Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»

ВЫСШАЯ
МАТЕМАТИКА

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД
2011

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания для студентов заочного сокращенного обучения

Часть 2

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД
2011

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
В93

Печатается по решению
РИС НовГУ

Рецензент

доктор физико-математических наук, профессор **Е. Ю. Панов**

Высшая математика: методические указания и контрольные задания для студентов заочного сокращенного обучения. Ч.2. - 2-е изд., исп. и доп. /авт.-сост. О.Н. Барсов; ФГБОУ ВПО «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого», Великий Новгород, 2011. – 80с.

Пособие содержит задания для контрольных работ за второй семестр и методические указания к их выполнению по курсу высшей математики для студентов ускоренной формы обучения заочного отделения инженерно-технических специальностей.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ВВЕДЕНИЕ

Курс высшей математики для студентов ускоренной формы обучения (на базе среднего специального образования) рассчитан на два семестра. В каждом семестре студентам необходимо выполнить две контрольных работы, каждая из которых содержит восемь заданий. Каждая контрольная работа содержит десять вариантов контрольных заданий с номерами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Номер варианта контрольной работы соответствует последней цифре номера зачетной книжки студента. Например, студент, у которого последней цифрой номера зачетной книжки является цифра 3, выполняет третий вариант всех четырех контрольных работ.

Контрольные работы должны быть оформлены в соответствии с нижеизложенными правилами:

1) каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради (12 листов) чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента;

2) на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия и инициалы студента, шифр, номер контрольной работы и название дисциплины; необходимо также, указать дату отсылки работы в университет и адрес студента; в конце работы следует проставить дату выполнения и расписаться;

3) должны быть выполнены все задания своего варианта (работы, содержащие не все задания, а также содержащие задания другого варианта, не засчитываются);

4) задачи в работе надо располагать в порядке возрастания номеров, сохраняя нумерацию;

5) перед решением каждой задачи нужно выписать полностью её условие, подставляя конкретные данные из своего варианта; решение задач следует излагать подробно, объясняя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи;

6) рекомендуется оставлять в конце тетради чистые листы для исправлений и дополнений в соответствии с указаниями рецензента (вносить исправления в сам текст работы после её рецензирования запрещается);

7) после получения не зачтённой, прорецензированной работы (зачтённые работы остаются у рецензента), студент должен исправить все указанные рецензентом ошибки и недочёты в той же тетради после слов работа над ошибками;

8) к экзамену допускаются только те студенты, контрольные работы которых зачтены рецензентом; так как на рецензирование контрольной работы преподавателю отводится две недели, то задания следует высылать на проверку заблаговременно.

ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 3

Задание 1. Вычислите криволинейные интегралы первого или второго рода.

0. $\int\limits_L xyz\,dL$, где L есть полуокружность $\begin{cases} x^2+z^2=a^2, \\ y=2,\ z\ge 0. \end{cases}$

1. $\int\limits_L x\,dL$, где L есть окружность $x^2+y^2=a^2$.

2. $\int\limits_L (x^2+y^2)\,dL$, где L есть окружность $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x=\dfrac{a}{2}. \end{cases}$

3. $\int\limits_L y\,dx+\frac{x}{y}\,dy$ вдоль дуги L кривой $y=e^{-x}$ от точки $A(0,1)$ до точки $B(-1,e)$.

4. $\int\limits_L y\,dL$, где L является аркой циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, где $t\in[0,2\pi]$.

5. $\int\limits_L \dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$ вдоль границы L треугольника ABC с вершинами $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$ против часовой стрелки.

6. $\int\limits_L (x^2+z^2)\,dL$, где L есть окружность $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ y=\dfrac{a}{3}. \end{cases}$

7. $\int\limits_L \frac{y}{x}\,dx+x\,dy$ вдоль дуги L кривой $y=\ln x$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(e,1)$.

8. $\int\limits_L ydx-xdy$, где L есть эллипс $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

9. $\int\limits_L (xy-x^2)\,dx+x\,dy$ вдоль дуги L параболы $y=x^2$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

Задание 2. Вычислите кратные интегралы либо объёмы заданных тел.

0. $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$, где область D задана неравенствами $x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0, y\ge 0$.

1 $\iint\limits_D xy\,dxdy$, если область D ограничена линиями $x=1, x=2,$ $y=x, y=3x,$.

2. Объём части цилиндра $x^2+y^2=a^2$ заключённого между плоскостями $z=0, x+y+z=2a, (a>0)$

3. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x+y}$, где область D определяется неравенствами $1\le x\le 2, x\le y\le 2x$.

4. $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, если область D ограничена плоскостями $x=0, y=0,\ z=0, x+y+z=1$.

5. Объём тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и параболоидом $x^2+y^2=3z$.

6. $\iiint\limits_D y\cos(x+z)\,dxdydz$, если область D ограничена цилиндром $y=\sqrt{x}$ и плоскостями $y=0, z=0, x+z=\frac{\pi}{2}$.

7. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, если область D ограничена линиями $x+y=2, x^2+y^2=2y$,

8. $\iiint\limits_D z\,dxdydz$, если область D ограничена параболоидом $x^2+y^2=z$ и плоскостью $z=a, a>0$.

9. Объём тела, ограниченного координатной плоскостью $z=0$, параболоидом $x^2+y^2=z$ и цилиндром $x^2+y^2=4$.

Задание 3. Вычислите поверхностные интегралы первого или второго рода или площадь заданной поверхности.

0. Поток $\iint\limits_S (\overline{F}\cdot\overline{n})\,dS$ векторного поля $\overline{F}=x^3\,\bar{i}$ через боковую поверхность цилиндра $x^2+y^2=a^2$, $0\le z\le h$ в направлении внешней нормали.

1. $\iint\limits_S z\,dS$, если S есть часть поверхности параболоида $x^2+y^2=z, 0\le z\le a$.

2. Поток $\iint\limits_S (\overline{F}\cdot\overline{n})dS$ векторного поля $\overline{F}=y^2\,\overline{i}+z^2\,\overline{j}$ через поверхность полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0$ в направлении внешней нормали.

3. Площадь части поверхности параболоида $x^2+y^2=z,\ 0\leq z\leq a^2$.

4. Поток $\iint\limits_S (\overline{F}\cdot\overline{n})dS$ векторного поля $\overline{F}=z\overline{k}$ через полную поверхность параболоида $x^2+y^2=z,\ z=h^2, h>0$ в направлении внешней нормали.

5. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, если S есть часть поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$, $0\leq z\leq a$.

6. Площадь части поверхности конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключённого внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

7. Поток $\iint\limits_S (\overline{F}\cdot\overline{n})dS$ векторного поля $\overline{F}=y\,\overline{j}$ через боковую поверхность конуса $x^2+y^2=z^2$, $0\leq z\leq 2$ в направлении внешней нормали.

8. Площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=2a^2$, заключённой внутри конуса $x^2+y^2=z^2$.

9. Поток $\iint\limits_S (\overline{F}\cdot\overline{n})dS$ векторного поля $\overline{F}=x^2\,\overline{i}+z^2\,\overline{k}$ через поверхность полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$ в направлении внешней нормали.

Задание 4. Вычислите циркуляцию или поток векторного поля $\overline{F}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ с помощью теоремы Стокса или Гаусса–Остроградского.

