно эллиптическим координатам.

$$S_{xOy} = \iiint\limits_{\Omega} 2r\cos\theta \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot r^2 \sin\theta \, d\varphi d\theta dr =$$

$$= 24 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \int\limits_0^1 r^3 dr = 48\pi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d(\sin\theta) \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^1 = 0 .$$

Справочный материал

Криволинейный интеграл первого рода

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в каждой точке гладкой кривой l. Разобьём участок кривой l от точки A до точки B произвольным образом на n частей (точками $A = M_0, M_1, M_2, ...M_i, M_{i+1}, ..., M_n = B$.

Обозначим через Δl_i длину дуги $M_i M_{i+1}$. На каждой дуге возьмём произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in M_i M_{i+1}$, вычислим $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta l_i$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta l_i .$$

Предел интегральной суммы при $n \to \infty$ и при $\max\limits_i \Delta l_i \to 0$, если он существует, конечен, не зависит от способа дробления дуги AB и от выбора точек P_i, называется *криволинейным интегралом 1 рода* по кривой l от точки A до точки B. Для криволинейного интеграла используется обозначение:

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y, z) dl = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max\limits_i \Delta l_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta l_i .$$

Функция $f(x, y, z)$ называется при этом *интегрируемой* на участке AB кривой l.

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна или кусочно-непрерывна на участке AB кривой l, то она на этом участке кривой интегрируема.

Свойства криволинейного интеграла 1 рода

1. Криволинейный интеграл 1 рода не зависит от направления пути интегрирования:

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y, z) dl = \int\limits_{\smile BA} f(x, y, z) dl .$$

2. *Свойство аддитивности*

Если кривая AB разбита на части AC и CB, то:

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y, z) dl = \int\limits_{\smile AC} f(x, y, z) dl + \int\limits_{\smile BC} f(x, y, z) dl .$$

3. *Свойство линейности*

Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы на кривой l, а C_1 и C_2 - постоянные, то

$$\int\limits_l (C_1 \cdot f(x, y, z) + C_2 \cdot g(x, y, z)) dl = C_1 \int\limits_l f(x, y, z) dl + C_2 \int\limits_l g(x, y, z) dl .$$

Геометрические и механические приложения криволинейного интеграла 1 рода

Длина дуги AB

$$l = \int\limits_{\smile AB} dl .$$

Масса дуги AB

Если $\delta(x, y, z)$ - плотность в каждой точке, то

$$m = \int\limits_{\smile AB} \delta(x, y, z) dl .$$

Статические моменты дуги AB

Статический момент относительно начала координат:

$$S_0 = \int\limits_{\smile AB} \delta(x, y, z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dl .$$

Статические моменты относительно координатных осей:

$$S_x = \int\limits_{\smile AB} \delta(x, y, z)\sqrt{y^2 + z^2}\, dl ,$$

$$S_y = \int\limits_{\smile AB} \delta(x, y, z)\sqrt{x^2 + z^2}\, dl .$$

$$S_z = \int\limits_{\smile AB} \delta(x, y, z)\sqrt{x^2 + y^2}\, dl .$$

Статические моменты относительно координатных плоскостей:

$$S_{xOy} = \int\limits_{\smile AB} \delta(x, y, z) z\, dl ,$$

$$S_{xOz} = \int\limits_{\smile AB} \delta(x, y, z) y\, dl ,$$

$$S_{yOz} = \int\limits_{\smile AB} \delta(x, y, z) x\, dl .$$

Координаты центра тяжести дуги AB

$$x_c = \frac{\int\limits_{AB} x\delta(x; y; z) dl}{m} ;$$

$$y_c = \frac{\int\limits_{AB} y\delta(x; y; z) dl}{m} ;$$

$$z_c = \frac{\int\limits_{AB} z\delta(x; y; z) dl}{m} ,$$

где m - масса дуги.

Моменты инерции дуги AB

Момент инерции относительно начала координат:

$$I_0 = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \delta(x, y, z)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)dl .$$

Моменты инерции относительно координатных осей:

$$I_x = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \delta(x, y, z)\left(y^2 + z^2\right)dl ,$$

$$I_y = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \delta(x, y, z)\left(x^2 + z^2\right)dl ,$$

$$I_z = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \delta(x, y, z)\left(x^2 + y^2\right)dl .$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей:

$$I_{xOy} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \delta(x, y, z)z^2\, dl ,$$

$$I_{xOz} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \delta(x, y, z)y^2\, dl ,$$

$$I_{yOz} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \delta(x, y, z)x^2\, dl .$$

Вычисление криволинейного интеграла 1 рода

1. Пространственная кривая, заданная параметрическими уравнениями

Пусть пространственная кривая l задана параметрическими уравнениями:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t),$$

и участку кривой от точки A до точки B соответствует неравенство: $t_1 \le t \le t_2$.

Криволинейный интеграл сводится к определенному интегралу по отрезку $[t_1, t_2]$:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y, z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt .$$

2. Плоская кривая, заданная параметрическими уравнениями

Криволинейный по плоской кривой l, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t);\ y = y(t)$ при $t_1 \le t \le t_2$, сводится к определенному интегралу по формуле:

$$\int\limits_{l} f(x, y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t); y(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt .$$

3. Плоская кривая, заданная уравнением $y = y(x)$

При таком задании кривой удобно считать параметром переменную x, записывая уравнения кривой в виде

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}.$$

Если на дуге $a \le x \le b$, то формула сведения криволинейного интеграла к определенному интегралу примет вид:

$$\int\limits_{l} f(x, y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x; y(x))\sqrt{1 + (y_x')^2}\, dx .$$

4. Плоская кривая, заданная в полярных координатах

Если кривая задана в полярных координатах, то в качестве параметра следует взять полярный угол φ.

Пусть кривая задана полярным уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$. Криволинейный интеграл сведется к определенному интегралу следующего вида:

$$\int_l f(x, y)dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho(\varphi)\cos\varphi,\ \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'_\varphi)^2}\, d\varphi .$$

Задача 4

а) Вычислить длину одного витка винтовой линии $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = t \end{cases}$.

б) Найти статический момент относительно оси Oy однородной дуги параболы $y = x^2$ от ее вершины до точки $A(1, 1)$.

