Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики
(МГТУ МИРЭА)

Кафедра высшей математики

Типовой расчет

по дисциплине «Дискретная математика»

(2013/2014 учебный год, весенний семестр)

МОСКВА 2014

ИНСТРУКЦИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ТИПОВОГО РАСЧЕТА ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Типовой расчет выполняется в тонкой тетради объемом 12, 18 или 24 листов. Желательно, чтобы тетрадь была зеленого цвета. Тетрадь должна быть подписана синей или черной ручкой следующим образом:

ТЕТРАДЬ

для ________ *типового расчета* ________
________ *по дискретной математике* ________
учени ________________ класса ________
________________ школы ________
________ *студента группы КПБ-1-12* ________
________ *Иванова Петра* ________

Вариант 19

1A	*1B*	*1C*	*2A*	*2B*	*2C*	*3A*	*3B*	*4A*

5A	*5B*	*6A*	*6B*	*7A*	*7B*	*8A*	*8B*

Таблица должна быть начерчена синей или черной ручкой по линейке. Размер каждой клеточки равен 1 см × 1 см. Над таблицей должен быть указан номер варианта.

Задачи типового расчета выполняются в произвольном порядке. Каждую задачу желательно начинать с новой страницы. Условия задач переписывать не надо. В начале задачи надо написать и подчеркнуть номер задачи и ее название, например: *Задача 5. Нахождение кратчайшего пути в графе (орграфе)*.

Части (в пределах данной задачи) выполняются строго по порядку: сначала часть A, затем часть B и т. д. В начале каждой части надо написать и подчеркнуть ее номер, например: *Часть A*. Пункты (в пределах данной части) также выполняются строго по порядку. Условия пунктов переписывать не надо. В начале каждого пункта надо написать его номер, например: *3)*.

Все задачи должны быть оформлены аккуратно и подробно, со всеми необходимыми обоснованиями. Таблицы, карты Карно, функциональные и контактные схемы, графы, орграфы и т. д. должны быть нарисованы по линейке (желательно простым карандашом). Допускается использование цветных карандашей (или нежирных фломастеров) для изображения на графе кратчайшего пути, максимального (минимального) остова графа и т. д.

Типовой расчет можно выполнять и сдавать на проверку по частям (сначала одну задачу, потом еще две задачи и т. д.). Если есть сомнения в правильности выполнения задачи, то можно сдать задачу на проверку на отдельном двойном листочке (указав номер группы и фамилию). Если проверка покажет, что все верно, то после этого задачу можно будет переписать в тетрадь для типового расчета.

Замечание 1. Числовые данные для задач типового расчета приведены ниже в таблицах 1 и 2. В этих таблицах N — это номер варианта типового расчета.

Замечание 2. Части задач, помеченные звездочкой, являются необязательными и выполняются студентами по их желанию.

Замечание 3. Желающие студенты могут выполнять типовой расчет в электронном виде (в редакторе Word или TeX). Сдавать на проверку можно как распечатку всего типового расчета, так и распечатки отдельных задач. В случае выполнения типового расчета в электронном виде титульный лист рекомендуется оформить так, так это показано на следующей странице.

Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики
(МГТУ МИРЭА)

Кафедра высшей математики

Типовой расчет

по дисциплине «Дискретная математика»

Вариант 19

1A	*1B*	*1C*	*2A*	*2B*	*2C*	*3A*	*3B*	*4A*

5A	*5B*	*6A*	*6B*	*7A*	*7B*	*8A*	*8B*

Учебная группа: КПБ-1-12.
Студент: Иванов П.П.
Преподаватель: Костин С.В.

МОСКВА 2014

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

I. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

ЗАДАЧА 1. Функциональная полнота системы булевых функций. Булевы функции $f \in {}^3F$, $g \in {}^3F$, $h \in {}^2F$ заданы своими векторами значений (см. табл. 1).

Часть A (2 балла).