0. $\oint\limits_L ydx+zdy+xdz$ вдоль окружности $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0, \end{cases}$ в направлении против часовой стрелки относительно орта $\overline{k}$.

1. Поток $\iint\limits_S (\overline{F}\cdot\overline{n})dS$ векторного поля $\overline{F}=(y^2+z^2)\,\overline{j}$ через полную поверхность куба $0\leq x\leq 1,\ \ 0\leq y\leq 1,\ 0\leq z\leq 1$ в направлении внешней нормали.

2. Поток $\iint\limits_S (\overline{F}\cdot\overline{n})dS$ векторного поля $\overline{F}=(x^2+z^2)\overline{i}$ через полную поверхность конуса $x^2+y^2=z^2,\ \ 0\leq z\leq h$ в направлении внешней нормали.

3. $\oint\limits_L (x-3+6z)dx$ вдоль контура треугольника ABC, расположенного в плоскости $-x+y+2z=4$, в направлении $A(-4,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,2)$.

4. $\oint\limits_L (x^2+y^2)dx+(z^2+y^2)dy+(z^2+x^2)dz$ вдоль окружности $x^2+y^2=1$, против часовой стрелки.

5. $\oint\limits_L 2xdx+zdz$ вдоль окружности $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=h, h>0, \end{cases}$ против часовой стрелки относительно орта $\overline{k}$.

6. Поток векторного поля $\overline{F}=x^2\overline{i}+y^2\overline{j}+z^2\overline{k}$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x=0, y=0,$ $z=0,$ $x+y+z=a,\ a>0$, в направлении внешней нормали.

7. $\oint\limits_L z^2y\,dx+x^2z\,dy+y^2x\,dz$ вдоль контура четырёхугольника ABCD, который обходится в направлении вершин $A(0,0,0,)$, $B(0,1,0)$, $C(0,1,2)$, $D(0,0,2)$.

8. Поток векторного поля $\overline{F}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$ через полную поверхность цилиндра $x^2+y^2=a^2, z=0, z=h, h>0$ в направлении внешней нормали.

9. Поток векторного поля $\overline{F}=(x^2+z^2)\overline{k}$ через полную поверхность куба $0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$ в направлении внешней нормали.

Задание 5. Убедитесь в том, что векторное поле $\overline{F}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ потенциально, и найдите потенциал этого поля.

0. $\overline{F}=\left(\dfrac{3x^2y^2}{z}-2x^3\right)\overline{i}+\left(\dfrac{2x^3y}{z}-3y^3\right)\overline{j}+\left(z^3-\dfrac{x^3y^2}{z^2}\right)\overline{k}.$

1. $\overline{F}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2+1}\right)\overline{i}+\left(\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2+1}+z\right)\overline{j}+\left(\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2+1}+y\right)\overline{k}.$

2. $\overline{F}=(3x^2y^2z^2+6xy^3z)\overline{i}+(2x^3yz^2+9x^2y^2z)\overline{j}+(2x^3y^2z+3x^2y^3)\overline{k}.$

3. $\overline{F}=(4yz+6xy^2z^2)\overline{i}+(4xz+6x^2yz^2)\overline{j}+(4xy+6x^2y^2z)\overline{k}.$

4. $\overline{F}=(2xy-6xy^4z^5)\overline{i}+(x^2-12x^2y^3z^5)\overline{j}-15x^2y^4z^4\,\overline{k}.$

5. $\overline{F}=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}\overline{i}+\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}\overline{j}+\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\overline{k}.$

6. $\overline{F}=-10xyz^3\,\overline{i}+(2yz-5x^2z^3)\overline{j}+(y^2-15x^2yz^2)\overline{k}.$

7. $\overline{F}=-\dfrac{yz}{x^2}\,\overline{i}+\dfrac{x+z}{x}\,\overline{j}+\dfrac{x+y}{x}\,\overline{k}.$

8. $\overline{F}=-\dfrac{1}{x^2}\,\overline{i}-\dfrac{1}{y^2}\,\overline{j}-\dfrac{1}{z^2}\,\overline{k}.$

9. $\overline{F}=\left(\dfrac{1}{x^2z}+\dfrac{1}{x^2y}\right)\overline{i}+\left(\dfrac{1}{xy^2}-\dfrac{1}{y^2z}\right)\overline{j}+\left(\dfrac{1}{xz^2}-\dfrac{1}{yz^2}\right)\overline{k}$.

Задание 6. Исследовать на сходимость данные числовые ряды.

0. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3+4n^2+n}{n^5+7}$; б). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+3}{2^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$.

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+3}{n^2-n+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{n}{4n-3}\right)^n$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{3n+1}$.

3. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n+3^n}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{4^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln^3 n}$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+4}{3n^3+n+5}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+2^n}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$.

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^3}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n}{4n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(-1)^{n-1}}{2n+\sqrt{n}}$.

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^3+n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n}{4n+1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\sqrt{n}}{n^2+1}$.

8. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^3+1}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n-1}{n^2+4n+5}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n^2+n+1}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^3}{1+2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{3n-1}{2n+3}\right)^n$.

Задание 7. Дана функция $f(x)$. Требуется: а) разложить эту функцию в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$ и найти область сходимости полученного разложения; б) разложить данную функцию в ряд Фурье на промежутке (a, b).

0. а) $f(x)=\sin x, x_0=\dfrac{\pi}{4}$; б) $f(x)=x, (0,1)$.

1. а) $f(x)=x\sin x, x_0=0$; б) $f(x)=\begin{cases}1, \textit{если } -1<x\le 0,\\ x, \textit{если } 0<x<1.\end{cases}$

2. а) $f(x)=\cos^2 x, x_0=0$; б) $f(x)=x,\ (-2,0)$.

3. а) $f(x)=\dfrac{1}{x+4}, x_0=1$; б) $f(x)=\begin{cases}2, \textit{если } -\pi<x\le 0,\\ x+1, \textit{если } 0<x<\pi.\end{cases}$

4. а) $f(x)=e^x,\ x_0=-1$; б) $f(x)=\begin{cases}1, \textit{если } -\pi<x\le 0,\\ -1, \textit{если } 0<x<\pi.\end{cases}$

5. а) $f(x)=\sin^2 2x,\ x_0=0$; б) $f(x)=x+1, (-1,1)$.

6. а) $f(x)=x^4 e^{-x^2},\quad x_0=0$; б) $f(x)=\begin{cases}-x, \textit{если } -\pi<x\le 0,\\ 1, \textit{если } 0<x<\pi.\end{cases}$

7. а) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2},\ x_0=1$; б) $f(x)=x-1, (0,1)$.

8. а) $f(x)=\dfrac{1}{x}, x_0=5$; б) $f(x)=\begin{cases}2, \textit{если } -\pi<x\le 0,\\ x+1, \textit{если } 0<x<\pi.\end{cases}$

9. а) $f(x)=x\ln(2+x), x_0=0$; б) $f(x)=x^2, (-\pi,\pi)$.

Задание 8. Найти общее решение или решение задачи Коши для заданных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

0. а) $y' + y\,tgx=\dfrac{1}{\cos x}, y(0)=0$; б) $y'' +9y=\cos 3x$.

1. а) $xy' -4y-x^2\sqrt{y}=0$; б) $y'' - y' =x+1, y(0)=0, y'(0)=1$.