в) Найти момент инерции относительно начала координат дуги лемнискаты $L : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ при $x \ge 0,\ y \ge 0$, если ее плотность $\delta(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение задачи 4а

Одному витку линии соответствует неравенство $0 \le t \le 2\pi$. Продифференцируем параметрические уравнения кривой $\begin{cases} x' = -3\sin t \\ y' = 3\cos t \\ z' = 1 \end{cases}$ и вычислим длину одного витка винтовой линии через криволинейный интеграл

$$l = \int_l dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2 t + 1}\, dt = \sqrt{10}\int_0^{2\pi} dt = 2\sqrt{10}\,\pi .$$

Решение задачи 4б

Статический момент относительно оси Oy найдем по формуле

$$S_y = \int_{\overset{\cup}{AB}} \delta(x, y)x dl .$$

Поскольку дуга однородная, то плотность $\delta(x, y) \equiv 1$.

$$S_y = \int_{\overset{\cup}{AB}} x\, dl = \int_0^1 x\sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \tfrac{1}{8}\int_0^1 \left(1 + 4x^2\right)^{\frac{1}{2}} 8x\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \left(1 + 4x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + 4x^2\right) = \frac{1}{8}\left.\frac{\left(1 + 4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

Решение задачи 4в

Момент инерции относительно начала координат будем искать по формуле

$$I_0 = \int_{\overset{\cup}{AB}} \delta(x, y)\left(x^2 + y^2\right)dl = \int_{\overset{\cup}{AB}} \sqrt{x^2 + y^2}\left(x^2 + y^2\right)dl = \int_{\overset{\cup}{AB}} \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}\, dl .$$

Лемнискату $L : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ зададим полярным уравнением $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, при этом $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$.

Так как $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, то $\rho'_\varphi = -a\dfrac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, и, следовательно,

$$\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left(\rho'_\varphi\right)^2} = \sqrt{a^2\cos 2\varphi + a^2\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^3(\varphi)\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^3 \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi = a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^4}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^4}{2}.$$

Справочный материал

Поверхностный интеграл первого рода

Пусть на гладкой поверхности σ задана функция $f(x;y;z)$. Разобьём σ произвольным образом на n элементарных частей $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$, площади которых равны $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. В каждой части возьмём произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \sigma_i$, вычислим $f(\zeta_i, \eta_i, \zeta_i)\cdot\Delta S_i$ и составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$.

Если существует конечный предел интегральной суммы при $n \to \infty$ и при стягивании наибольшей σ_i в точку, и если этот предел не зависит ни от способа дробления поверхности σ, ни от выбора точек M_i, то он называется *поверхностным интегралом* I *рода* от функции $f(x;y;z)$ по поверхности σ и обозначается

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma.$$

Функция $f(x;y;z)$ называется при этом интегрируемой на поверхности σ.

Если функция $f(x;y;z)$ непрерывна на поверхности σ, то она на этой поверхности интегрируема.

Свойства поверхностного интеграла 1 рода

1. *Свойство линейности*

Если функции $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ интегрируемы на поверхности σ, то

$$\iint\limits_{\sigma}\left(C_1 f_1(x, y, z) + C_2 f(x, y, z)\right)d\sigma = C_1\iint\limits_{\sigma} f_1(x, y, z)d\sigma + C_2\iint\limits_{\sigma} f_2(x, y, z)d\sigma.$$

2. *Свойство аддитивности*

Если область σ разбивается на две непересекающиеся поверхности σ_1 и σ_2, и если функция $f(x, y, z)$ интегрируема на каждой из этих областей, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} f(x, y, z)d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} f(x, y, z)d\sigma.$$

Вычисление поверхностного интеграла 1 рода.

Пусть поверхность σ однозначно проектируется на какую-либо координатную плоскость, например, на Oxy, в область D.

Тогда поверхностный интеграл первого рода сводится к двойному интегралу по формуле

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\cdot d\sigma = \iint\limits_{D} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

или

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y,\ z)\cdot d\sigma = \iint\limits_{D} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy\,,$$

где $z = z(x,\ y)$ - уравнение поверхности σ, область D – ее проекция в координатную плоскость xOy.

Если поверхность σ задана неявным уравнением $F(x,\ y,\ z\ ) = 0$, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{D} f(x, y, z(x, y))\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|}dxdy\,,$$

Если поверхность σ, по которой ведется интегрирование, удобно проектировать в плоскость xOz или yOz, справедливы аналогичные формулы:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y,\ z)\cdot d\sigma = \iint\limits_{D} f(x, y(x, z), z)\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz\,,$$

где $y = y(x,\ z)$ - уравнение поверхности σ, область D – ее проекция в координатную плоскость xOz;

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y,\ z)\cdot d\sigma = \iint\limits_{D} f(x(y, z), y, z)\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dydz\,,$$

где $x = x(y,\ z)$ - уравнение поверхности σ, область D – ее проекция в координатную плоскость yOz.

Геометрический и механический смысл поверхностного интеграла 1 рода

Площадь участка поверхности

$$S = \iint\limits_{\sigma} 1\cdot d\sigma\,.$$

Пусть функция $\delta(x;y;z) \geq 0$ представляет собой распределенную по поверхности σ плотность.

Масса участка поверхности

$$m = \iint\limits_{\sigma} f(x,\ y,\ z)\cdot d\sigma\,.$$

Статические моменты участка поверхности σ

Статический момент относительно начала координат:

$$S_0 = \iint\limits_{\sigma} \delta(x,\ y,\ z)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d\sigma\,.$$

Статические моменты относительно координатных осей:

$$S_x = \iint\limits_{\sigma} \delta(x,\ y,\ z)\sqrt{y^2+z^2}\,d\sigma\,;$$

$$S_y = \iint\limits_{\sigma} \delta(x,\ y,\ z)\sqrt{x^2+z^2}\,d\sigma\,;$$

$$S_z = \iint\limits_{\sigma} \delta(x,\ y,\ z)\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma\,.$$

Статические моменты относительно координатных плоскостей:

$$S_{xOy} = \iint\limits_{\sigma} \delta(x,\ y,\ z)z\,d\sigma\,;$$

$$S_{xOz} = \iint\limits_{\sigma} \delta(x, y, z) y d\sigma;$$

$$S_{yOz} = \iint\limits_{\sigma} \delta(x, y, z) x d\sigma.$$

Координаты центра тяжести $C(x_c, y_c, z_c)$ ***поверхности*** σ

$$x_c = \frac{\iint\limits_{\sigma} \delta(x, y, z) x d\sigma}{m};$$

$$y_c = \frac{\iint\limits_{\sigma} \delta(x, y, z) y\, d\sigma}{m};$$

$$z_c = \frac{\iint\limits_{\sigma} \delta(x, y, z) z d\sigma}{m},$$

где m - масса поверхности σ.