1) С помощью метода Карно найти $D_{\text{сов}}(f)$, $D_{\text{сокр}}(f)$, $D_{\text{ядр}}(f)$, $D_{\text{б}}(f)$ и $D_{\min}(f)$. Указать ранг каждой ДНФ.
2) С помощью метода Карно найти $D_{\text{сов}}(g)$, $D_{\text{сокр}}(g)$, $D_{\text{ядр}}(g)$, $D_{\text{б}}(g)$ и $D_{\min}(g)$. Указать ранг каждой ДНФ.

Часть B (2 балла).

3) Составить критериальную таблицу Поста системы булевых функций $Q = \{f, g\}$.
4) Доказать, что система Q является функционально полной системой (ФПС). Определить, относится ли система Q к типу А или к типу Б.

Часть C (6 баллов).

5) Реализовать в виде формул и в виде схем из функциональных элементов (СФЭ) над системой Q следующие булевы функции: $\mathbb{0}$, $\mathbb{1}$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, h (каждую функцию достаточно реализовать одним каким-либо способом). Для каждой формулы Φ указать трудность $t(\Phi)$, сложность $l(\Phi)$ и глубину $d(\Phi)$. Для каждой схемы S указать сложность $l(S)$ и глубину $d(S)$.

ЗАДАЧА 2. Минимизация булевой функции в классе дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) и в классе конъюнктивных нормальных форм (КНФ). Булева функция $f \in {}^4F$ задана своим вектором значений (см. табл. 1).

Часть A (4 балла).

1) С помощью метода Квайна — Мак-Класки найти $D_{\text{сокр}}(f)$, $D_{\text{ядр}}(f)$, $D_{\text{б}}(f)$ и $D_{\min}(f)$. Указать ранг каждой ДНФ.

Часть B (2 балла).

2) С помощью метода Карно найти $D_{\text{сокр}}(f)$, $D_{\text{ядр}}(f)$, $D_{\text{б}}(f)$ и $D_{\min}(f)$. Указать ранг каждой ДНФ. Сравнить полученный результат с результатом п. 1).

Часть C* (2 балла).

3) С помощью метода Карно найти $K_{\text{сокр}}(f)$, $K_{\text{ядр}}(f)$, $K_{\text{б}}(f)$ и $K_{\min}(f)$. Указать ранг каждой КНФ.

ЗАДАЧА 3. Реализация булевой функции в виде схемы из функциональных элементов (СФЭ). Булева функция $f \in {}^4F$ задана своим вектором значений (см. табл. 1).

Часть A (2 балла).

1) Реализовать функцию f в виде СФЭ S_1 над булевой системой $Q_B = \{\neg, \wedge, \vee\}$. Указать сложность $l(S_1)$ и глубину $d(S_1)$ схемы S_1.

Часть B* (2 балла).

2) Реализовать функцию f в виде СФЭ S_2 над системой Жегалкина $Q_Z = \{\mathbb{1}, \wedge, \oplus\}$. Указать сложность $l(S_2)$ и глубину $d(S_2)$ схемы S_2.

ЗАДАЧА 4. Реализация булевой функции в виде контактной схемы (КС). Булева функция $f \in {}^4F$ задана своим вектором значений (см. табл. 1).

Часть A (2 балла).

1) Реализовать функцию f в виде КС K. Указать сложность $l(K)$ схемы K.

II. ГРАФЫ И ОРГРАФЫ

ЗАДАЧА 5. Нахождение кратчайшего пути в графе (орграфе).

Часть А (2 балла).

Дан взвешенный граф G (см. рис. 1 и табл. 2) и даны вершины s и t ($s \equiv v_6$, $t \equiv v_9$).

1) С помощью прямого хода алгоритма Дейкстры найти кратчайшее расстояние $l(v)$ от вершины s до каждой вершины v графа G.
2) С помощью обратного хода алгоритма Дейкстры найти все кратчайшие пути из вершины s в вершину t.

Часть B* (2 балла).

Дан взвешенный орграф G (см. рис. 2 и табл. 2) и даны вершины s и t ($s \equiv v_5$, $t \equiv v_9$).