2. а) $y' +\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$; б) $y'' +4y=\cos 2x,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

3. а) $y'tgx=y+1$; б) $y'' -2y' +2y=x, y(0)=0, y'(0)=1$.

4. а) $y'\sqrt{1-x^2}=y^2+1$; б) $y'' + y' =2x+1, y(0)=-1, y'(0)=0$.

5. а) $y' =\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$; б) $y'' + y' -2y=x^2, y(0)=y'(0)=1$

6. а) $xy' + y=y^2\ln x$, б) $y'' - y' =e^x,\ y(0)=1,\ y'(0)=-1$.

7. а) $y' =2y+e^x-x,\ y(0)=\dfrac{1}{4}$; б) $y'' + y' -6y=e^{2x}$.

8. а) $y' = \dfrac{1+y^2}{xy}$; б) $y'' + 9y = e^{3x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

9. а) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$; б) $y'' - 5y' + 6y = \sin 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 3

Криволинейные интегралы

Задание 1. *Криволинейный интеграл первого рода*

Пусть гладкая кривая L в пространстве задана параметрически равенствами $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, где параметр t меняется в пределах T_1, T_2, то есть $T_1 \le t \le T_2$. Предположим, что на этой кривой распределена масса или электрический заряд с плотностью $f(x, y, z)$. Тогда масса всей кривой или величина суммарного заряда определяется следующим интегралом $\int\limits_L f(x, y, z)dL$, который называют криволинейным интегралом первого рода.

Вычисляется этот интеграл с помощью определённого интеграла по следующей формуле

$$\int\limits_L f(x,y,z)dL = \int\limits_{T_1}^{T_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt.$$

Основными свойствами криволинейного интеграла первого рода являются линейность и аддитивность:

1) $\int\limits_L C f(x,y,z)dL = C\int\limits_L f(x,y,z)dL$, $\int\limits_L (f+g)dL = \int\limits_L f\,dL + \int\limits_L g\,dL$;

2) если кривая L состоит из двух частей L_1 и L_2, тогда $\int\limits_L f(x,y,z)dL$ $= \int\limits_{L_1} f(x,y,z)dL + \int\limits_{L_2} f(x,y,z)dL$.

Пример. Найти массу кривой $x = a\cos t, y = a\sin t, z = at^2$, $0 \le t \le 2\pi$ с плотностью $f(x,y,z) = \sqrt{z}$. Находим $x' = -a\sin t, y' = a\cos t$, $z' = 2at$, $\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + (2at)^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2t^2}$. Следовательно, масса всей рассматриваемой кривой $M = \int\limits_L \sqrt{z}\,dL$ =

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{at^2}\sqrt{a^2 + 4a^2t^2}\,dt = a\sqrt{a}\int\limits_0^{2\pi} t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{1+4t^2}, \\ 2xdx = 8tdt, \\ tdt = \frac{1}{4}xdx \end{array} \right| = a\sqrt{a}\int\limits_1^{\sqrt{1+16\pi^2}} \frac{1}{4}x^2dx =$$

$$\frac{a\sqrt{a}}{4}\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^{\sqrt{1+16\pi^2}} = \frac{a\sqrt{a}}{12}\left(\sqrt{(1+16\pi^2)^3} - 1\right).$$

Криволинейный интеграл второго рода

Пусть в каждой точке кривой L задан вектор (например, сила) $\overline{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x.y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$. Тогда работа, совершаемая этой силой по перемещению материальной точки из точки A с координатами $x(T_1), y(T_1), z(T_1)$ в точку B с координатами $x(T_2), y(T_2), z(T_2)$ определяется интегралом $\int\limits_L \overline{F}\cdot d\bar{r} = \int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$, где $d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$. Этот интеграл называется криволинейным интегралом второго рода и вычисляется по формуле $\int\limits_L \overline{F}\cdot d\bar{r} =$

$$\int\limits_{T_1}^{T_2} [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

Кроме свойств линейности и аддитивности криволинейный интеграл второго рода обладает следующим свойством: если точка движется по кривой в обратном направлении от точки B к точке A, тогда интеграл меняет знак. Если обозначить L^+ движение вдоль кривой L в направлении возрастания параметра t от точки A к точке B, а L^- движение в обратном направлении, то $\int\limits_{L^+} \overline{F}\cdot d\bar{r} = -\int\limits_{L^-} \overline{F}\cdot d\bar{r}$.

Пример. Вычислим работу силы $\overline{F} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ вдоль замкнутого контура треугольника O(0,0,0), $A(1,1,1)$, $B(1,1,0)$, O(0,0,0). По свойству аддитивности $\int\limits_L \overline{F}\cdot d\bar{r} = \int\limits_{OA} \overline{F}\cdot d\bar{r} + \int\limits_{AB} \overline{F}\cdot d\bar{r} + \int\limits_{BO} \overline{F}\cdot d\bar{r}$. Составим параметрические уравнения прямых OA, AB, BO. Направляющий вектор прямой OA имеет координаты (1,1,1). Следовательно, её каноническое уравнение имеет вид $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, а параметрическое уравнение: $x = t, y = t, z = t,$ где параметр t меняется от 0 до 1 при движении в направлении OA. Аналогично, получим уравнение прямой AB: $x = 1, y = 1, z = t,$ где параметр t меняется от 1 до 0 при движении в направлении AB, и уравнение прямой BO: $x = t, y = t, z = 0,$ где параметр t меняется от 1 до 0. Таким образом, $\int\limits_{OA} \overline{F}\cdot d\bar{r} = \int\limits_0^1 (t^2 + t^2 + t^2)dt = \int\limits_0^1 3t^2 dt = t^3 \Big|_0^1 = 1$, $\int\limits_{AB} \overline{F}\cdot d\bar{r} = \int\limits_1^0 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_1^0 = -\frac{1}{3}$, а интеграл $\int\limits_{BO} \overline{F}\cdot d\bar{r} = \int\limits_1^0 2t^2 dt = \frac{2t^3}{3}\Big|_1^0 = -\frac{2}{3}$. Следовательно, искомая работа $\int\limits_L \overline{F}\cdot d\bar{r} =$

$1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=0.$

Двойной интеграл

Задание 2. *Двойной интеграл*

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в ограниченной области Ω (омега) на плоскости XOY. Если в области Ω распределена масса или электрический заряд с плотностью $f(x,y)$, тогда масса всей области Ω или суммарная величина заряда вычисляется с помощью интеграла $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$, который называется двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области Ω.

Основными свойствами двойного интеграла являются: 1) линейность: $\iint\limits_{\Omega} Cf(x,y)dxdy = C\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$, где $C-$ постоянная, $\iint\limits_{\Omega}(f+g)dxdy = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Omega} g(x,y)dxdy$ 2) аддитивность: если область $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$ (область Ω состоит из двух частей, котрые могут пересекаться по кривой), тогда $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} f(x,y)dxdy$.

Вычисление двойного интеграла сводится к повторному интегрированию, то есть к двукратному вычислению определённого интеграла.

Пусть область Ω является криволинейной трапецией относительно оси OX, то есть является частью плоскости, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$ ($a<b$) и кривыми $y=\alpha(x), y=\beta(x)$, где $\alpha(x) \le \beta(x)$ для всех значений $x \in [a,b]$. Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Сначала вычисляется внутренний интеграл в предположении, что $f(x,y)$ является функцией одной переменной y (x считается постоянной), а затем вычисляется интеграл от функции одной переменной x по промежутку $[a,b]$.