Моменты инерции поверхности σ

Момент инерции относительно начала координат:

$$I_0 = \iint\limits_{\sigma} \delta(x, y, z)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) d\sigma;$$

Моменты инерции относительно координатных осей:

$$I_x = \iint\limits_{\sigma} \delta(x, y, z)\left(y^2 + z^2\right) d\sigma;$$

$$I_y = \iint\limits_{\sigma} \delta(x, y, z)\left(x^2 + z^2\right) d\sigma;$$

$$I_z = \iint\limits_{\sigma} \delta(x, y, z)\left(x^2 + y^2\right) d\sigma.$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей:

$$I_{xOy} = \iint\limits_{\sigma} \delta(x, y, z) z^2 d\sigma;$$

$$I_{xOz} = \iint\limits_{\sigma} \delta(x, y, z) y^2 d\sigma;$$

$$I_{yOz} = \iint\limits_{\sigma} \delta(x, y, z) x^2 d\sigma.$$

Задача 5

а) Вычислить момент инерции относительно оси Oy однородного участка поверхности $x^2 + z^2 = y^2$ при $0 \le y \le 4$.

б) Вычислить площадь участка сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, вырезанного параболоидом $x^2 + y^2 = z$.

Решение задачи 5а

Момент инерции однородного участка поверхности σ относительно оси Oy вычисляется по формуле

$$I_y = \iint\limits_{\sigma} \delta(x, y, z)\left(x^2 + z^2\right) d\sigma = \iint\limits_{\sigma} \left(x^2 + z^2\right) d\sigma.$$

Участок поверхности $x^2 + z^2 = y^2$ при $0 \le y \le 4$ показан на рис. 16. Этот участок удобно проектировать в плоскость xOz.

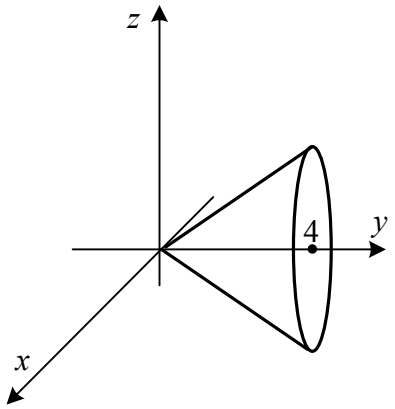

Рис. 16.

Записывая уравнение поверхности σ в виде $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ и вычисляя производные

$$y'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} \text{ и } y'_z = \frac{2z}{2\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}},$$

получим

$$I_y = \iint_D \left(x^2+z^2\right)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2}\,dxdz =$$

$$= \iint_D \left(x^2+z^2\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{x^2}{x^2+z^2}}\,dxdz =$$

$$= \iint_D \left(x^2+z^2\right)\sqrt{\frac{2x^2+2z^2}{x^2+z^2}}\,dxdz = \iint_D \left(x^2+z^2\right)\sqrt{2}\,dxdz.$$

Областью интегрирования D является круг. Поэтому удобно перейти к полярным координатам

$$\begin{cases} z = \rho \cdot \cos\varphi \\ x = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}.$$

$$I_y = \sqrt{2}\iint_D \rho^2\,\rho d\varphi d\rho = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = 2\sqrt{2}\pi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2 = 8\sqrt{2}\pi.$$

Решение задачи 5б

Площадь участка поверхности σ вычисляется через поверхностный интеграл первого рода по формуле

$$S = \iint_\sigma 1\,d\sigma.$$

В системе $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 2 \\ x^2+y^2 = z \end{cases}$ подставим $x^2+y^2 = z$ в первое уравнение. Тогда получим уравнение $z^2+z-2=0$, из которого следует, что $z=-2$ и $z=1$. Поскольку на параболоиде $z \ge 0$, то линия пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=2$ и параболоида $x^2+y^2=z$ лежит в плоскости $z=1$.

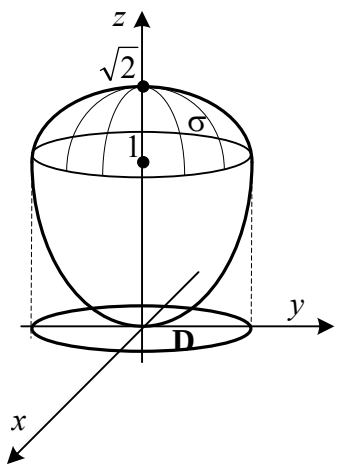

Рис. 17.

Чтобы получить уравнение линии пересечения заданных поверхностей, подставим $z = 1$ в уравнение $x^2 + y^2 = z$. Получим уравнение окружности $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 17). Следовательно, поверхность σ проектируется в плоскость xOy на круг с центром в начале координат и с радиусом 1.

Площадь участка сферы, вырезанного параболоидом, можно записать в виде двойного интеграла

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy .$$

Решим уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ относительно z:

$$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}\ ,\ z \ge 0 .$$

Вычислим производные:

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}\ ,\ z'_x = \frac{-y}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} .$$

Получим

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}\right)^2}\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{2 - x^2 - y^2}}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{\frac{2}{2 - x^2 - y^2}}\, dxdy = \sqrt{2} \iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}\, dxdy.$$

В двойном интеграле по области D (рис. 17) перейдем к полярным координатам. Получим

$$S = \sqrt{2} \iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{2 - \rho^2}}\, \rho d\varphi d\rho = \sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{2 - \rho^2}} d\rho =$$

$$= -\sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{d\left(2 - \rho^2\right)}{2\sqrt{2 - \rho^2}} = -\sqrt{2}\ 2\pi \sqrt{2 - \rho^2}\Big|_0^1 =$$

$$= -2\sqrt{2}\ 2\pi\left(1 - \sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}\pi\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Справочный материал
Скалярное поле

Скалярным полем называют область D, в каждой точке которой задана функция $u = u(x; y; z)$ и саму функцию $u = u(x; y; z)$.

Множество точек области D, в которых скалярное поле $u(x; y; z)$ имеет постоянное значение C, называется *поверхностью уровня.* Уравнение поверхности уровня имеет вид:

$$u(x; y; z) = C,$$

Если область D - множество точек плоскости, то скалярное поле является плоским. Оно задается функцией двух переменных $u = u(x; y)$. Для плоского поля определены линии уровня, заданные уравнениями $u(x; y) = C$, где $C = const$.

Градиент скалярного поля $u(x; y; z)$ - это вектор, координатами которого являются частные производные поля по переменным $x,\ y,\ z$:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

1. Градиент показывает направление наибольшего возрастания поля в данной точке.

2. Модуль градиента равен наибольшей скорости возрастания поля в данной точке.

3. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.

