МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение

Высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Вычислительная математика

Методические указания

К выполнению контрольных работ

Санкт-Петербург

2009

Составители: Дьякова Г.Н., Решетов Л.А., Стрепетов А.В.

Рецензент: кафедра высшей математики Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.
Канд. физ.-мат. наук В.А. Вешев.

Методические указания содержат необходимый теоретический материал, примеры решения упражнений и варианты контрольных работ. Предназначены для студентов заочного факультета, обучающихся по специальности 2204.

Подготовлены кафедрой прикладной математики и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом СПбГУАП.

Подписано к печати 04. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. . Тираж экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел
Отдел электронных публикаций и библиографии библиотеки
Отдел оперативной полиграфии
СПбГУАП

190000, Санкт-Петербург, ул. Б. Морская, 67

1. Векторы и матрицы.

Вектор $\mathbf{x}$ задается столбцом n чисел. Транспонированный вектор $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ задается строкой тех же компонент:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Квадратную матрицу $\mathbf{A}$ задают в виде таблицы $n \times n$ чисел:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В n - мерном пространстве векторов $\mathbb{R}^n$ можно вводить различные нормы. Наиболее употребительны две из них:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \max_{1 \le i \le n} |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В пространстве квадратных матриц $n \times n$ можно также вводить различные нормы. Рассмотрим нормы матриц, соответствующие введенным векторным нормам:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|\mathbf{A}\|_2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Явного выражения для $\|\mathbf{A}\|_2$ в случае произвольной матрицы нет. В случае симметричной матрицы $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A})$ норма $\|\mathbf{A}\|_2$ совпадает с максимальным по модулю собственным числом.

Матрица $\mathbf{E}$ называется единичной, если на диагонали у нее единицы, а остальные элементы нули. Обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ определяется из соотношения $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Элементы обратной матрицы $(\mathbf{A}^{-1})_{ij}$ находятся по формулам

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det \mathbf{A}} \mathbf{M}_{ji}, \quad 1 \le i, j \le n,$$

где $\mathbf{M}_{ji}$ - минор, получаемый вычеркиванием j - й строки и i - го столбца матрицы $\mathbf{A}$, а определитель матрицы $\mathbf{A}$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{i+k} \mathbf{M}_{ik} .$$

2. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

2.1. Прямые методы решения систем.

Метод исключения Гаусса и LU разложение.

Наиболее распространенным прямым методом решения систем линейных алгебраических уравнений является метод исключения Гаусса. Доказано, что система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = в_n \end{cases} \tag{1.1}$$

с заполненной матрицей не может быть решена за число шагов меньшее, чем то, которое требуется для реализации метода Гаусса.

Гауссовское исключение существует во многих вариантах, которые алгебраически эквивалентны, но отличаются друг от друга порядком исключения элементов, способами предупреждения больших погрешностей. Описание различных вариантов метода приведено в работах [1-4].

Алгебраической основой метода исключения является представление матрицы **A** в виде произведения **A=LU**, где **L=**$\{l_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ -нижняя треугольная матрица, $l_{11}=l_{22}=\ldots=l_{nn}=1$; **U=**$\{u_{ij}\}_{ij}^{n}$ -верхняя треугольная матрица. Представление **A=LU** называется **LU** разложением матрицы **A**.

Докажем эквивалентность метода Гаусса определению **LU** разложения матрицы **A**.

Рассмотрим обыкновенное Гауссовское исключение без перестановок. Допустим, что $a_{ii} \neq 0,\ i=\overline{1,n}$.

Первый шаг метода состоит в исключении неизвестной x_1 из всех уравнений системы за исключением первого. Обозначим систему уравнений, полученную после первого шага через $\mathbf{A}_1\mathbf{x}=\mathbf{b}_1$.Пусть матрица $\mathbf{A}_1=(a_1^{(1)},a_2^{(1)},...,a_n^{(1)})$**.** Используя правило умножения матриц нетрудно убедиться в том, что $\mathbf{A}_1=\mathbf{M}_1\mathbf{A}$**,** $\mathbf{b}_1=\mathbf{M}_1\mathbf{b}$**,** где $\mathbf{M}_1$ - нижняя треугольная матрица**,**

$$\mathbf{M}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ m_{21} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ m_{n1} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$m_{i1}=-\frac{a_{i1}}{a_{11}},\ i>1, \qquad (1.2)_1$$

а коэффициенты матрицы $\mathbf{A}_1$ вычисляются по формулам:

$$a_{ij}^{(1)}=a_{ij}-m_{i1}a_{1j},\ j>1. \qquad (1.3)_1$$

На втором шаге метода система уравнений $\mathbf{A}_1\mathbf{x}=\mathbf{b}_1$ приводится к системе $\mathbf{A}_2\mathbf{x}=\mathbf{b}_2$**,** в которой переменная x_2 исключена из всех уравнений, кроме первых двух. В матричных обозначениях это соответствует умножению $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{b}_1$ на нижнюю треугольную матрицу $\mathbf{M}_2$,

$$\mathbf{M}_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & . & . & 0\\ 0 & 1 & . & . & 0\\ 0 & m_{32} & . & . & 0\\ . & . & . & . & .\\ 0 & m_{n2} & . & . & 1\end{pmatrix},$$

где

$$m_{i2}=-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},i>2. \qquad (1.2)_2$$

Таким образом, $\mathbf{A}_2$=$\mathbf{M}_2\mathbf{A}_1$=$\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{A}$, $\mathbf{b}_2=\mathbf{M}_2\mathbf{b}_1=\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{b}$.