Пример. Вычислим $\iint\limits_{\Omega}(x+y)^2 dxdy$, где область Ω является частью плоскости, ограниченной кривыми $y=x^2, y=\sqrt{x}$. Из равенства $x^2=\sqrt{x}$ находим точки пересечения этих кривых $x_1=0, x_2=1$. Следовательно,

$a = 0, b = 1$. Так как $\sqrt{x} \ge x^2$ для всех $x \in [0,1]$, то кривая $y = \sqrt{x}$ ограничивает область интегрирования сверху, а кривая $y = x^2$ снизу. Таким образом, имеем $\iint\limits_{\Omega} (x+y)^2\,dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y)^2\,dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{(x+y)^3}{3} \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) dx =$

$\frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left((x+\sqrt{x})^3 - (x+x^2)^3 \right) dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left(3x^2\sqrt{x} + 3x^2 + x\sqrt{x} - 3x^4 - 3x^5 - 3x^6 \right) dx =$

$\frac{1}{3}\left(\frac{6}{7}x^3\sqrt{x} + x^3 + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^6 - \frac{3}{7}x^7 \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{7} + 1 + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} - \frac{1}{2} - \frac{3}{7} \right) = \frac{51}{70}$.

Если функция $f(x,y) \equiv 1$, тогда $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Omega} dxdy$ – площадь области Ω.

Пример. Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ (смотри предыдущий пример). Имеем, $S_\Omega = \iint\limits_{\Omega} dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right) dx =$

$= \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2 \right) dx = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^3 \right)\Big|_0^1 = 1.$

Если область Ω не является криволинейной трапецией относительно оси OX, тогда Ω разбивается прямыми, параллельными оси OY, на части $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$, каждая из которых является криволинейной трапецией относительно оси OX. После этого вычисляют двойной интеграл, используя свойство аддитивности $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} f(x,y)\,dxdy + \cdots$.

Пример. Вычислим $\iint\limits_{\Omega} (2x+y)^2\,dxdy$, если область Ω ограничена линиями x=0, y=x, y=x+1, y=2. Эта область не является криволинейной трапецией относительно оси OX, но прямая x=1 разбивает эту область на две части $\Omega_1 = \{(x,y)\colon 0 \le x \le 1,\ x \le y \le x+1\}$, $\Omega_2 = \{(x,y)\colon 1 \le x \le 2,\ x \le y \le 2\}$, каждая из которых является криволинейной трапецией. По свойству аддитивности двойного интеграла имеем $\iint\limits_{\Omega} (2x+y)^2\,dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} (2x+y)^2\,dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} (2x+y)^2\,dxdy$

$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{x+1} (2x+y)^2\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^2 (2x+y)^2\,dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{3}(2x+y)^3 \Big|_x^{x+1} \right) dx + \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{3}(2x+y)^3 \Big|_x^2 \right) dx =$

$$\frac{1}{3}\int_0^1\left[(2x+x+1)^3-(2x+x)^3\right]dx + \frac{1}{3}\int_1^2\left[(2x+2)^3-(2x+x)^3\right]dx = \frac{1}{3}\int_0^1\left[(3x+1)^3-27x^3\right]dx +$$

$$\frac{1}{3}\int_1^2\left[(2x+2)^3-27x^3\right]dx = \frac{1}{3}\int_0^1\left[27x^2+9x+1\right]dx + \frac{1}{3}\int_1^2\left[8+12x+24x^2-19x^3\right]dx =$$

$$\frac{1}{3}\left(9x^3+\frac{9}{2}x^2+x\right)\Bigg|_0^1 + \frac{1}{3}\left(8x^3+6x^2+8x-\frac{19}{4}x^4\right)\Bigg|_1^2 = \frac{29}{6}+\frac{28}{3}-\frac{23}{4}=\frac{101}{12}.$$

Пусть область интегрирования Ω является криволинейной трапецией относительно оси OY, то есть является частью плоскости, ограниченной прямыми $y=c,\ y=d$ ($c<d$) и кривыми $x=\alpha(y), x=\beta(y)$, где $\alpha(y)\le\beta(y)$ для всех значений $y\in[c,d]$. Тогда двойной интеграл вычисляется повторным интегрированием следующим образом

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_c^d\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right)dy.$$

Сначала вычисляется внутренний интеграл в предположении, что $f(x,y)$ является функцией одной переменной x (y считается постоянной), а затем вычисляется интеграл от функции одной переменной y по промежутку $[c,d]$.

Пример. Вычислим $\iint_\Omega \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, если область Ω ограничена линиями $y=1$, $y=x$, $y=x+1$, $y=2$. Эта область не является криволинейной трапецией относительно оси OX, но является трапецией относительно оси OY. следовательно, $\iint_\Omega \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_1^2 dy\int_{y-1}^{y}\frac{dx}{(x+y)^2} = \int_1^2\left(-\frac{1}{x+y}\Bigg|_{y-1}^{y}\right)dy = \int_1^2\left(-\frac{1}{2y}+\frac{1}{2y-1}\right)dy =$

$$\left(\frac{1}{2}\ln(2y-1)-\frac{1}{2}\ln y\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2y-1}{y}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2}-\ln 1\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Переход к полярным координатам в двойном интеграле

Пусть точка M в декартовой системе имеет координаты x,y. Тогда полярным радиусом этой точки называют расстояние от точки M до начала координат или длину радиус – вектора $\overline{OM}$ этой точки, а полярным углом называют угол, который радиус – вектор $\overline{OM}$ образует с осью OX. Полярный радиус обозначают r, а полярный угол φ. Связь декартовых координат точки с полярными осуществляется равенствами

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

Если область интегрирования Ω является кольцевым сектором, то есть в декартовых координатах задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} R_1^2 \le x^2 + y^2 \le R_2^2, \\ k_1 x \le y \le k_2 x, \end{cases}$$

тогда в полярной системе координат эта область будет являться прямоугольником $R_1 \le r \le R_2$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, где полярные углы φ_1, φ_2 определяются из равенств $tg\varphi_1 = k_1, tg\varphi_2 = k_2$.

Переход в двойном интеграле от декартовых координат к полярным координатам осуществляется по формуле

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r d\varphi dr,$$

которая, в случае, когда область интегрирования является кольцевым сектором, принимает следующий вид

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{R_1}^{R_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr. \qquad (1)$$

Пример. Вычислим двойной интеграл $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$, если область интегрирования Ω задана неравенствами

$$\begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \\ x \le y \le \sqrt{3}\, x. \end{cases}$$

В этом случае имеем $R_1 = 1, R_2 = 2$, а $tg\varphi_1 = 1, tg\varphi_2 = \sqrt{3}$. Следовательно, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$, и рассматриваемый интеграл, согласно формуле (1), будет равен $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$ = $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{1}^{2} \sqrt{1 + r^2}\ r\, dr$ = (так как внутренний интеграл не зависит от φ) = $\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \int\limits_{1}^{2} \sqrt{1 + r^2}\ r\, dr$ = (после замены переменной $t = \sqrt{1 + r^2}, t^2 = 1 + r^2, 2tdt = 2rdr$ *или* $tdt = rdr$) = $\frac{\pi}{12} \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} t^2 dt$ = $\frac{\pi}{12} \frac{t^3}{3} \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}$ = $\frac{\pi}{12} \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{3} = \frac{\pi(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})}{36}$.