Пусть в области D трехмерного пространства заданы скалярное поле $U(x; y; z)$ и единичный вектор, составляющий с координатными осями углы α, β, γ, $\vec{l} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ с началом в точке $M(x; y; z)$.

Рассмотрим точку $M_1(x + \Delta x;\ y + \Delta y;\ z + \Delta z)$ такую, что вектор $\overrightarrow{MM_1}$ сонаправлен с вектором $\vec{l}$. Его длина $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

При переходе точки M в точку M_1 в направлении вектора $\vec{l}$ скалярное поле $u = u(x; y; z)$ получит приращение

$$\Delta u = u(x + \Delta x;\ y + \Delta y;\ z + \Delta z) - u(x;\ y;\ z).$$

Предел $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}$, если он существует и конечен, называется *производной скалярного поля* в точке $M(x; y; z)$ по направлению $\vec{l}$. Для производной по направлению используют обозначение $\frac{\partial u}{\partial l}$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}.$$

Производная скалярного поля $u = u(x; y; z)$ в точке $M(x; y; z)$ по направлению $\vec{l}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}(M)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M)\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ равна скорости изменения поля в направлении вектора $\vec{l}$.

Если $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, то поле возрастает в направлении вектора $\vec{l}$, а если $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$, то поле в этом направлении убывает.

Производная скалярного поля $\frac{\partial u}{\partial l}$ в точке $M(x;y;z)$ по направлению $\vec{l}$ можно вычислить и через градиент этого поля по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{Пр}_{\vec{l}} \operatorname{grad} u(M) = \frac{\left(\operatorname{grad} u(M), \vec{l}\right)}{\left|\vec{l}\right|}.$$

Задача 6

а) Найти производную скалярного поля $u(x,y,z) = 4x^2 + y^2 - z^2 - 3xyz$ в точке $M(1;1;1)$ по направлению нормали к поверхности S: $2x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ в этой точке.

б) Найти направление наискорейшего возрастания поля $u = \sqrt{xy} + zy^2$ в точке $M(2;\,2;\,1)$ и наибольшую скорость возрастания в этой точке.

Решение задачи 6а

Поверхность S, проходящую через точку $M(1;1;1)$, можно рассматривать как поверхность уровня скалярного поля $S(x,\,y,\,z) = 2x^2 + y^2 - 2z^2 - 1$. По нормали к ней направлен $\operatorname{grad} S = \{4x,\,2y,\,-4z\}$, вычисленный в точке M, т.е. вектор

$$\operatorname{grad} S(M) = \{4,\,2,\,-4\}.$$

Вычислим градиент поля $u(x,y,z)$ в точке $M(1;1;1)$. Получим

$$\operatorname{grad} u = \{8x - 3yz,\,2y - 3xz,\,-2z - 3xy\},$$

$$\operatorname{grad} u(M) = \{5,\,-1,\,-5\}.$$

Для производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ скалярного поля $u(x,y,z)$ по нормали $\vec{n} = \operatorname{grad} S(M)$ к поверхности S используем формулу

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \text{Пр}_{\vec{n}} \operatorname{grad} u(M) = \frac{\left(\operatorname{grad} u(M),\,\operatorname{grad} S(M)\right)}{\left|\operatorname{grad} S(M)\right|} = \frac{4\cdot 5 - 2\cdot 1 + 4\cdot 5}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2}} =$$

$$= \frac{20 - 2 + 20}{\sqrt{16 + 4 + 16}} = \frac{38}{6} = \frac{19}{3}.$$

Решение задачи 6б

Направление наискорейшего возрастания поля в данной точке показывает градиент, вычисленный в этой точке.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + 2yz\right)\vec{j} + y^2\vec{k}.$$

$$\operatorname{grad} u(M) = \frac{1}{2}\vec{i} + \left(\frac{1}{2} + 4\right)\vec{j} + 4\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{9}{2}\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Наибольшая скорость возрастания поля в данной точке равна модулю градиента, вычисленного в этой точке.

$$V_{\text{наиб.}} = \left|\operatorname{grad} u(M)\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{81}{4} + 16} = \sqrt{\frac{73}{2}}.$$

Справочный материал

Векторное поле

Если в каждой точке $M \in D$ задан вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то говорят, что в области D задано *векторное поле* $\vec{a}$.

Если в пространстве введена прямоугольная декартова система координат, то

$$\vec{a}(M) = a_x(x;y;z)\vec{i} + a_y(x;y;z)\vec{j} + a_z(x;y;z)\vec{k} \text{ -}$$

вектор-функция переменных x, y, z, являющихся координатами точки $M(x, y, z)$. При этом предполагается, что функции $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$ и $a_z(x, y, z)$ имеют непрерывные частные производные по всем переменным.

Работа A векторного поля

$$\vec{a} = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y. z)\vec{k}$$

вдоль линии L от точки M до точки N находится как *криволинейный интеграл второго рода* по дуге $\overset{\cup}{MN}$ кривой L:

$$A = \int\limits_{\overset{\cup}{MN}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{\overset{\cup}{MN}} a_x(x, y, z)dx + a_y(x, y, z)dy + a_z(x, y, z)dz .$$

Работа по замкнутой кривой l называется циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ и обозначается $C = \oint\limits_l (\vec{a}, d\vec{r})$.

Свойства криволинейного интеграла второго рода

1. При изменении направления интегрирования интеграл меняет свой знак:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = -\int\limits_{\overset{\cup}{BA}} (\vec{a}, d\vec{r}).$$

2. Для циркуляции по замкнутой кривой выбор точки начала обхода безразличен.

Положительным направлением обхода считается то, при котором область, ограниченная этой кривой остаётся слева.

Остальные свойства криволинейного интеграла второго рода имеют такой же вид, как и для криволинейного интеграла первого рода.

Если векторное поле $\vec{a} = a_x(x, y)\vec{i} + a_y(x, y)\vec{j}$ плоское, то криволинейный интеграл второго рода вдоль кривой L, расположенной в координатной плоскости xOy, имеет вид

$$\int\limits_L (\vec{a}, dr) = \int\limits_L a_x(x, y)dx + a_y(x, y)dy .$$

Если кривая L задана параметрическими уравнениями: $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, и функции $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ - дифференцируемы, причём начальной точке M соответствует значение параметра t_1, а конечной точке N - значение параметра t_2, то

$$\int\limits_{\overset{\cup}{MN}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[a_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + + a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t)\right]dt .$$

Задача 7

а) Вычислить работу векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} + (x - y)\vec{k}$ вдоль отрезка прямой MN, если $M(1; 1; 1)$, $N(2; 4; 5)$.