Коэффициенты матрицы $\mathbf{A}_2$ вычисляются так

$$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-m_{i2}a_{2j}^{(1)},j>2. \qquad (1.3)_2$$

Аналогичные соотношения связывают левые и правые части систем уравнений, полученных на k-ом и (k-1)-ом шагах ($k=\overline{1,n-1}$)

$$\mathbf{A}_k=\mathbf{M}_k\mathbf{A}_{k-1}=\mathbf{M}_k\mathbf{M}_{k-1}\ldots\mathbf{M}_1\mathbf{A},\ \mathbf{b}_k=\mathbf{M}_k\mathbf{b}_{k-1}=\mathbf{M}_k\mathbf{M}_{k-1}\ldots\mathbf{M}_1\mathbf{b}, \qquad (1.4)$$

здесь $\mathbf{M}_k$ - нижняя треугольная матрица с ненулевыми поддиагональными элементами в k-ом столбце.

На последнем $(n-1)$-ом приходим к системе уравнений $\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{x}=\mathbf{b}_{n-1}$, где $\mathbf{A}_{n-1}$ - верхняя треугольная матрица, коэффициенты которой вычисляются по формулам

$$m_{i,n-1}=-\frac{a_{i,n-1}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}},\quad i>n-1 \qquad (1.2)_{n-1}$$

$$a_{ij}^{(n-1)}=a_{ij}^{(n-2)}-m_{i,n-1}a_{n-1,j}^{(n-2)},\quad j>n-1 \qquad (1.3)_{n-1}$$

Обозначим $\mathbf{A}_{n-1}$=$\mathbf{U}$, тогда $u_{ij}=a_{ij}^{(i-1)},j>i;i,j=\overline{1,n}$

Из формулы (1.4) следует, что имеет место матричное равенство $\mathbf{M}_{n-1}\mathbf{M}_{n-2}\ldots\mathbf{M}_1\mathbf{A}$=$\mathbf{U}$ или $\mathbf{A}$=$\mathbf{LU}$, где $\mathbf{L}$=$\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2^{-1}\ldots\mathbf{M}_{n-1}^{-1}$. Матрицы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{U}$ имеют, соответственно, вид нижней и верхней треугольных матриц:

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{U}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты матрицы **L**=$\{l_{ij}\}$, l_{ij}=0, при $i<j$; l_{ij}=1, при $i=j$; l_{ij} при $i>j$ вычисляются по формулам (1.2), а $u_{ij}\neq 0$,при $j\geq i$, определяются по формулам (1.3).

Итак, если на каждом шаге $a_{\kappa\kappa}^{(\kappa-1)}\neq 0, \kappa=1,2,...,n$, то можно получить такие верхнюю **U** и нижнюю **L** треугольные матрицы, что **A=LU**, причем

$$\det\mathbf{A}=u_{11}u_{22}...u_{nn}=a_{11}^{(0)}a_{22}^{(1)}...a_{nn}^{(n-1)}.$$

Решение системы алгебраических уравнений методом LU-разложений.

С помощью изложенной выше схемы уравнение

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

представим в виде:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{L}\mathbf{U}\,\mathbf{x}=\mathbf{b}.$$

Решение последнего уравнения эквивалентно решению системы уравнений:

$$\begin{cases}\mathbf{L}\mathbf{y}=\mathbf{b}\\ \mathbf{U}\mathbf{x}=\mathbf{y}\end{cases} \tag{1.5}$$

с треугольными матрицами **L** и **U.**

Вначале найдем решение системы $\mathbf{L}\,\mathbf{y}=\mathbf{b}$ с нижнетреугольной матрицей **L,** в результате найдем вектор $\mathbf{y}$. Далее найдем решение системы $\mathbf{U}\,\mathbf{x}=\mathbf{y}$ с верхнетреугольной матрицей **U,** т.е. искомый вектор $\mathbf{x}$:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}} \\ y_2 = \dfrac{b_2 - b_1 y_1}{l_{22}} \\ \ldots \\ y_n = \dfrac{b_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} l_{nj} y_j}{l_{nn}} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{u_{nn}} \\ x_{n-1} = \dfrac{y_{n-1} - u_{n-1,n} y_n}{u_{n-1,n-1}} \\ \ldots \\ x_1 = \dfrac{y_1 - \sum\limits_{j=2}^{n} u_{1j} y_j}{u_{11}} \end{cases} \qquad (1.6).$$

В методе исключения с перестановками прямой ход также равносилен **LU**-разложению, но не самой матрицы **A**, а полученной из нее в результате перестановок.