3) С помощью прямого хода алгоритма Дейкстры найти кратчайшее расстояние $l(v)$ от вершины s до каждой вершины v орграфа G.
4) С помощью обратного хода алгоритма Дейкстры найти все кратчайшие орпути из вершины s в вершину t.

Замечание. В прямом ходе алгоритма Дейкстры при расстановке меток просматривать вершины v_i с данной временной меткой u в порядке увеличения номера этих вершин (то есть в порядке увеличения индекса i).

ЗАДАЧА 6. Нахождение максимального (минимального) остова. Дан взвешенный граф G (см. рис. 1 и табл. 2; $s \equiv v_6$, $t \equiv v_9$).

1) Найти количество ребер p в любом остове графа G.

Часть А (2 балла).

2) С помощью алгоритма Краскала найти минимальный остов G_1 графа G.
3) Составить таблицу, в которой для каждого числа $k \in [1\,..\,5]$ указано количество p_k ребер веса k в остове G_1. Убедиться, что имеет место равенство $\sum p_k = p$.
4) С помощью формулы $w(G_1) = \sum kp_k$ найти вес $w(G_1)$ остова G_1.

Часть B* (2 балла).

5) С помощью алгоритма Краскала найти максимальный остов G_2 графа G.
6) Составить таблицу, в которой для каждого числа $k \in [1\,..\,5]$ указано количество p_k ребер веса k в остове G_2. Убедиться, что имеет место равенство $\sum p_k = p$.
7) С помощью формулы $w(G_2) = \sum kp_k$ найти вес $w(G_2)$ остова G_2.

Замечание 1. Ребро e_{ij} ($i, j \in [1\,..\,n]$, $i < j$) соединяет вершины v_i и v_j графа G.

Замечание 2. При нахождении максимального (минимального) остова просматривать ребра e_{ij} данного веса w в порядке увеличения первого индекса i, а при данном первом индексе i в порядке увеличения второго индекса j.

Замечание 3. Максимальный и минимальный остовы должны быть изображены на разных рисунках.

ЗАДАЧА 7. Нахождение максимального (минимального) назначения. Дан взвешенный полный равнодольный двудольный граф $G = \langle X, Y, E \rangle$ ($|X| = |Y| = 5$). Вес ребра e_{ij} равен $w(e_{ij}) = w_{ij}$ (см. табл. 2).

Часть А (2 балла).

1) С помощью алгоритма Куна (венгерского алгоритма) найти какое-либо максимальное назначение E_1.

2) Найти вес $w(E_1)$ максимального назначения E_1 двумя способами:

а) как сумму весов ребер, входящих во множество E_1;

б) как сумму меток, присвоенных вершинам двудольного графа G после окончания работы алгоритма.

Часть B* (2 балла).

3) С помощью алгоритма Куна (венгерского алгоритма) найти какое-либо минимальное назначение E_2.
4) Найти вес $w(E_2)$ минимального назначения E_2 двумя способами:

а) как сумму весов ребер, входящих во множество E_2;

б) как сумму меток, присвоенных вершинам двудольного графа G после окончания работы алгоритма.

Замечание 1. Ребро e_{ij} $(i,\, j \in [1\,..\,5])$ соединяет вершину x_i доли X с вершиной y_j доли Y двудольного графа G.

Замечание 2. При нахождении с помощью жадного алгоритма неувеличиваемого паросочетания просматривать ребра e_{ij} в порядке увеличения первого индекса i, а при данном первом индексе i в порядке увеличения второго индекса j.

Замечание 3. При отсутствии в двудольном графе G совершенного паросочетания множество $S \subset X$, на котором нарушается условие Холла, находить путем расстановки вспомогательных меток.

ЗАДАЧА 8. Нахождение максимального потока в графе (орграфе).

Часть A (2 балла).

Дан взвешенный орграф G (см. рис. 2 и табл. 2) и даны вершины s и t ($s \equiv v_5$, $t \equiv v_9$).