б) Вычислите работу векторного поля $\vec{a} = (x^2 + y)\vec{i} + 2xy\,\vec{j}$ вдоль линии

$$L:\ y=\begin{cases}1-x^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & 1\le x\le 2\end{cases}.$$

Решение задачи 7а

$$A=\int\limits_{\overset{\smile}{MN}}(\vec{a},\,dr)=\int\limits_{\overset{\smile}{MN}}ydx+xdy+(x-y)dz\,.$$

Уравнение прямой MN запишем в параметрическом виде:

$$\begin{cases}x=t+1\\ y=3t+1\\ z=4t+1\end{cases}$$

и вычислим производные от функций $x=x(t)$; $y=y(t)$; $z=z(t)$:

$$\begin{cases}x'=1\\ y'=3\\ z'=4\end{cases}.$$

Пределы интегрирования для переменной t определим, учитывая, что при переходе от точки M к точке N функция $x=x(t)$ меняется от 1 до 2. Тогда $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=0\\ x=2\Rightarrow t=1\end{cases}$.

Следовательно,

$$A=\int\limits_{\overset{\smile}{MN}}ydx+xdy+(x-y)dz=$$

$$=\int\limits_0^1\left[(3t+1)\cdot 1+(t+1)\cdot 3+(t+1-3t-1)\cdot 4\right]dt=\int\limits_0^1(-2t+4)dt=\left(-t^2+4t\right)\Big|_0^1=3\,.$$

Решение задачи 7б

Кривая L состоит из двух частей, поэтому воспользуемся свойством аддитивности. Таким образом,

$$A=\int\limits_{\overset{\smile}{L}}(\vec{a},\,dr)=\int\limits_{\overset{\smile}{L_1}}(\vec{a},\,dr)+\int\limits_{\overset{\smile}{L_2}}(\vec{a},\,dr)=A_1+A_2\,,$$

где $L_1: y=1-x^2,\quad 0\le x\le 1$, $L_2: y=0,\quad 1\le x\le 2$.

$$A_1=\int\limits_{\overset{\smile}{L_1}}(\vec{a},\,dr)=\int\limits_{\overset{\smile}{L_1}}\left(x^2+y\right)dx+2xydy\,.$$

Так как $y=1-x^2$, то $dy=-2xdx$.

Получаем

$$A_1=\int\limits_{\overset{\smile}{L_1}}(\vec{a},\,dr)=\int\limits_0^1\left(x^2+\left(1-x^2\right)\right)dx+2x\left(1-x^2\right)(-2x)dx=\int\limits_0^1\left(1-4x^2+4x^4\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{7}{15}\,.$$

$$A_2=\int\limits_{\overset{\smile}{L_2}}(\vec{a},\,dr)=\int\limits_{\overset{\smile}{L_2}}\left(x^2+y\right)dx+2xydy\,.$$

Так как $y=0$, то $dy=0$.

Получаем

$$A_2 = \int\limits_{\smile\, L_2} (\vec{a}, dr) = \int\limits_1^2 \left(x^2 + 0\right) dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Окончательно,

$$A = A_1 + A_2 = \frac{7}{15} + \frac{7}{3} = \frac{14}{5}.$$

Справочный материал

Поток векторного поля

Пусть D - область трехмерного пространства, в которой задано векторное поле

$$\vec{a} = a_x(x;y;z)\vec{i} + a_y(x;y;z)\vec{j} + a_z(x;y;z)\vec{k},$$

и пусть σ - гладкая поверхность в области D, на которой задана единичная нормаль $\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$.

Разобьем поверхность σ на n частей $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ (элементарных поверхностей) и выберем на каждой элементарной поверхности σ_i произвольно точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \sigma_i$.

Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{a}(M_i), \vec{n}(M_i)) \cdot \Delta\sigma_i.$$

Предел этой суммы при $n \to \infty$ и $\max\limits_i \Delta\sigma_i \to 0$, если он существует, конечен, не зависит от способа разбиения поверхности σ на элементарные участки σ_i и от выбора точек M_i, называется потоком векторного поля $\vec{a}$ через поверхность σ в направлении нормали $\vec{n}$. Для потока используют обозначение

$$\iint\limits_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta\sigma_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (\vec{a}(M_i), \vec{n}(M_i)) \cdot \Delta\sigma_i.$$

Если поток вычисляется по замкнутой поверхности σ, то для него используют обозначение $\oiint\limits_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma$.

Поток меняет знак, если меняется направление нормали, то есть

$$\iint\limits_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}_1) d\sigma = -\iint\limits_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}_2) d\sigma, \text{ если } \vec{n}_1 = -\vec{n}_2.$$

Поток обладает свойством аддитивности.

Вычисление потока

Если поверхность σ задана неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$, то, проектируя ее на координатную плоскость xOy в область D_{xy}, получим

$$\iint\limits_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \pm \iint\limits_{D_{xy}} \frac{(\vec{a}, \operatorname{grad} F)}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dxdy;$$

проектируя ее на координатную плоскость xOz в область D_{xz}, получим

$$\iint\limits_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \pm \iint\limits_{D_{xz}} \frac{(\vec{a}, \operatorname{grad} F)}{\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|} dxdz;$$

проектируя ее на координатную плоскость yOz в область D_{yz}, получим

$$\iint_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma = \pm\iint_{D_{yz}}\frac{(\vec{a},\operatorname{grad}F)}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|}dydz\,.$$

Во всех этих формулах следующее правило выбора знака:

знак плюс берется, если $\operatorname{grad}F \uparrow\uparrow \vec{n}$,

знак минус – если $\operatorname{grad}F \uparrow\downarrow \vec{n}$.

Если поверхность σ - часть плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей, то единичной нормалью будет один из базисных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ или противоположный ему вектор в зависимости от направления потока.

Поток через цилиндр $x^2+y^2=R^2$, ограниченный поверхностями $z=f_1(x,y)$ и $z=f_2(x,y)$, где $f_1(x,y)\le f_1(x,y)$, можно вычислить, полагая

$$x = R\cos\varphi,$$
$$y = R\sin\varphi,$$
$$z = z,$$

элемент поверхности $d\sigma = Rd\varphi dz$.

Формула для вычисления потока в этом случае такова:

$$\iint_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma = R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{f_1(R\cos\varphi,R\sin\varphi)}^{f_2(R\cos\varphi,R\sin\varphi)}(\vec{a},\vec{n}_0)dz\,,$$

где $\vec{n}_0 = \dfrac{2x\vec{i}+2y\vec{j}}{\sqrt{4x^2+4x^2}} = \dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}}{R}$ – единичная нормаль к поверхности цилиндра.