Пример 1. Решить систему $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad (1.7)$$

методом **LU-** разложений.

Решение. На первом этапе построим **LU-** разложение матрицы **A**.

Шаг 1:по формулам $(1.2)_1$ находим $l_{21} = 3, l_{31} = 2$. Элементы матрицы $\mathbf{A}_1$ вычислим по формулам $(1.3)_1$:

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2:по формуле $(1.2)_2$ вычисляем, что коэффициент $l_{32} = 1$. Элементы матрицы $\mathbf{A}_2$ получим используя формулы $(1.3)_2$:

$$\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Итак, построены матрица $\mathbf{U}=\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{A}=\mathbf{A}_2$ и матрица **L**

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{U}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}. \qquad (1.8)$$

Этап 2. С помощью формул (1.6) найдем решение системы (1.5):

$y_1=-1, y_2=12, y_3=0$, компоненты искомого вектора $\mathbf{x}$ равны:

$x_1=1, x_2=2, x_3=0$,

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}.$$

2.2. Погрешности решения систем линейных алгебраических уравнений.

Погрешность результата решения системы (1.1) определяется следующими причинами:

1. Неточность информации о решаемой задаче. Ошибки в начальных данных определяют ту часть погрешности, которая не зависит от математической стороны решения задачи и называется неустранимой погрешностью.
2. Погрешность аппроксимации или погрешность метода. Пари решении задач линейной алгебры итерационными методами неизбежно приходится иметь дело только с конечным числом операций, что позволяет подходить к решению с определенной точностью.
3. Погрешность округлений. Влияние этих ошибок приводит к тому, что в действительности вместо системы (1.1) решается система вида

$$(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}, \qquad (2.1)$$

где $\Delta\mathbf{A}$ - матрица погрешностей элементов $\mathbf{A}$, $\Delta\mathbf{b}$ - вектор погрешностей компонент $\mathbf{b}$.

Обозначим через $\Delta\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ погрешность решения системы (1.1) и оценим влияние ошибок в $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ на величину $\Delta\mathbf{x}$.

Поскольку $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$, то $\Delta\mathbf{x}$ удовлетворяет уравнению

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

откуда следует, что

$$\Delta\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b}.$$

Умножив последнее равенство слева на $\mathbf{A}^{-1}$ и, пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, получим

$$\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}.$$

Следовательно,

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{b}\| \quad .$$

Это неравенство приводит к следующему неравенству для относительной ошибки $\delta\mathbf{x} = \dfrac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$:

$$\delta\mathbf{x} \le \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\left[\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|}\right].$$

Поскольку $\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \ge \|\mathbf{b}\|$, то

$$\delta\mathbf{x} \le \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\left[\delta\mathbf{A} + \delta\mathbf{b}\right], \tag{2.2}$$

здесь слагаемые в скобках представляют собой относительные погрешности $\delta\,\mathbf{A} = \dfrac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$ элементов матрицы $\mathbf{A}$ и $\delta\mathbf{b} = \dfrac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ вектора $\mathbf{b}$.

Из неравенства (2.2) следует, что мерой чувствительности результата решения системы (1.1) к погрешностям в исходных данных может служить число $\nu(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|$, называемое числом обусловленности матрицы $\mathbf{A}$, $(\nu(\mathbf{A}) \ge 1)$.

Если погрешности в исходных данных приводят к значительным погрешностям в решении ($\nu(\mathbf{A})$ имеет большое значение), то система называется плохо обусловленной.

Пример 2. Оценить погрешность решения системы линейных уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, где матрица $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{b}$ заданы выражениями (1.7), если погрешность задания правой части системы $\Delta\mathbf{b}$=0.01.

Решение. Погрешность решения системы линейных уравнений определяется числом обусловленности $\nu(\mathbf{A}) = \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\left\|\mathbf{A}\right\|$ матрицы системы $\mathbf{A}$ и, в данном случае ($\delta\mathbf{A}$ =0),

$$\delta\mathbf{x} \le \nu(\mathbf{A})\delta\mathbf{b}.$$

Относительная погрешность $\delta\mathbf{b}$ вектора $\mathbf{b}$ равна

$$\delta\mathbf{b} = \frac{\left\|\Delta\mathbf{b}\right\|}{\left\|\mathbf{b}\right\|} = \frac{0.01}{10} = 10^{-3}.$$

Для получения числа обусловленности необходимо вычислить нормы матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$. Норма матрицы $\mathbf{A}$

$$\left\|\mathbf{A}\right\| = 18.$$

Норму обратной матрицы $\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|$ получим с помощью **LU-** разложения матрицы **A**

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}.$$

Обратим матрицы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{U}$, используя выражение (1.8)

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда для матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ получаем выражение

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

из которого следует, что $\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| = \frac{11}{12}$.

Число обусловленности $\nu(\mathbf{A}) = \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \left\|\mathbf{A}\right\| = 16.5$.