Тройной интеграл

Если в области V трёхмерного пространства распределена масса или электрический заряд с плотностью $f(x,y,z)$, тогда масса этой области или суммарный электрический заряд определяются с помощью тройного интеграла $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, который обладает теми же свойствами, что и двойной интеграл (линейность, аддитивность и т.д.).

Вычисление тройного интеграла, также как и двойного, производится с помощью повторного интегрирования. Пусть область V является цилиндрической относительно оси OZ: ограничена снизу поверхностью $S_1 : z = \varphi(x,y)$ (нижнее основание), ограничена сверху поверхностью $S_2 : z = \psi(x,y)$ (верхнее основание), $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$, а образующая параллельна оси OZ. Тогда справедливо равенство

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{V_{xy}} dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz, \qquad (2)$$

где V_{xy} – проекция цилиндра V на плоскость XOY.

Пример. Вычислим тройной интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x+y+z}}$, если область интегрирования V является тетраэдром, который ограничен плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=3$.

Очевидно, область V является цилиндрической относительно оси OZ, которая ограничена снизу плоскостью $z=0$, ограничена сверху плоскостью $z=3-x-y$, а проекцией V_{xy} тетраэдра на плоскость XOY является треугольник, ограниченный прямыми $x=0,\quad y=0, x+y=3.$ Согласно формуле (2) имеем $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x+y+z}} = \iint\limits_{V_{xy}} dxdy \int\limits_0^{3-x-y} \frac{dz}{\sqrt{1+x+y+z}}$ = (переходим к повторному интегрированию в полученном двойном интеграле) = $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} dy \int\limits_0^{3-x-y} \frac{dz}{\sqrt{1+x+y+z}}$ = (вычисляем внутренний интеграл) = $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} \left(2\sqrt{1+x+y+z}\right)\Big|_0^{3-x-y} dy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} \left(4-2\sqrt{1+x+y}\right)dy$ = (вычислим внутренний интеграл) $\int\limits_0^3 \left(4y - \frac{4}{3}(1+x+y)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^{3-x} dx = \int\limits_0^3 \left(4(3-x) - \frac{32}{3} + \frac{4}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right)dx$

$$= \left[-4\frac{(3-x)^2}{2} - \frac{32}{3}x + \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}\right]\Big|_0^3 = \frac{8}{15}\cdot 16\cdot 2 - 32 - \frac{8}{15} + 18 = \frac{38}{15}.$$

Тройной интеграл используется для вычисления объёма пространственных тел, который равен $\iiint\limits_V dxdydz$.

Пример. Вычислим объём части цилиндра $x^2+y^2=a^2$, заключённой между плоскостями $x+y+2z=2a$, $x+y+z=2a$.

По условию, данное тело V ограничено снизу плоскостью $z = a - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$, а сверху плоскостью $z = 2a - x - y$. Проекцией этого тела на координатную плоскость XOY является круг $x^2 + y^2 \le a^2$. Следовательно, искомый объём равен $\iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_{V_{xy}} dxdy \int\limits_{a-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}}^{2a-x-y} dz =$ $\iint\limits_{V_{xy}} \left(2a - x - y - a + \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \left(a - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right) dxdy =$ (перейдём к полярным координатам) $= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(a - \frac{1}{2} r\cos\varphi - \frac{1}{2} r\sin\varphi\right) rdr =$ $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(ar - \frac{1}{2} r^2\cos\varphi - \frac{1}{2} r^2\sin\varphi\right) dr = \int\limits_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{2} ar^2 - \frac{1}{6} r^3\cos\varphi - \frac{1}{6} r^3\sin\varphi\right)\Big|_0^a\right] d\varphi$ $= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} a^3 - \frac{1}{6} a^3\cos\varphi - \frac{1}{6} a^3\sin\varphi\right) d\varphi = \left(\frac{1}{2} a^3\varphi - \frac{1}{6} a^3\sin\varphi + \frac{1}{6} a^3\cos\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi a^3$.

Поверхностные интегралы

Задание 3. *Поверхностный интеграл первого рода.*

Пусть в каждой точке поверхности S определена функция $f(x, y, z)$, которая может являться плотностью массы или электрического заряда распределённого по этой поверхности. Тогда масса всей поверхности или суммарный заряд определяются при помощи поверхностного интеграла первого рода

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS.$$

Основными свойствами этого интеграла являются свойства: 1) линейность, то есть $\iint\limits_S (\alpha f + \beta g) dS = \iint\limits_S \alpha f(x, y, z) dS + \iint\limits_S \beta g(x, y, z) dS$, где α, β – постоянные; 2) аддитивность, то есть $\iint\limits_S f(x, y, z) dS = \iint\limits_{S_1} f(x, y, z) dS$ $+ \iint\limits_{S_2} f(x, y, z) dS$, где S_1, S_2 – части поверхности S, которые могут пересекаться только по линии и $S_1 \cup S_2 = S$; 3) если $f(x, y, z) \equiv 1$, тогда $\iint\limits_S dS$ – площадь поверхности S.

Вычисление поверхностного интеграла первого рода

Пусть поверхность S задана в декартовых координатах уравнением $z=\varphi(x,y)$ (либо $y=\varphi(x,z)$ или $x=\varphi(y,z)$), тогда эта поверхность однозначно проектируется на координатную плоскость XOY (на координатные плоскости XOZ или YOZ) и эту проекцию будем обозначать S_{xy}. Тогда поверхностный интеграл первого рода вычисляется по такой формуле

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{S_{xy}} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Пример. Вычислить $\iint_S (x^2+y^2+z)^2\,dS$, где поверхность S является частью параболоида $z=x^2+y^2, \quad z\le 2$.

В данном случае $\varphi(x,y)=x^2+y^2$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=2y$, проекцией S_{xy} части параболоида на плоскость XOY является круг $x^2+y^2\le 2$. Следовательно, $\iint_S (x^2+y^2+z)^2\,dS = \iint_{S_{xy}} (x^2+y^2+x^2+y^2)^2\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$

= (перейдём к полярным координатам в последнем интеграле) =

$= 4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\times r^4\sqrt{1+4r^2}\,dr = 8\pi\int_0^{\sqrt{2}} r^5\sqrt{1+4r^2}\,dr$ = (произведём замену переменной $t=\sqrt{1+4r^2}, t^2=1+4r^2, 2tdt=8rdr, rdr=\frac{1}{4}tdt, r^2=\frac{t^2-1}{4}$) $= 8\pi\times$ $\int_0^3\left(\frac{t^2-1}{4}\right)^2 t\frac{1}{4}tdt = \frac{\pi}{8}\int_0^3\left(t^6-2t^4+t^2\right)dt = \frac{\pi}{8}\left(\frac{t^7}{7}-2\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{109}{315}\pi$.

Если поверхность S проектируется на координатную плоскость не однозначно, тогда её разбивают на не пересекающие части, каждая из которых однозначно проектируется на координатную плоскость, а затем пользуются свойством аддитивности.