Дивергенцией векторного поля $\vec{a}$ *в* точке дифференцируемости M называется

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x}(M)+\frac{\partial a_y}{\partial y}(M)+\frac{\partial a_z}{\partial z}(M).$$

Теорема Гаусса - Остроградского

Если координаты векторного поля $\vec{a}$, т.е. функции $a_x(x;y;z)$; $a_y(x;y;z)$ и $a_z(x;y;z)$, непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области V, ограниченной поверхностью σ, то поток векторного поля через замкнутую поверхность σ равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по области V:

$$\oiint_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma = \iiint_V div\,\vec{a}\;dxdydz\;,$$

где σ - граница области V и нормаль $\vec{n}$ – внешняя.

Задача 8

а) Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = xz\vec{i}+xy\vec{j}-yz\vec{k}$ через часть поверхности $x^2+y^2=z^2$ при $0\le z\le 3$ в направлении внешней нормали по теореме Гаусса - Остроградского и непосредственно (нормаль внешняя к замкнутой поверхности).

б) Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = y^2\vec{i}+y\vec{j}+z^2\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограниченную цилиндром $x^2+z^2=4$ и плоскостями $y=0$ и $y=2$, по теореме Гаусса - Остроградского и непосредственно (нормаль внешняя к замкнутой поверхности).

Решение задачи 8а

Поверхность σ_1, заданная уравнением $x^2+y^2=z^2$ и ограниченная плоскостью $z=3$, показана на рисунке 18. Вычислим поток векторного поля через нее двумя способами.

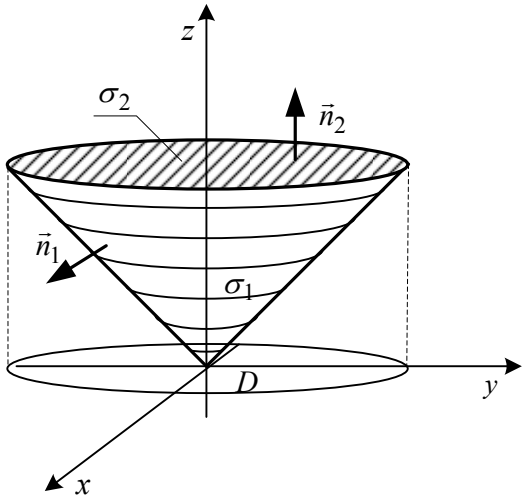

Рис. 18.

1. Используем теорему Гаусса - Остроградского. Для этого найдем дивергенцию поля.

$$div\,\vec{a} = z + x - y\,.$$

По теореме Гаусса – Остроградского вычислим поток P через замкнутую поверхность $\sigma_1 \cup \sigma_2$.

$$P = \iiint\limits_V div\,\vec{a}\,dxdydz = \iiint\limits_V (z + x - y)dxdydz\,.$$

Тройной интеграл сведем к двойному интегралу, проектируя область V в плоскость xOy.

$$P = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} (z + x - y)dz = \iint\limits_D \left(\frac{z^2}{2} + (x - y)z \right)\Bigg|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{9}{2} + 3(x - y) - \frac{x^2 + y^2}{2} - (x - y)\sqrt{x^2 + y^2} \right) dxdy\,.$$

Решив совместно уравнения ограничивающих область V поверхностей

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 3 \end{cases}, \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 3 \end{cases},$$

выясним, что область D, на которую проектируется область V, представляет собой круг радиуса 3, лежащий в плоскости $z = 3$.

Перейдем в полученном двойном интеграле к полярным координатам.

$$P = \iint\limits_D \left(\frac{9}{2} + 3(\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi) - \frac{\rho^2}{2} - (\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi)\rho \right) \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \left(\frac{9}{2} + 3(\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi) - \frac{\rho^2}{2} - (\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi)\rho \right) \rho d\rho =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \left(\frac{9}{2} - \frac{\rho^2}{2} \right) \rho d\rho + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \left(3(\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi) - (\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi)\rho \right) \rho d\rho\,.$$

Так как интегралы от косинуса и синуса по промежутку, длина которого равна периоду, обращаются в нуль, то

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \left(3(\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi) - (\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi)\rho\right)\rho d\rho = 0 .$$

Поэтому

$$P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \left(\frac{9}{2} - \frac{\rho^2}{2}\right)\rho d\rho = 2\pi\left(\frac{9}{4}\rho^2 - \frac{\rho^4}{8}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{81\pi}{4} .$$

Теперь вычислим поток P_2 через поверхность σ_2 в направлении нормали $\vec{n}_2$.

$$P_2 = \iint_{\sigma_2} (\vec{a}, \vec{n}_2) d\sigma .$$

Поверхность проектируются в плоскость xOy область D (рис. 18).

σ_2: $z = 3$; $\vec{n}_2 = \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $(\vec{a}, \vec{n}_2) = -yz = -3y$. Тогда

$$P_2 = \iint_{\sigma_2} (-3y) d\sigma = -3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^2 \sin\varphi d\rho = 0 .$$

Поскольку поток $P = P_1 + P_2$, где P_1 - поток через поверхность σ_1, заданную уравнением $x^2 + y^2 = z^2$ при $0 \le z \le 3$, то поток через эту поверхность равен

$$P_1 = P - P_2 = \frac{81\pi}{4} - 0 = \frac{81\pi}{4} .$$

2. Для вычисления потока P_1 через поверхность σ_1 в направлении нормали $\vec{n}_1$ (рис. 18) можно использовать следующую формулу:

$$P_1 = \iint_{\sigma_1} (\vec{a}, \vec{n}_1) d\sigma = \pm\iint_D \frac{(\vec{a}, \operatorname{grad} F)}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dxdy .$$

Поскольку уравнение поверхности σ_2 можно преобразовать к виду $F(x, y, z) = 0$, где

$F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z$, то $\operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -1 \end{pmatrix}$. Ясно, что $\operatorname{grad} F \uparrow\uparrow \vec{n}_2$, так как оба

вектора образуют с осью Oz угол, больший, чем 90°. $\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| = 1$.