1) С помощью алгоритма Форда — Фалкерсона найти какой-либо максимальный поток φ из вершины s в вершину t орграфа G и его величину $\|\varphi\|$.
2) Убедиться, что величина потока, вытекающего из вершины s, и величина потока, втекающего в вершину t, равна $\|\varphi\|$.
3) Найти минимальный разрез $\langle V_s,\, V_t \rangle$ и его пропускную способность $w(V_s,\, V_t)$. Убедиться в справедливости теоремы Форда — Фалкерсона (о том, что величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза).

Часть B* (2 балла).

Дан взвешенный граф G (см. рис. 1 и табл. 2) и даны вершины s и t ($s \equiv v_6$, $t \equiv v_9$).

4) С помощью алгоритма Форда — Фалкерсона найти какой-либо максимальный поток φ из вершины s в вершину t графа G и его величину $\|\varphi\|$.
5) Убедиться, что величина потока, вытекающего из вершины s, и величина потока, втекающего в вершину t, равна $\|\varphi\|$.
6) Найти минимальный разрез $\langle V_s,\, V_t \rangle$ и его пропускную способность $w(V_s,\, V_t)$. Убедиться в справедливости теоремы Форда — Фалкерсона (о том, что величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза).

ТАБЛИЦА 1

N	ЗАДАЧА 1			ЗАДАЧИ 2, 3, 4
1	$\boldsymbol{f} = (0101\ 1010)$	$\boldsymbol{g} = (1110\ 1000)$	$\boldsymbol{h} = (0100)$	$\boldsymbol{f} = (0100\ 1011\ 1100\ 1010)$
2	$\boldsymbol{f} = (0101\ 1010)$	$\boldsymbol{g} = (1110\ 1000)$	$\boldsymbol{h} = (0010)$	$\boldsymbol{f} = (1010\ 1011\ 1100\ 0100)$
3	$\boldsymbol{f} = (0101\ 1010)$	$\boldsymbol{g} = (1011\ 0010)$	$\boldsymbol{h} = (1000)$	$\boldsymbol{f} = (1100\ 0100\ 1010\ 1011)$
4	$\boldsymbol{f} = (0101\ 1010)$	$\boldsymbol{g} = (1011\ 0010)$	$\boldsymbol{h} = (0100)$	$\boldsymbol{f} = (1011\ 0100\ 1010\ 1100)$
5	$\boldsymbol{f} = (0101\ 1010)$	$\boldsymbol{g} = (1011\ 0010)$	$\boldsymbol{h} = (0010)$	$\boldsymbol{f} = (0100\ 1100\ 1011\ 1010)$
6	$\boldsymbol{f} = (0101\ 1010)$	$\boldsymbol{g} = (1101\ 0100)$	$\boldsymbol{h} = (1000)$	$\boldsymbol{f} = (1100\ 1010\ 0100\ 1011)$
7	$\boldsymbol{f} = (0101\ 1010)$	$\boldsymbol{g} = (1101\ 0100)$	$\boldsymbol{h} = (0100)$	$\boldsymbol{f} = (1010\ 1100\ 1011\ 0100)$
8	$\boldsymbol{f} = (0101\ 1010)$	$\boldsymbol{g} = (1101\ 0100)$	$\boldsymbol{h} = (0010)$	$\boldsymbol{f} = (1101\ 1100\ 0010\ 1010)$
9	$\boldsymbol{f} = (0110\ 0110)$	$\boldsymbol{g} = (1110\ 1000)$	$\boldsymbol{h} = (1000)$	$\boldsymbol{f} = (0010\ 1101\ 1010\ 1100)$
10	$\boldsymbol{f} = (0110\ 0110)$	$\boldsymbol{g} = (1110\ 1000)$	$\boldsymbol{h} = (0100)$	$\boldsymbol{f} = (1100\ 1101\ 1010\ 0010)$
11	$\boldsymbol{f} = (0110\ 0110)$	$\boldsymbol{g} = (1110\ 1000)$	$\boldsymbol{h} = (0010)$	$\boldsymbol{f} = (1010\ 0010\ 1100\ 1101)$