Итак, погрешность решения можно оценить следующим образом: $\delta\mathbf{x} \le \nu(\mathbf{A})\delta\mathbf{b} \approx 1.7 \cdot 10^{-2}$.

3. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Решения, получаемые с помощью прямых методов, обычно содержат погрешности, вызванные округлениями при выполнении операций над числами. Рассмотрим методы, позволяющие уточнить решение, полученное с помощью прямого метода, либо самостоятельно получить это решение.

Первым шагом в итерационном методе является преобразование исходной системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ к виду

$$\mathbf{Cx} = \mathbf{Bx} + \mathbf{d}, \tag{3.1}$$

где матрицы $\mathbf{C}, \mathbf{B}$ и вектор $\mathbf{d}$ определяются по матрице $\mathbf{A}$ и вектору $\mathbf{b}$. При этом обе системы являются эквивалентными, т.е. их решения совпадают. Вторым шагом является расстановка индексов в (3.1) и задание нулевого приближения, т.е.

$$\mathbf{Cx}^{(k+1)} = \mathbf{Bx}^{(k)} + \mathbf{d}, \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{3.2}$$

где $\mathbf{x}^{(0)}$ - заданный вектор. Оценка погрешности k - го приближения определяется соотношением

$$\left\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^* \right\| \le \varepsilon , \tag{3.3}$$

где $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ - точное решение исходной системы.

Оценка (3.3) при заданном $\varepsilon > 0$ позволяет осуществлять остановку итерационного процесса.

Различные итерационные методы отличаются выбором матриц $\mathbf{C}, \mathbf{B}$ и вектора $\mathbf{d}$.

Если $\mathbf{C} = \mathbf{E}$, то метод построения последовательных приближений (3.2) принято называть методом простых итераций. Известен следующий результат о сходимости метода простых итераций: если норма матрицы $\|\mathbf{B}\|$ меньше единицы, то последовательные приближения

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d} \tag{3.3}$$

сходятся к единственному решению системы $\mathbf{x}^*$ со скоростью геометрической прогрессии при произвольном векторе нулевого приближения $\mathbf{x}^{(0)}$. Наиболее целесообразным в качестве компонент $\mathbf{x}^{(0)}$ взять приближенные значения неизвестных, полученные грубой прикидкой либо прямыми методами.

Таким образом, процесс сходится, если выполняется одно из условий:

$$\|\mathbf{B}\|_1 < 1 \quad \textit{или} \quad \|\mathbf{B}\|_2 < 1 .$$

Если $\|\mathbf{B}\|<1$, то можно дать оценку погрешности метода простой итерации:

$$\Delta^{(k)} = \left\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^* \right\| \le \frac{\|\mathbf{B}\|^k}{1 - \|\mathbf{B}\|} \|\mathbf{d}\|, \quad k \ge 1 . \tag{3.4}$$

Оценка (3.4) называется априорной оценкой погрешности итерационного процесса, т.к. не проводя вычислений по $\|\mathbf{B}\|$ и $\|\mathbf{d}\|$ можно оценить погрешность k-го приближения $\mathbf{x}^{(k)}$.

Можно показать, что если элементы матрицы $\mathbf{B}$ удовлетворяют одному из условий

$$\sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right| \le \alpha < 1, (i = \overline{1,n}), \quad \sum_{i=1}^{n} \left| b_{ij} \right| \le \beta < 1, (j = \overline{1,n}),$$

то процесс итерации сходится к точному решению системы $\mathbf{x}$ при любом $\mathbf{x}^{(0)}$. Оценка погрешности этого приближенного решения $\mathbf{x}^{(k)}$ дается одной из формул:

$$\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \max_{j=\overline{1,n}} \left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right|,$$

$$\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{\beta}{1-\beta} \max_{j=\overline{1,n}} \left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right|.$$

Приведение исходной системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ к виду $\mathbf{x} = \mathbf{Bx} + \mathbf{d}$ можно осуществить различными способами. Если диагональные элементы матрицы $\mathbf{A}$ не равны нулю, т.е. $a_{ii} \ne 0, \quad i = \overline{1,n}$, то исходную систему можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - \ldots - a_{2n}x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \ldots - a_{n\,n-1}x_{n-1}) \end{cases}. \tag{3.5}$$

В этом случае элементы матрицы $\mathbf{B}$ определяются следующим образом:

$$(\mathbf{B})_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad i \ne j, \quad (\mathbf{B})_{ii} = 0. \tag{3.6}$$

Пример 3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 0.3x_1 - 0.98x_2 = 0.5 \\ 0.28x_1 + 0.1x_2 = 1.2 \end{cases}$$

методом итераций с погрешностью, не превышающей ε=0.01.