Пример. Вычислить $\iint_S x^2\,dS$, где S – полная поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Сфера неоднозначно проектируется на плоскость XOY, поэтому разобьём её на две полусферы S_+, уравнение которой $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, и S_-, уравнение которой $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Проекцией полусфер S_+ и S_- на координатную плоскость XOY является круг $K: x^2+y^2\le a^2$, а $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}$ для обеих полусфер S_+ и S_-.

По свойству аддитивности поверхностного интеграла первого рода получаем

$$\iint_S x^2\,dS = \iint_{S_+} x^2\,dS + \iint_{S_-} x^2\,dS = 2\iint_K x^2\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}dxdy =$$

$2\iint_K x^2 \dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy =$ (перейдём в интеграле к полярным координатам) $= 2a\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^a \dfrac{r^2\cos^2\varphi r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr = 2a\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^a \dfrac{r^3dr}{\sqrt{a^2-r^2}} =$ (так как интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \left(\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi$) $= 2\pi a\int\limits_0^a \dfrac{r^3dr}{\sqrt{a^2-r^2}} =$ (произведём замену переменной $t=\sqrt{a^2-r^2}$, $t^2=a^2-r^2$, $rdr=-tdt$, $r^2=a^2-t^2$) $= 2\pi a\int\limits_a^0 \dfrac{(a^2-t^2)(-t)dt}{t} = 2\pi a\left(a^2t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi a^4$.

Поверхностный интеграл второго рода

Если в каждой точке области V пространства R^3 определена вектор – функция $\overline{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x.y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$, тогда говорят, что в области V задано векторное поле $\overline{F}$.

Пусть поверхность $S\subset V$, тогда поверхностный интеграл $\iint_S(\overline{F}\cdot\overline{n})dS$, где $\overline{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности S в точке $(x,y,z)\in S$, $\overline{F}\cdot\overline{n}$ – скалярное произведение векторов $\overline{F}$ и $\overline{n}$, называют потоком векторного поля $\overline{F}$ через поверхность S в направлении нормали $\overline{n}$. Отметим, что поток в противоположном направлении имеет противоположный знак $\iint_S(\overline{F}\cdot(-\overline{n}))dS = -\iint_S(\overline{F}\cdot\overline{n})dS$. Поверхностный интеграл второго рода можно вычислять двумя способами.

1). Если поверхность S задана уравнением $f(x,y,z)=0$, тогда вектор из частных производных $grad\, f(M_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0)\overline{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0)\overline{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}(M_0)\overline{k}$, который называется градиентом функции f, является нормалью к поверхности S в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$ (при этом $f(x_0,y_0,z_0)=0$). Тогда вектор единичной нормали $\overline{n}=\dfrac{grad\, f(x,y,z)}{|\,grad\, f\,|}$, а скалярное произведение $(\overline{F}\cdot\overline{n})=$

$\frac{Pf_x^{/} + Qf_y^{/} + Rf_z^{/}}{\sqrt{(f_x^{/})^2 + (f_y^{/})^2 + (f_z^{/})^2}}$. Подставив полученное выражение для скалярного произведения в интеграл, получим поверхностный интеграл первого рода.

Пример. Вычислить поток векторного поля $\overline{F} = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$ через полную поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ в направлении внешней нормали.

Градиент функции $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ равен $grad\, f$ = $2x\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k}$ и является внешней нормалью к сфере. Вектор единичной нормали $\bar{n} = \frac{grad\, f(x,y,z)}{|\, grad\, f\,|}$ = $\frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Следовательно, $\iint\limits_S (\overline{F}\cdot\bar{n})\,dS =$

$$\iint\limits_S \frac{x^4 + y^4 + z^4}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,dS = \iint\limits_S \frac{x^4 dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \iint\limits_S \frac{y^4 dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \iint\limits_S \frac{z^4 dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Вычислим первый интеграл. Как в предыдущем примере разобьём сферу на две полусферы S_+ и S_-, уравнения которых $z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ соответственно, а $dS = \frac{a\,dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$. Имеем

$$\iint\limits_S \frac{x^4 dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

$\iint\limits_{S_+} \frac{x^4 dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \iint\limits_{S_-} \frac{x^4 dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 2\iint\limits_K \frac{x^4}{a}\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}dxdy$, так как на сфере S будет $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a$, круг $K: x^2 + y^2 \le a^2$ – проекция полусфер S_+ и S_- на координатную плоскость XOY. Переходя в последнем интеграле к полярным координатам, получим $2\iint\limits_K \frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}dxdy$ = $2\int\limits_0^{2\pi}\cos^4\varphi\, d\varphi \int\limits_0^a \frac{r^5 dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} =$ (произведём во внутреннем интеграле замену $t = \sqrt{a^2 - r^2}$, $rdr = -tdt$, $r^2 = a^2 - t^2$) = $2\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi \int\limits_0^a (a^2 - t^2)^2 dt$ = $\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right)d\varphi \int\limits_0^a (a^4 - 2a^2t^2 + t^4)dt$ = $\frac{4}{5}\pi a^5$, так как внутренний интеграл $\int\limits_0^a (a^4 - 2a^2t^2 + t^4)dt = \left(a^4 t - \frac{2}{3}a^2t^3 + \frac{1}{5}t^5\right)\Big|_0^a = \frac{8}{15}a^5$, а интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\varphi + \frac{\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi = 3\pi$.

Второй интеграл вычисляется аналогично и равен также $\frac{4}{5}\pi a^5$.

Вычислим третий интеграл: $\iint\limits_S \frac{z^4 dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \iint\limits_{S_+} \frac{z^4 dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \iint\limits_{S_-} \frac{z^4 dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2\iint\limits_K \frac{\left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^4}{a} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dxdy$ = (так как на $S_\pm$ $z = \pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, а $z^4 = \left(\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^4 = \left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^4$ и интегралы по S_+ и S_- равны) = $2\iint\limits_K \left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^3 dxdy$ = (переходим к полярным координатам) = $2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r\left(\sqrt{a^2-r^2}\right)^3 dr = 4\pi\int\limits_0^a t^4 dt = \frac{4}{5}\pi a^5$. Сложив полученные значения всех трёх интегралов, получим, что искомый поток равен $\frac{4}{5}\pi a^5 + \frac{4}{5}\pi a^5 + \frac{4}{5}\pi a^5 = \frac{12}{5}\pi a^5$.

2). Пусть поверхность S однозначно проектируется на координатные плоскости YOZ, XOZ, XOY, вектор единичной нормали $\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ – углы, которые вектор $\bar{n}$ образует с координатными осями OX, OY, OZ соответственно. Тогда $\iint\limits_S (\bar{F}\cdot\bar{n})dS = \iint\limits_S P(x,y,z)\cos\alpha\, dS + \iint\limits_S Q(x,y,z)\cos\beta\, dS + \iint\limits_S R(x,y,z)\cos\gamma\, dS = \pm\iint\limits_{S_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,dydz \pm \iint\limits_{S_{xz}} Q(x,y(x,z),z)\,dxdz \pm \iint\limits_{S_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy$, где знак + перед интегралом ставится в том случае, если соответствующий угол острый, а знак – ставится в том случае, если соответствующий угол тупой (если угол равен 90^0, тогда косинус этого угла равен 0, а значит, равен 0 и соответствующий интеграл); функции $x(y,z)$, $y(x,z), z(x,y)$ находят из уравнения поверхности S. Если поверхность S не однозначно проектируется на какую либо координатную плоскость, тогда её разбивают на части, каждая из которых однозначно проектируется на эту плоскость, а затем используют свойство аддитивности интеграла.