12	$\boldsymbol{f} = (0110\ 0110)$	$\boldsymbol{g} = (1011\ 0010)$	$\boldsymbol{h} = (1000)$	$\boldsymbol{f} = (1101\ 0010\ 1100\ 1010)$
13	$\boldsymbol{f} = (0110\ 0110)$	$\boldsymbol{g} = (1011\ 0010)$	$\boldsymbol{h} = (0100)$	$\boldsymbol{f} = (0010\ 1010\ 1101\ 1100)$
14	$\boldsymbol{f} = (0110\ 0110)$	$\boldsymbol{g} = (1011\ 0010)$	$\boldsymbol{h} = (0010)$	$\boldsymbol{f} = (1010\ 1100\ 0010\ 1101)$
15	$\boldsymbol{f} = (0110\ 0110)$	$\boldsymbol{g} = (1101\ 0100)$	$\boldsymbol{h} = (1000)$	$\boldsymbol{f} = (1100\ 1010\ 1101\ 0010)$
16	$\boldsymbol{f} = (0110\ 0110)$	$\boldsymbol{g} = (1101\ 0100)$	$\boldsymbol{h} = (0100)$	$\boldsymbol{f} = (1110\ 1010\ 0001\ 0011)$
17	$\boldsymbol{f} = (0110\ 0110)$	$\boldsymbol{g} = (1101\ 0100)$	$\boldsymbol{h} = (0010)$	$\boldsymbol{f} = (0001\ 1110\ 0011\ 1010)$
18	$\boldsymbol{f} = (1001\ 1001)$	$\boldsymbol{g} = (1110\ 1000)$	$\boldsymbol{h} = (1000)$	$\boldsymbol{f} = (1010\ 1110\ 0011\ 0001)$
19	$\boldsymbol{f} = (1001\ 1001)$	$\boldsymbol{g} = (1110\ 1000)$	$\boldsymbol{h} = (0100)$	$\boldsymbol{f} = (0011\ 0001\ 1010\ 1110)$
20	$\boldsymbol{f} = (1001\ 1001)$	$\boldsymbol{g} = (1110\ 1000)$	$\boldsymbol{h} = (0010)$	$\boldsymbol{f} = (1110\ 0001\ 1010\ 0011)$
21	$\boldsymbol{f} = (1001\ 1001)$	$\boldsymbol{g} = (1011\ 0010)$	$\boldsymbol{h} = (1000)$	$\boldsymbol{f} = (0001\ 0011\ 1110\ 1010)$
22	$\boldsymbol{f} = (1001\ 1001)$	$\boldsymbol{g} = (1011\ 0010)$	$\boldsymbol{h} = (0100)$	$\boldsymbol{f} = (0011\ 1010\ 0001\ 1110)$
23	$\boldsymbol{f} = (1001\ 1001)$	$\boldsymbol{g} = (1011\ 0010)$	$\boldsymbol{h} = (0010)$	$\boldsymbol{f} = (1010\ 0011\ 1110\ 0001)$
24	$\boldsymbol{f} = (1001\ 1001)$	$\boldsymbol{g} = (1101\ 0100)$	$\boldsymbol{h} = (1000)$	$\boldsymbol{f} = (0111\ 0101\ 1000\ 1100)$
25	$\boldsymbol{f} = (1001\ 1001)$	$\boldsymbol{g} = (1101\ 0100)$	$\boldsymbol{h} = (0100)$	$\boldsymbol{f} = (1000\ 0111\ 1100\ 0101)$
26	$\boldsymbol{f} = (1001\ 1001)$	$\boldsymbol{g} = (1101\ 0100)$	$\boldsymbol{h} = (0010)$	$\boldsymbol{f} = (0101\ 0111\ 1100\ 1000)$
27	$\boldsymbol{f} = (0101\ 1010)$	$\boldsymbol{g} = (1110\ 1000)$	$\boldsymbol{h} = (1000)$	$\boldsymbol{f} = (1100\ 1000\ 0101\ 0111)$
28	$\boldsymbol{f} = (0101\ 1010)$	$\boldsymbol{g} = (1110\ 1000)$	$\boldsymbol{h} = (0100)$	$\boldsymbol{f} = (0111\ 1000\ 0101\ 1100)$
29	$\boldsymbol{f} = (0101\ 1010)$	$\boldsymbol{g} = (1110\ 1000)$	$\boldsymbol{h} = (0010)$	$\boldsymbol{f} = (1000\ 1100\ 0111\ 0101)$
30	$\boldsymbol{f} = (0101\ 1010)$	$\boldsymbol{g} = (1011\ 0010)$	$\boldsymbol{h} = (1000)$	$\boldsymbol{f} = (1100\ 0101\ 1000\ 0111)$