Решение. Используя выражения (3.5), (3.6) получим:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.72 & -0.1 \\ 0.3 & 0.02 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ -0.5 \end{pmatrix}.$$

Нормы матрицы $\|\mathbf{B}\|_1$=0.82 и $\|\mathbf{B}\|_2 \le 0.79$. Следовательно, выполнены условия сходимости алгоритма простой итерации. В дальнейшем, для определенности, будем использовать норму $\|\mathbf{B}\|_1$. Полагая в качестве нулевого приближения вектор $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0)^{\mathrm{T}}$, выполним несколько последовательных шагов итерационного процесса в соответствии с выражением (3.3). Результаты расчетов приведены в таблице:

Таблица 3.1

k	2	4	6	8	10	14	18
$x_1^{(k)}$	2.114	3.157	3.632	3.848	3.946	4.011	4.024
$x_2^{(k)}$	-0.15	0.324	0.541	0.640	0.685	0.715	0.721
$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{*}\right\|$	1.913	0.870	0.395	0.179	0.081	0.016	0.003
$\Delta^{(k)}$	4.483	3.014	2.027	1.363	0.916	0.414	0.187

Данные таблицы показывают, что требуемая точность вычислений ε =0.01 достигается при k =16.

4. Численные методы приближения функций.

Приближением функции называется процедура замены по определенному правилу функции f близкой к ней в том или ином смысле функцией g из некоторого фиксированного множества. В качестве приближающего множества частот берут подпространство алгебраических или тригонометрических многочленов (полиномов). Более гибкий и мощный аппарат приближения получают, рассматривая обобщенные полиномы

$$\mathrm{g}(x, a_0, a_1, ..., a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x),$$

где $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n$ – некоторая система линейно независимых функций, выбираемая с учетом конкретных условий задачи и требований, предъявляемых к функции g. В дальнейшем будем считать, что функция g – полином такого вида.

Мерой погрешности приближения является, как правило, расстояние $\rho(\mathrm{f},\mathrm{g})$ между приближаемой и приближающей функциями. Наиболее часто погрешность приближения на интервале $[a,b]$ оценивается в равномерной

$$\rho(\mathrm{f},\mathrm{g})_c = \max_{[a,b]}\left|\mathrm{f}(x)-\mathrm{g}(x)\right|$$

и среднеквадратичной

$$\rho(\mathrm{f},\mathrm{g})_{L_2} = \left\{\int_a^b\left[\mathrm{f}(x)-\mathrm{g}(x)\right]^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

метриках, где $[a,b]$ – интервал, на котором строится приближение.

Рассмотрим две постановки задачи приближения.

1. Пусть в отдельных точках $x_0, x_1, \ldots x_n$ интервала $[a,b]$ заданы значения функции $\mathrm{f}(x_j)$; требуется восстановить ее значение для других $x \in [a,b]$.

Если параметры $a_0, a_1, \ldots a_n$ определяются из условий совпадения значений приближаемой и приближающей функций в точках x_j

$$\mathrm{g}(x_j) = \mathrm{f}(x_j), \quad j = 0,1,\ldots,n \;,$$

то такой способ приближения называют интерполяцией, а точки x_j – узлами интерполяции. (Задачей экстраполяции называют задачу вычисления функции f в некоторой точке x^*, находящейся вне интервала $[a,b]$).

Предположим, что алгоритм построения приближающей функции не требует выполнения последнего условия, и значения функции вычисляются в произвольных точках, тогда говорят об аппроксимации функции.

2. Пусть функция f задана таблично по результатам измерений, т.е. значения функции $\mathrm{f}(x_j)$, вычисленные в точках x_j, $j = 0,1,\ldots,n$, содержат ошибки ε_j. Построение приближающего полинома интерполяционным ме-

тодом с использованием условий совпадения значений приближаемой и приближающей функций в узлах привело бы к повторению имеющихся ошибок.

Практика показала, что полином g^*, минимизирующий погрешность приближения в среднеквадратичной метрике, значительно лучше представляет функцию f. Таким образом, аппроксимирующий полином g^* строится из условия

$$\rho(\mathrm{f},\mathrm{g}^*(a_0^*,a_1^*,...,a_n^*,x))_{L_2} = \min_{a_0,a_1,...,a_n} \rho(\mathrm{f},\mathrm{g}(a_0,a_1,...,a_n,x))_{L_2}.$$

Процедура таких построений носит название метода наименьших квадратов.

4.1 Интерполирование функций.

Интерполяционный многочлен Лагранжа.

Пусть на интервале $[a,b]$ задана система интерполяционных узлов $x_0, x_1, ... x_n$. В которых известны значения функции $\mathrm{f}(x_j)$. Задача интерполяции алгебраическими многочленами состоит в построении многочлена

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

степени n, значения которого в заданных узлах интерполяции совпадают со значениями функции f в этих узлах:

$$L_n(x_j) = \mathrm{f}(x_j), \quad j = 0,1,...,n. \tag{4.1}$$

Покажем, что поставленная задача имеет единственное решение. Для вычисления коэффициентов $a_i, \quad i = 0,1,...,n$, составим систему линейных уравнений

$$a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^{\,2} + ... + a_n x_j^{\,n} = \mathrm{f}(x_j),\ j = 0,1,...,n.$$

Определитель данной системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & . & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & . & x_1^n \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & . & x_n^n \end{vmatrix}$$

и называется определителем Вандермонда. Такой определитель отличен от нуля, если $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. В этом случае система имеет единственное решение.