Вычислим скалярное произведение

$$(\vec{a}, \operatorname{grad} F) = \frac{x^2 z}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + yz .$$

При $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеем

$$(\vec{a}, \operatorname{grad} F) = \frac{x^2\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y\sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\sqrt{x^2 + y^2} .$$

Выбирая знак плюс перед интегралом, для потока P_1 получим формулу:

$$P_1 = \iint\limits_D \left(x^2 + \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\sqrt{x^2+y^2} \right) dxdy .$$

В записанном двойном интеграле перейдем к полярным координатам.

$$P_1 = \iint\limits_D \left(\rho^2 \cos^2\varphi + \frac{\rho\cos\varphi\rho^2\sin^2\varphi}{\rho} + \rho^2\sin\varphi \right) \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \iint\limits_D \left(\cos^2\varphi + \cos\varphi\sin^2\varphi + \sin\varphi \right) \rho^3 d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\cos^2\varphi + \cos\varphi\sin^2\varphi + \sin\varphi \right) d\varphi \int\limits_0^3 \rho^3 d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\cos^2\varphi + \cos\varphi\sin^2\varphi + \sin\varphi \right) \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^3 d\varphi = \frac{81}{4}\left(\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\sin\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \right) =$$

$$= \frac{81}{4}\left(\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{2\pi} \right) = \frac{81\pi}{4} .$$

Решение задачи 8б

1. По теореме Гаусса – Остроградского

$$P = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\, dxdydz .$$

Так как $\operatorname{div}\vec{a} = 0 + 1 + 2z = 1 + 2z$, то $P = \iiint\limits_V (1+2z)\, dxdydz$.

Область V показана на рис. 19. Она проектируется в координатную плоскость xOz на область D - круг радиуса 2. Следовательно, тройной интеграл можно свести к двойному интегралу по области D .

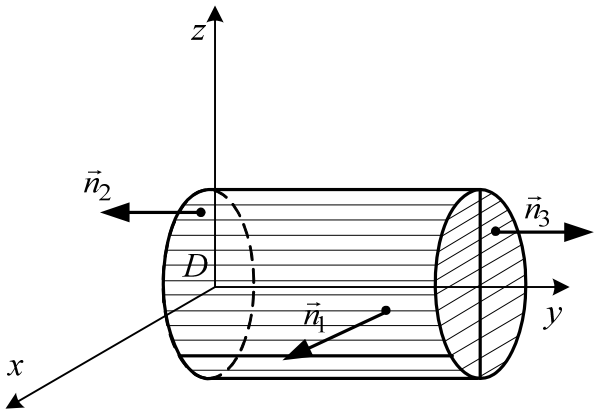

Рис. 19.

$$P = \iint\limits_D dxdz \int\limits_0^2 (1+2z)dy = \iint\limits_D dxdz(1+2z)y\Big|_0^2 = 2\iint\limits_D (1+2z)dxdz .$$

Перейдём в этом двойном интеграле к полярным координатам: по формулам

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}, \; dxdz = \rho\, d\rho\, d\varphi .$$

Расставив пределы интегрирования, перейдем к повторному интегралу:

$$P = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (1 + 2\rho\cos\varphi)\rho d\rho = 2\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2 d\varphi + 4\int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^2 \cos\varphi d\varphi = 8\pi .$$

2. Теперь вычислим поток, разбивая его на три потока

$$P = P_1 + P_2 + P_3 ,$$

где P_1 - проток через поверхность цилиндра, а P_2 и P_3 - потоки через плоскости $y = 0$ и $y = 2$ соответственно.

Для нахождения потока через цилиндрическую поверхность воспользуемся формулой

$$P_1 = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{f_1(R\cos\varphi, R\sin\varphi)}^{f_2(R\cos\varphi, R\sin\varphi)} (\vec{a}, \vec{n}_1) dy ,$$

где $R = 2$, $z = 2\cos\varphi$, $x = 2\sin\varphi$, $y = y$, $\vec{n}_1 = \dfrac{x\vec{i} + z\vec{k}}{2}$.

Так как $(\vec{a}, \vec{n}_1) = \dfrac{xy^2 + z^3}{2}$, то в координатах по поверхности цилиндра это скалярное произведение запишется как $(\vec{a}, \vec{n}_1) = \dfrac{y^2 2\sin\varphi + 8\cos^3\varphi}{2} = y^2 \sin\varphi + 4\cos^3\varphi$.

Вычислим поток:

$$P_1 = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(y^2 \sin\varphi + 4\cos^3\varphi\right) dy = 8\int_0^{2\pi} \cos^3\varphi y\Big|_0^2 d\varphi = 8\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\sin\varphi =$$

$$= 8\int_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2\varphi\right) d\sin\varphi = 0 .$$

Теперь вычислим потоки P_2 и P_3 через плоскости $y = 0$ и $y = 2$.

$$P_2 = \iint_{\sigma_2} (\vec{a}, \vec{n}_2) d\sigma .$$

Поскольку $\sigma_2 : y = 0$, $\vec{n}_2 = -\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\vec{a}, \vec{n}_2) = -y = 0$, то

$$P_2 = \iint_{\sigma_2} 0\, d\sigma = 0 .$$

$$P_3 = \iint_{\sigma_3} (\vec{a}, \vec{n}_3) d\sigma .$$

Поскольку $\sigma_3 : y = 2$, $\vec{n}_3 = \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\vec{a}, \vec{n}_3) = y = 2$, то

$$P_3 = \iint_{\sigma_3} 2\, d\sigma = 2\iint_{\sigma_3} d\sigma = 2 \cdot S_{\text{круга}} = 2 \cdot 4\pi = 8\pi .$$

Складывая все потоки, получим поток через замкнутую поверхность

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 0 + 0 + 8\pi = 8\pi .$$

Справочный материал

Работа по замкнутой кривой L называется циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ и обозначается $C = \oint_l (\vec{a}, d\vec{r})$. Кривую L называют замкнутым контуром.

Теорема Стокса

Если в области D трехмерного пространства задано векторное поле

$$\vec{a} = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$$

и функции $a_x(x; y; z)$, $a_y(x; y; z)$ и $a_z(x; y; z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка, то

$$C = \oint_L \left(\vec{a}, \overrightarrow{dr}\right) = \iint_\sigma (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n}) d\sigma .$$

где $\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$ - ротор векторного поля, σ – любая поверхность, натянутая на контур L, а нормаль $\vec{n}$ выбирается так, чтобы относительно нее обход контура был положительным (положительным направлением обхода контура считать то, при котором точка перемещается против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора нормали).

Задача 9

Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = x^2 z^3 \vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$ по контуру $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x = 1 \end{cases}$ с помощью формулы Стокса и непосредственно.