Пример. Вычислить поток векторного поля $\overline{F} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}$ через полную поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ в направлении внешней нормали.

Имеем, $\iint\limits_S (\overline{F}\cdot\overline{n})dS = \iint\limits_S x^3\cos\alpha\, dS + \iint\limits_S y^3\cos\beta\, dS + \iint\limits_S z^3\cos\gamma\, dS$. Вычислим первый интеграл. Сфера S не однозначно проектируется на плоскость YOZ, поэтому разобьём её на две полусферы S_+ и S_-, уравнения которых $x = \pm\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$. Тогда, по свойству аддитивности интеграла, $\iint\limits_S x^3\cos\alpha\, dS = \iint\limits_{S_+} x^3\cos\alpha\, dS + \iint\limits_{S_-} x^3\cos\alpha\, dS = \iint\limits_K \left(+\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}\right)^3 dydz - \iint\limits_K \left(-\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}\right)^3 dydz = 2\iint\limits_K \left(\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}\right)^3 dydz$, где круг $K:\ y^2 + z^2 \le a^2$ – проекция полусфер S_+ и S_- на координатную плоскость YOZ. При этом интеграл по S_+ берётся со знаком +, а интеграл по S_- со знаком –, так как вектор нормали $\overline{n}$ на полусфере S_+ образует острый угол с осью OX, а на полусфере S_- – тупой угол. Перейдя в последнем интеграле к полярным координатам: $y = r\cos\varphi, z = r\sin\varphi,$ получим $2\iint\limits_K \left(\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}\right)^3 dydz = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r\left(\sqrt{a^2 - r^2}\right)^3 dr = 4\pi\int\limits_0^a r\left(\sqrt{a^2 - r^2}\right)^3 dr$ (сделаем замену $t = \sqrt{a^2 - r^2}, t^2 = a^2 - r^2, tdt = -rdr$) $= 4\pi\int\limits_0^a t^3 t\, dt = \frac{4}{5}\pi a^5$. Следовательно, $\iint\limits_S x^3\cos\alpha\, dS = \frac{4}{5}\pi a^5$. Второй и третий интегралы вычисляются также как первый и равны $\frac{4}{5}\pi a^5$. Сложив все три интеграла, получим $\iint\limits_S (\overline{F}\cdot\overline{n})dS = \frac{12}{5}\pi a^5$.

Формула Гаусса – Остроградского

Задание 4.

Определение. Дивергенцией (расходимостью) векторного поля $\overline{F}$ в точке $M(x, y, z)$ называют предел отношения потока векторного поля $\overline{F}$ через замкнутую поверхность S_M, окружающую точку M, в направлении внешней нормали к объёму тела V_M, ограниченного этой поверхностью, при $V_M \to 0$. Дивергенция векторного поля $\overline{F}$ обозначается $div\overline{F}$ и вычисляется по формуле: $div\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M)$.

Векторное поле $\overline{F}$ называется соленоидальным, если $div\overline{F} \equiv 0$.

Будем предполагать, что функции $P(x,y,z), Q(x.y,z), R(x,y,z)$ и их частные производные первого порядка $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны.

Пусть замкнутая поверхность S является границей ограниченной области V_S пространства R^3. Тогда поток векторного поля $\overline{F}$ через поверхность S в направлении внешней нормали определяется формулой Гаусса – Остроградского

$$\iint_S (\overline{F} \cdot \overline{n})\, dS = \iiint_{V_S} div\overline{F} dxdydz .$$

Из этой формулы следует, что в соленоидальном поле поток этого поля через замкнутую поверхность равен 0.

Пример. Вычислить, пользуясь формулой Гаусса – Остроградского, поток векторного поля $\overline{F} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}$ через полную поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ в направлении внешней нормали.

Имеем $div\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$, а $\iint_S (\overline{F} \cdot \overline{n})\, dS$ = $3\iiint_{V_S} (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$, где V_S – шар $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$. Для вычисления полученного интеграла перейдём от декартовых координат к сферическим координатам r, θ, φ:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние от точки $M(x, y, x)$ до начала координат, θ – угол, который радиус – вектор $\overline{OM}$ точки M образует с осью OZ, φ – угол, который радиус – вектор $\overline{OM_1}$ точки M_1 (точка M_1 является проекцией точки M на плоскость XOY) образует с осью OX. При этом, определитель Якоби $I(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin\theta$.

В сферических координатах получим $3\iiint_{V_S} (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$ =

$$3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^a r^4 dr = 6\pi 2 \frac{a^5}{5} = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

Формула Стокса

Будем предполагать, что векторное поле $\overline{F}$ дифференцируемо, то есть функции $P(x,y,z), Q(x.y,z), R(x,y,z)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка.

Определение. Вихрем векторного поля $\overline{F}$, обозначаемым $rot\overline{F}$ называют вектор $rot\overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}$.

Теорема Стокса. Циркуляция векторного поле $\overline{F}$ по кусочно гладкому замкнутому контуру L равна потоку поля $rot\overline{F}$ через поверхность S_L, ограниченную этим контуром:

$$\oint_L (\overline{F} \cdot d\overline{r}) = \iint_{S_L} (rot\overline{F} \cdot \overline{n})dS,$$

или в координатной форме $\oint_L (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint_{S_L} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS$. При этом вектор единичной нормали $\overline{n}$ к поверхности S_L должен быть направлен так, чтобы из конца вектора $\overline{n}$ обход контура L казался осуществляемым против часовой стрелки (в положительном направлении).

Пример. Вычислить циркуляцию векторного поля $\overline{F} = z\overline{i} + x\overline{j} + 2y\overline{k}$ по замкнутому контуру L, образованному сечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ плоскостью $x = y$ в положительном направлении относительно орта $\overline{i}$.

Контур L является окружностью радиуса a, которая расположена в плоскости $x = y$, а поверхностью S_L, ограниченной этим замкнутым контуром, является круг, ограниченный этой окружностью. Вихрь векторного поля $rot\overline{F} = 2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, вектор единичной нормали к поверхности S_L, относительно которого контур L обходится в положительном направлении, $\overline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}$, скалярное произведение $rot\overline{F} \cdot \overline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, по теореме Стокса, искомая циркуляция $\oint_L zdx + xdy + 2ydz = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{S_L} dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \times$ (площадь круга радиуса r) $= \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$.

Потенциал векторного поля

Задание 5. *Определение*. Векторное поле $\overline{F} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ называется потенциальным, если существует функция $u(x, y, z)$ такая, что справедливо равенство $grad\,u = \overline{F}$ или в скалярной форме $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \frac{\partial u}{\partial z} = R$, а функция $u(x, y, z)$ называется потенциалом этого векторного поля.

Необходимым и достаточным условием потенциальности гладкого в односвязной области векторного поля $\overline{F}$ является равенство нулю вихря этого поля: $rot\overline{F}=0$.

Потенциальные поля в области непрерывности потенциала обладают следующими важными свойствами.