Интерполяционный многочлен естественно искать в виде

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} P_j(x)\, \mathrm{f}(x_j).$$

Удовлетворяя условиям интерполяции (4.1), получаем соотношения

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(x_j)\, \mathrm{f}(x_i) = \mathrm{f}(x_j), \quad j = 0,1,\ldots,n,$$

которые выполняются, если на функции $P_i(x)$ наложить ограничения

$$P_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j, \quad i,j = 0,1\ldots n \end{cases}.$$

Последние условия означают, что каждая из функций $P_i(x)$, $i = 0,1,\ldots,n$, имеет не менее n нулей на интервале $[a,b]$. Поэтому целесообразно искать эти функции в виде

$$P_i(x) = A_i(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n).$$

Из условия $P_i(x_i) = 1$ имеем

$$1 = A_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n).$$

Следовательно, искомые функции $P_i(x)$ вычисляются по формулам

$$P_i(x) = \frac{\prod\limits_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i}(x_i - x_j)}.$$

Отсюда интерполяционный многочлен имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod\limits_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)} \mathrm{f}(x_i)\,. \qquad (4.2)$$

Форма представления интерполяционного многочлена в виде линейной комбинации значении приближаемой функции $\mathrm{f}(x_i)$ с коэффициентами $P_i(x)$ называется формой Лагранжа. Если ввести обозначение

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1).....(x - x_n)\,, \qquad (4.3)$$

то многочлен Лагранжа можно записать в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{f}(x_i) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n^{'}(x_i)}\,.$$

<u>Оценка погрешности интерполяции.</u> Погрешность приближения функции интерполяционным многочленом Лагранжа (4.2) описывается разностью

$$\mathrm{f}(x) - L_n(x)\,.$$

Для функций $\mathrm{f} \in C_{n+1}\left[a,b\right]$ формула оценки погрешности интерполяции в точке x^* имеет вид:

$$\left|\mathrm{f}(x^*) - L_n(x^*)\right| \le \max_{[a,b]} \frac{\left|\mathrm{f}^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!} \left|\omega_n(x^*)\right|, \qquad (4.4)$$

оценка погрешности на интервале задается формулой

$$\max_{[a,b]} \left|\mathrm{f}(x) - L_n(x)\right| \le \max_{[a,b]} \frac{\left|\mathrm{f}^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \left|\omega_n(x)\right| \qquad (4.5)$$

Пример 4. Функция $\mathrm{f}(x)$ задана своими значениями в узлах

x	4	6	8	10
f	1	3	8	20

Построить интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценить погрешность интерполяции в точке x=5, считая $\max\left|\mathrm{f}^{(4)}(x)\right| = 10^{-4}$.

Решение. Используя формулу (4.2), напишем интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_3(x) = 1 \cdot \frac{(x-6)(x-8)(x-10)}{(4-6)(4-8)(4-10)} + 3 \cdot \frac{(x-4)(x-8)(x-10)}{(6-4)(6-8)(6-10)} +$$

$$+8\cdot\frac{(x-4)(x-6)(x-10)}{(8-4)(8-6)(8-10)}+20\cdot\frac{(x-4)(x-6)(x-8)}{(10-4)(10-6)(10-8)},$$

итак, для $L_3(x)$ получаем

$$L_3(x)=\frac{1}{24}(2x^3-27x^2+142x-240).$$

Оценим погрешность интерполяции в точке x=5, используя формулу (4.4):

$$\left|\mathrm{f}(5)-L_3(5)\right|\le\frac{10^{-4}}{4!}\left|(5-4)(5-6)(5-8)(5-10)\right|\approx 0.6\cdot10^{-4}$$

Пример 5. Найти оценку погрешности интерполяции функции $\mathrm{f}(x)=\ln x$ на отрезке $\left[100,102\right]$ квадратичным интерполяционным многочленом Лагранжа.

Решение. По формуле (4.5) имеем

$$\max_{[100,102]}\left|\ln(x)-L_2(x)\right|\le\max_{[100,102]}\frac{\left|\ln^{(3)}(x)\right|}{3!}\max_{[100,102]}\left|\omega_2(x)\right|.$$

Оценим правую часть неравенства:

$$\max_{[100,102]}\frac{\left|\ln^{(3)}(x)\right|}{3!}=\frac{\max\limits_{[100,102]}\dfrac{2}{x^3}}{6}=\frac{1}{3}\cdot10^{-6},$$

максимальное значение

$$\max_{[100,102]}\left|\omega_2(x)\right|=\max_{[100,102]}\left|(x-100)(x-101)(x-102)\right|$$

достигается в точке $x\approx100,5$:

$$\max_{[100,102]}\left|\omega_2(x)\right|\approx\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}.$$

Итак, получаем следующую оценку погрешности интерполяции:

$$\max_{[100,102]}\left|\ln(x)-L_2(x)\right|\le 0.13\cdot10^{-6}$$

4.2. Приближение функций.