ТАБЛИЦА 2

N	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{21}	w_{22}	w_{23}	w_{24}	w_{25}	w_{31}	w_{32}	w_{33}	w_{34}	w_{35}	w_{41}	w_{42}	w_{43}	w_{44}	w_{45}	w_{51}	w_{52}	w_{53}	w_{54}	w_{55}
1	1	3	1	5	4	1	3	1	5	4	5	2	3	1	2	3	1	4	3	5	3	5	5	1	2
2	1	3	1	5	4	5	2	3	1	2	3	1	4	3	5	3	5	5	1	2	1	3	1	5	4
3	1	3	1	5	4	5	2	3	1	2	2	4	1	4	3	1	4	3	2	5	3	5	5	1	2
4	5	2	3	1	2	3	1	4	3	5	3	5	5	1	2	1	3	1	5	4	1	3	1	5	4
5	5	2	3	1	2	3	1	4	3	5	4	3	2	5	1	3	1	4	3	5	3	5	5	1	2
6	5	2	3	1	2	2	4	1	4	3	1	4	3	2	5	3	5	5	1	2	1	3	1	5	4
7	5	2	3	1	2	2	4	1	4	3	2	5	4	1	3	1	4	3	2	5	3	5	5	1	2
8	3	1	4	3	5	3	5	5	1	2	1	3	1	5	4	1	3	1	5	4	5	2	3	1	2
9	3	1	4	3	5	3	5	5	1	2	5	2	3	1	2	3	1	4	3	5	4	3	2	5	1
10	3	1	4	3	5	4	3	2	5	1	3	1	4	3	5	3	5	5	1	2	5	2	3	1	2
11	3	1	4	3	5	4	3	2	5	1	2	4	1	4	1	1	4	3	2	5	4	3	2	5	1
12	2	4	1	4	3	1	4	3	2	5	3	5	5	1	2	1	3	1	5	4	5	2	3	1	2
13	2	4	1	4	3	1	4	3	2	5	4	3	2	5	1	3	1	4	3	5	4	3	2	5	1
14	2	4	1	4	3	2	5	4	1	3	1	4	3	2	5	3	5	5	1	2	5	2	3	1	2
15	2	4	1	4	3	2	5	4	1	3	2	5	4	1	3	1	4	3	2	5	4	3	2	5	1
16	3	5	5	1	2	1	3	1	5	4	1	3	1	5	4	5	2	3	1	2	3	1	4	3	5
17	3	5	5	1	2	1	3	1	5	4	1	3	1	5	4	2	4	1	4	3	1	4	3	2	5
18	3	5	5	1	2	5	2	3	1	2	3	1	4	3	5	4	3	2	5	1	3	1	4	3	5
19	3	5	5	1	2	5	2	3	1	2	2	4	1	4	3	2	5	4	1	3	1	4	3	2	5
20	4	3	2	5	1	3	1	4	3	5	3	5	5	1	2	5	2	3	1	2	3	1	4	3	5
21	4	3	2	5	1	3	1	4	3	5	4	3	2	5	1	2	4	1	4	3	1	4	3	2	5
22	4	3	2	5	1	2	4	1	4	3	1	4	3	2	5	4	3	2	5	1	3	1	4	3	5
23	4	3	2	5	1	2	4	1	4	3	2	5	4	1	3	2	5	4	1	3	1	4	3	2	5
24	1	4	3	2	5	3	5	5	1	2	1	3	1	5	4	5	2	3	1	2	2	4	1	4	3
25	1	4	3	2	5	3	5	5	1	2	5	2	3	1	2	2	4	1	4	3	2	5	4	1	3
26	1	4	3	2	5	4	3	2	5	1	3	1	4	3	5	4	3	2	5	1	2	4	1	4	3
27	1	4	3	2	5	4	3	2	5	1	2	4	1	4	3	2	5	4	1	3	2	5	4	1	3
28	2	5	4	1	3	1	4	3	2	5	3	5	5	1	2	5	2	3	1	2	2	4	1	4	3
29	2	5	4	1	3	1	4	3	2	5	4	3	2	5	2	2	4	1	4	3	2	5	4	1	3
30	2	5	4	1	3	2	5	4	1	3	1	4	3	2	5	4	3	2	5	1	2	4	1	4	3