Решение задачи 9

1. Контур Γ представляет собой линию пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ и плоскости $x = 1$, то есть окружность радиуса 2, лежащую в плоскости $x = 1$:

$$\Gamma : \begin{cases} y^2 + z^2 = 4 \\ x = 1 \end{cases} .$$

$$\Gamma : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2\cos t \\ z = 2\sin t \end{cases} , \begin{cases} dx = 0 \\ dy = -2\sin t\, dt \\ dz = 2\cos dt \end{cases} , \ 0 \le t \le 2\pi .$$

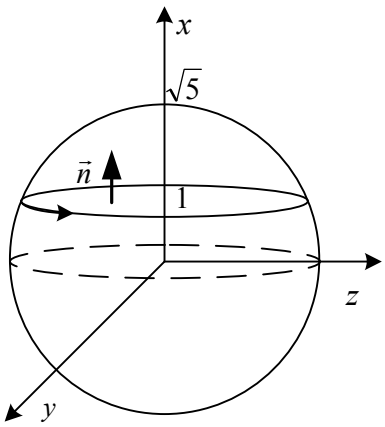

Рис. 20.

На рис. 20 изображен контур Γ. Система координат на этом рисунке расположена с поворотом.

Вычислим циркуляцию $C = \oint_\Gamma x^2 z^3 dx - zdy + ydz$, задавая контур Γ параметрическими уравнениями:

Тогда циркуляцию векторного поля можно записать в виде определенного интеграла

$$C=\int_0^{2\pi}\left(0+4\sin^2 t+4\cos^2 t\right)dt=4\int_0^{2\pi}dt=8\pi .$$

2. Вычислим циркуляцию, используя теорему Стокса:

$$C=\iint_\sigma\left(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n}\right)d\sigma ,$$

где σ - круг радиуса 2, лежащий в плоскости $x=1$.

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2z^3 & -z & y\end{vmatrix}=\vec{i}\left(1-(-1)\right)-\vec{j}\left(0-3x^2z^2\right)+\vec{k}(0-0)=2\vec{i}+3x^2z^2\vec{j} .$$

Поскольку единичной нормалью, со стороны которой обход контура положительный, к поверхности $x=1$ является вектор $\vec{i}$, то $\left(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n}\right)=\left(2\vec{i},\vec{i}\right)=2$. Поэтому

$$C=\iint_\sigma 2d\sigma=2S_{\text{круга}}=2\pi 2^2=8\pi .$$

Справочный материал

Векторное поле $\vec{a}$ называется потенциальным, если существует скалярная функция $u(x;y;z)$, такая, что $\vec{a}=\operatorname{grad}u$. Функция $u(x;y;z)$ при этом называется *потенциалом поля.*

Для того чтобы поле вектора $\vec{a}$ было потенциально, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rot}\vec{a}=0$.

Потенциал поля в произвольной точке $M(x,y,z)$ вычисляется через криволинейный интеграл второго рода по формуле

$$u(M)=u(x,y,z)=\int_{AM}\left(\vec{a},d\vec{r}\right)+C ,$$

где A - любая точка, лежащая в области непрерывности поля.

Поскольку в потенциальном поле криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования, то путь интегрирования AM может быть выбран любым. Удобнее всего вести интегрирование вдоль ломаной с отрезками, параллельными координатным осям.

Задача 10

Проверить потенциальность поля вектора $\vec{a}=-\dfrac{yz^2}{x^2}\vec{i}+\dfrac{z^2}{x}\vec{j}+\dfrac{2yz}{x}\vec{k}$, найти потенциал.

Решение задачи 10

Поле потенциально, если его ротор равен нулю.

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -\dfrac{yz^2}{x^2} & \dfrac{z^2}{x} & \dfrac{2yz}{x}\end{vmatrix}=\left(\frac{2z}{x}-\frac{2z}{x}\right)\vec{i}-\left(-\frac{2yz}{x^2}+\frac{2yz}{x^2}\right)\vec{j}+\left(-\frac{z^2}{x^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)\vec{k}=\vec{0} .$$

Найдём потенциал поля. В качестве точки A выберем точку, в которой поле определено, например, точку с координатами $(1,0,0)$. Тогда

$$u(M)=\int\limits_{(1,0,0)}^{(x,y,z)}(\vec{a},d\vec{r})+C=\int\limits_{(1,0,0)}^{(x,y,z)}-\frac{yz^2}{x^2}dx+\frac{z^2}{x}dy+\frac{2yz}{x}dz+C\,.$$

Путь интегрирования выберем в виде ломаной, отрезки которой параллельны координатным осям (рис. 21).

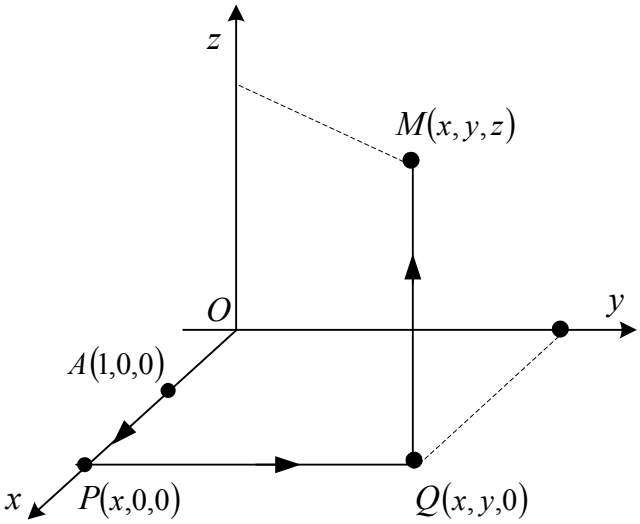

Рис. 21.

Из рисунка видно, что на отрезке AP: $1\le x\le x$, $y=0$, $z=0$, $dy=0$, $dz=0$; на отрезке PQ: $0\le y\le y$, $x=x$, $z=0$, $dx=0$, $dz=0$; на отрезке QM: $0\le z\le z$, $x=x$, $y=y$, $dx=0$, $dy=0$.

Тогда

$$u(M)=\int\limits_{AP}\left(-\frac{yz^2}{x^2}\right)dx+\int\limits_{PQ}\frac{z^2}{x}dy+\int\limits_{QM}\frac{2yz}{x}dz+C=$$

$$=\int\limits_1^x 0dx+\int\limits_0^y 0dy+\int\limits_0^z\frac{2yz}{x}dz+C=\frac{2y}{x}\int\limits_0^z zdz+C=\frac{yz^2}{x}+C\,.$$

Найдем градиент полученной функции и убедимся, что $\vec{a}=\operatorname{grad}u$:

$$\operatorname{grad}u=\operatorname{grad}\left(\frac{yz^2}{x}+C\right)=-\frac{yz^2}{x^2}\vec{i}+\frac{z^2}{x}\vec{j}+\frac{2yz}{x}\vec{k}=\vec{a}\,.$$