Метод наименьших квадратов.

Пусть функция задана на некотором дискретном или непрерывном множестве А. Выберем систему линейно независимых функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$, заданных на множестве. Рассмотрим задачу приближения функции f на множестве А многочленом P_m вида

$$P_m = \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k(x).$$

При фиксированной системе функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$ многочлен P_m однозначно определяется коэффициентами $c_1, c_2, ..., c_m$, т.е. $P_m(x) = P_m(x, c_1, ..., c_m)$. Многочлен P_m^* называется многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения функции f на множестве А, если выполняется соотношение

$$\rho^2(\mathrm{f}, P_m^*)_{L_2} = \min_{c_1, c_2, ... c_m} \rho^2(\mathrm{f}, P_m)_{L_2}.$$

Здесь

$$\rho^2(\mathrm{f}, P_m) = \int_a^b \left[\mathrm{f}(x) - P_m\right]^2 dx.$$

Можно показать, что коэффициенты $c_1, c_2, ..., c_m$, минимизирующие квадрат расстояния $\rho^2(\mathrm{f}, P_m)$, должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... + a_{1m}c_m = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + ... + a_{2m}c_m = b_2 \\ .... \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + ... + a_{mm}c_m = b_m \end{cases}, \qquad (4.6)$$

где

$$a_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx, \quad b_i = \int_a^b \varphi_i(x)\mathrm{f}(x)dx, \quad 1 \le i, j \le m.$$

Систему уравнений (4.6) называют нормальной системой. Благодаря предположению о линейной независимости функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$ решение системы (4.6) всегда существует и единственно.

Приближение функций алгебраическими многочленами. Часто для среднеквадратичных приближений используют системы алгебраических многочленов. Система степенных функций является простейшей и имеет вид

$$1, x, x^2, \ldots x^m . \qquad (4.7)$$

Такая система линейно независима в пространстве $\square_{[a,b]}$ непрерывных на интервале $[a,b]$ функций. В пространстве $\square_{n+1}$ функций, заданных таблично на множестве точек $\{x_j\}_0^n$, система (4.7) линейно независима при $m \le n+1$ и линейно зависима в противном случае.

Пример 6. Для функции $\mathrm{f}(x) = \sin x$ построить многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения по системе степенных функций (4.7) для двух значений m, равных 2 и 3. Вычислить значение квадрата расстояния от P_m^* до приближаемой функции $\mathrm{f}(x)$, т.е. ρ_2^2 при $m = 2$ и ρ_3^2 при $m = 3$. Определить величину относительного уменьшения ошибки аппроксимации

$\delta = \dfrac{\rho_3}{\rho_2}$.

Решение. Найдем многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения функции $\mathrm{f}(x) = \sin x$. Для расчета коэффициентов нормальной системы уравнений необходимо воспользоваться справочниками, содержащими таблицы интегралов от степенных и тригонометрических функций. Напомним, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 1, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \pi - 2, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}.$$

1. $m = 2$. В наших обозначениях $\varphi_1 = 1, \varphi_2 = x$. Коэффициенты нормальной системы уравнений

$$a_{11} = \frac{\pi}{2}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\pi^2}{8}, \quad a_{22} = \frac{\pi^3}{24}.$$

Следовательно, нормальная система уравнений относительно неизвестных c_1 и c_2 имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}c_1 + \dfrac{\pi^2}{8}c_2 = 1 \\ \dfrac{\pi^2}{8}c_1 + \dfrac{\pi^3}{24}c_2 = 1 \end{cases}.$$

Решая систему, получим

$$c_1 = \frac{8\pi - 24}{\pi^2} \approx 0.11, \quad c_2 = \frac{96 - 24\pi}{\pi^3} \approx 0.66.$$

Многочлен наилучшего приближения

$$P_2^*(x) = 0.11 + 0.66x.$$

2. $m = 3$. В данном случае $\varphi_1 = 1, \varphi_2 = x, \varphi_3 = x^2$. Нормальная система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}c_1 + \dfrac{\pi^2}{8}c_2 + \dfrac{\pi^3}{24}c_3 = 1 \\ \dfrac{\pi^2}{8}c_1 + \dfrac{\pi^3}{24}c_2 + \dfrac{\pi^4}{64}c_3 = 1 \\ \dfrac{\pi^3}{24}c_1 + \dfrac{\pi^4}{64}c_2 + \dfrac{\pi^5}{160}c_3 = \pi - 2 \end{cases}.$$

Решение системы

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1.1, \quad c_3 = -0.277.$$

Многочлен наилучшего приближения

$$P_3^*(x) = 1.1x - 0.277x^2.$$

Следует отметить, что вычисления коэффициентов многочлена необходимо проводить с точностью до третьего знака после запятой.