РИСУНОК 1

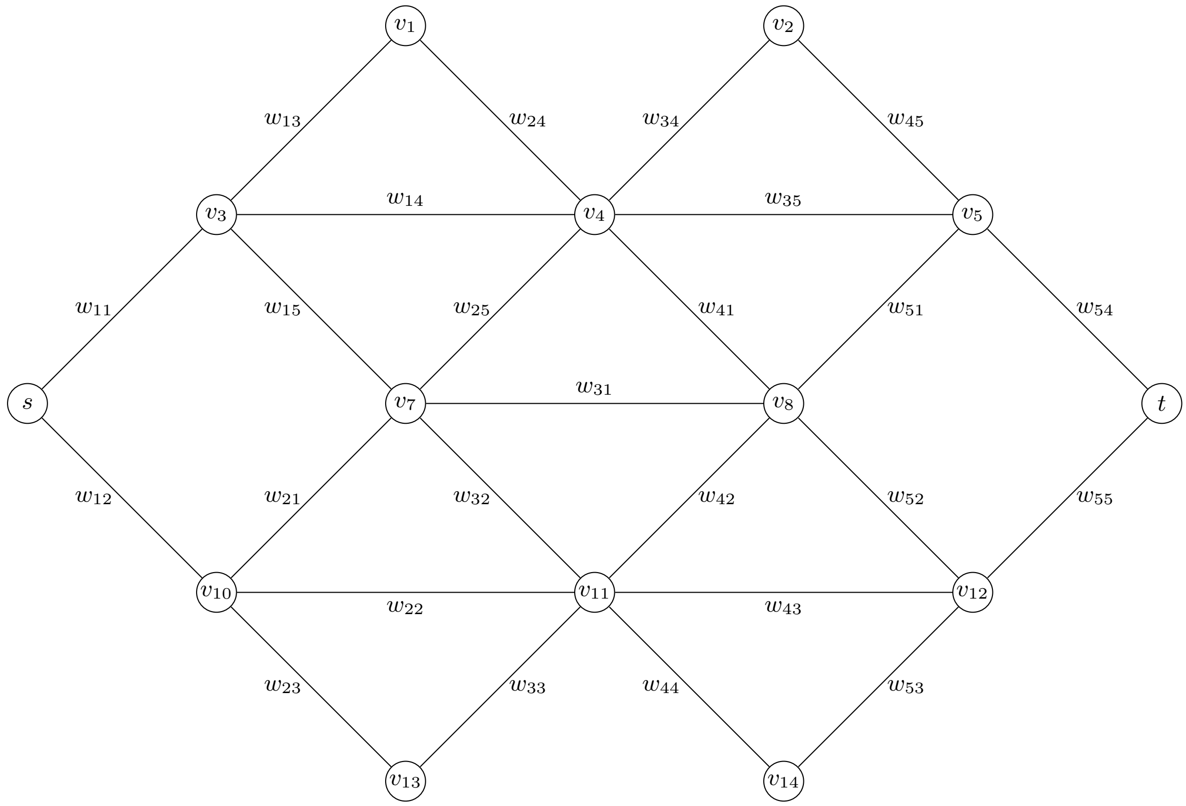

РИСУНОК 2