Вычислим квадрат расстояния от приближаемой функции $\mathrm{f}(x) = \sin x$ до многочлена наилучшего приближения

$$\begin{gathered} \rho_2^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 0.11 - 0.66x)^2 dx \approx 0.108 \\ \rho_3^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 1.1x + 0.277x^2)^2 dx \approx 0.01 \end{gathered}.$$

Относительная ошибка аппроксимации

$$\delta = \frac{\rho_3}{\rho_2} = 0.307\,.$$

Видно, что ошибка аппроксимации функции $\mathrm{f}(x) = \sin x$ многочленом $P_3^*(x)$ почти в три раза меньше, чем при аппроксимации многочленом $P_2^*(x)$.

5. Варианты заданий для выполнения контрольной работы.

Контрольная работа состоит из 5 заданий.

Задание 1. Решить систему линейных уравнений $\mathbf{A\,x} = \mathbf{b}$ методом **LU-** разложений.

Вариант № 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -7 \\ 13 \\ -9 \end{pmatrix}$	Вариант № 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 10 & 18 \\ 4 & 24 & 49 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \\ 131 \end{pmatrix}$
Вариант № 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \\ 3 & 12 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}$	Вариант № 4 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 15 & 19 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix}$
Вариант № 5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 9 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \\ 58 \end{pmatrix}$	Вариант № 6 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 21 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 64 \end{pmatrix}$

Вариант № 7	Вариант № 8
$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 49 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 8 & 17 \\ 4 & 18 & 40 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 13 \\ 37 \\ 88 \end{pmatrix}$
Вариант № 9	Вариант № 10
$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 20 & 19 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 71 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 11 \\ 6 & 24 & 55 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -16 \\ -26 \\ -129 \end{pmatrix}$

Задание 2. Оценить погрешность решения системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (см. задание 1), если погрешность задания вектора $\mathbf{b}$ равна 0.01.

Задание 3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{\alpha - 5}{20} x_2 + \dfrac{\beta + 5}{40} x_3 = 0.1 \\ -\dfrac{\alpha}{20} x_1 + x_2 + \dfrac{\beta}{20} x_3 = 0.9 \\ x_3 - \dfrac{\alpha + 5}{20} x_1 + \dfrac{\beta - 5}{40} x_2 = 0.8 \end{cases}$$

методом итераций с погрешностью, не превышающей ε=0.01.

Номер варианта	α	β
1	1	1
2	2	2
3	3	3

4	4	4
5	4	1
6	3	2
7	2	3
8	1	4
9	3	4
10	4	2

Задание 4. Построить квадратичный интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $\mathrm{f}(x)$ на отрезке $[a,b]$. Найти оценку погрешности интерполяции на всем отрезке.

Номер варианта	$\mathrm{f}(x)$	$[a,b]$
1	$\sqrt{x}$	$[100,169]$
2	$\sqrt{x}-x$	$[1,9]$
3	$\sqrt{x}+1$	$[25,64]$
4	$\sqrt[3]{x}$	$[27,125]$
5	$\ln(0.5x)$	$[3,10]$
6	$\sqrt{x}+x$	$[1,9]$
7	$\ln(2x)$	$[1,8]$
8	$\sqrt{x}+x$	$[1,16]$
9	$\frac{1}{x}$	$\left[\frac{1}{4},1\right]$
10	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\left[\frac{1}{16},1\right]$

Задание 5.Приближаемая функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$.Требуется построить многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения по системе степенных функций $1, x, x^2, \ldots x^m$ для двух значений m, равных 2 и 3. Вычислить значение квадрата расстояния от P_m^* до приближаемой функции $f(x)$, т.е. ρ_2^2 при $m=2$ и ρ_3^2 при $m=3$. Определить величину относительного уменьшения ошибки аппроксимации $\delta = \dfrac{\rho_3}{\rho_2}$.

Номер варианта	$f(x)$	$[a,b]$
1	$\sqrt{x}$	$[0,2]$
2	$\sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
3	$\cos x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
4	$x^{\frac{3}{2}}$	$[1,3]$
5	e^x	$[0,1]$
6	$\cos x$	$[0,\pi]$
7	$\sqrt{x}$	$[1,2]$
8	$\ln x$	$[1,2]$
9	e^{2x}	$[0,1]$
10	x^3	$[0,1]$

Библиографический список.

1 Бутенина Д.В.,

Стрепетов А . В.- СПб.: ГУАП ,2007 – 87с.

2 Колдаев В.Д. Численные методы и программирование : учебное пособие

3 Колдаев В .Д.- М.: ФОРУМ-ИНФРА-М ,2009 – 288 с.

4 Пирумов У. Г. Численные методы : учебное пособие / Пирумов У. Г. –М. : Дрофа , 2003 – 221 с.

5 Амосов А .А. Вычислительные методы для инженеров : учебное пособие / Амосов А. А. ,Дубинский Ю .В. ,Колченкова Н. В. –М.: Изд-во МЭИ, 2003 – 595 с

6 Бахвалов Н .С. Численные методы в задачах и упражнениях : учебное пособие/ Бахвалов Н .С. ,Лапин А .В . ,Чижонков Е .В.- М.: Научный мир ,2000- 310с.

Оглавление.