Работа поля не зависит от пути из точки A в точку B и равна разности значений потенциала в этих точках, то есть, если L_1, L_2 – два различных пути из точки A в точку B, тогда $\oint\limits_{L_1}(\overline{F}\cdot d\overline{r})=\oint\limits_{L_2}(\overline{F}\cdot d\overline{r})=u(B)-u(A)$;

Работа поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

Пусть точка $A(x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная, а точка $B(x, y, z)$ – произвольная точки области непрерывности потенциального поля $\overline{F}$. Тогда потенциал этого поля можно вычислить по следующей формуле:

$$u(x,y,z)=\int\limits_{x_0}^{x}P(t,y_0,z_0)dt+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,t,z_0)dt+\int\limits_{z_0}^{z}R(x,y,t)dt.$$

Пример. Убедиться в том, что векторное поле

$$\overline{F}=\frac{x^2-y^2-z^2}{x^2yz}\overline{i}+\frac{y^2-x^2-z^2}{xy^2z}\overline{j}+\frac{z^2-x^2-y^2}{xyz^2}\overline{k}$$

потенциально и найти его потенциал.

Убедимся сначала в том, что рассматриваемое поле потенциально. Имеем, $\frac{\partial R}{\partial y}=\left(\frac{z^2-x^2}{xyz^2}-\frac{y}{xz^2}\right)_y^{/}=\frac{x^2-z^2}{xy^2z^2}-\frac{1}{xz^2}=\frac{x^2-z^2-y^2}{xy^2z^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=$ $\left(\frac{y^2-x^2}{xzy^2}-\frac{z}{xy^2}\right)_z^{/}=\frac{x^2-y^2}{xy^2z^2}-\frac{1}{xy^2}=\frac{x^2-z^2-y^2}{xy^2z^2}$. Следовательно, $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$.

Аналогично, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{y^2-z^2-x^2}{yx^2z^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{z^2-y^2-x^2}{zx^2y^2}$. Следовательно, $rot\overline{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}\equiv 0$ и поле $\overline{F}$ потенциально.

Выбрав $x_0=1, y_0=1, z_0=1$, находим потенциал $u(x,y,z)=\int\limits_1^x\frac{t^2-2}{t^2}dt\ +$

$$\int_1^y \frac{t^2-x^2-1}{xt^2}dt + \int_1^z \frac{t^2-x^2-y^2}{xyt^2}dt = \left(t+\frac{2}{t}\right)\Big|_1^x + \left(\frac{t}{x}+\frac{x}{t}+\frac{1}{xt}\right)\Big|_1^y + \left(\frac{t}{xy}+\frac{x}{yt}+\frac{y}{xt}\right)\Big|_1^z =$$

$$x+\frac{2}{x}-1-2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{1}{xy}-\frac{1}{x}-x-\frac{1}{x}+\frac{z}{xy}+\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}-\frac{1}{xy}-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}= \frac{z}{xy}+\frac{x}{yz}$$

$+\dfrac{y}{xz}-3$. Следовательно, потенциал $u(x,y,z)=\dfrac{z}{xy}+\dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{xz}+C$.

Числовые ряды

Задание 6. *Понятие числового ряда*. Выражение вида

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (3)$$

называют числовым рядом. Числовую последовательность a_n называют общим членом числового ряда (3). Сумма первых n членов числового ряда называется n – той частичной суммой ряда и обозначается S_n. Таким образом, возникает последовательность частичных сумм ряда (3)

$$S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2,\ \cdots,\ S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\ \cdots$$

Если существует предел частичных сумм $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, тогда говорят, что ряд (3) сходится, а число S называют суммой этого ряда. Если же предел частичных сумм не существует или равен ∞, тогда говорят, что ряд (3) расходится.

Пример. Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Преобразуем общий член этого ряда $a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$. Тогда частичная сумма ряда $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln n-\ln(n-1))+(\ln(n+1)-\ln n)=\ln(n+1)$, так как все другие слагаемые сократились в силу чередования знаков. Далее, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$, а значит, рассматриваемый числовой ряд расходится.

Пример. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$. Общий член этого ряда можно представить в виде разности $a_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, следовательно,

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$ и рассматриваемый ряд сходится, а его сумма равна 1.

Необходимый признак сходимости числового ряда

Если числовой ряд (3) сходится, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Действительно, из сходимости ряда (3) следует существование $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$

Из необходимого признака сходимости ряда следует *достаточный признак расходимости ряда*: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$ расходится так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0$.

Свойства числовых рядов

Числовые ряды обладают следующими свойствами:

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{/}$ получен из ряда (3) отбрасыванием конечного числа слагаемых, тогда эти ряды сходятся или расходятся одновременно;

2) ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C\, a_n$, где $C \neq 0$, сходятся или расходятся одновременно и справедливо равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (Ca_n) = C \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

3) если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, тогда сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \pm b_n\right)$ и справедливы равенства $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \pm b_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Проиллюстрируем свойство 1) –3) на следующем примере. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ сходится, если $|q| < 1$, и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$. Следовательно, числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$ сходится и справедливо равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

Признаки сходимости положительных рядов

Ряды (3), у которых все члены являются положительными числами, $a_n > 0$, называются положительными рядами. Вначале рассмотрим признаки сравнения положительных рядов.

1. *Мажорантный признак сравнения.*

Пусть даны два положительных ряда

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Если для любых $n \geq N$ (начиная с номера N) выполняется неравенство

$$a_n \leq b_n,$$

тогда из сходимости ряда (2) (большего ряда) следует сходимость ряда (1) (меньшего ряда), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Пример. Ранее было доказано, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ расходится. Докажем расходимость гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Воспользуемся неравенством $\ln(1+x) < x$ для любых $x > 0$. Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = x - \ln(1+x)$. Так как производная $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$ для всех $x > 0$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает на промежутке $[0,+\infty)$, а значит, для любых $x > 0$ выполняется неравенство $f(x) = x - \ln(1+x) > f(0) = 0$. Так как $\frac{1}{n} > 0$, то выполнено неравенство $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ и, гармонический ряд расходится.

2. *Предельный признак сравнения.*

Пусть для общих членов рядов (1), (2) существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{bn} = k \neq 0$, тогда эти ряды сходятся или расходятся одновременно.

Для успешного использования признаков сравнения необходимо иметь в своём распоряжении набор числовых рядов, о которых известно сходятся они или расходятся. Поэтому к уже рассмотренным рядам добавим обобщённые гармонические ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, которые сходятся, если $p > 1$ и расходятся, если $p \leq 1$.

Пример. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n^3 - n + 2}$. Сначала установим асимптотику общего члена ряда при $n \to \infty$, отбросив в числителе и знаменателе дроби меньшие степени n. Так как последовательность

$\frac{3n+1}{4n^3-n+2}$ эквивалентна $\frac{3n}{4n^3}=\frac{3}{4n^2}$, если $n\to\infty$, то исследуемый ряд необходимо сравнивать с обобщённым гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Имеем, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{4n^3-n+2}:\frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+n^2}{4n^3-n+2} = \frac{3}{4}\neq 0$. Следовательно, рассматриваемый ряд сходится, как и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^p}\right)$ сходится, если $p>1$ и расходится, если $0<p\leq 1$. Так как в этом случае $\frac{1}{n^p}\to 0$ то, по первому замечательному пределу $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, будет выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n^p}\right)}{\left(\frac{1}{n^p}\right)}=1$ и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^p}\right)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходятся или расходятся одновременно.

Аналогично из равенств $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$, следует, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ сходятся, если $p>1$ и расходятся, если $0<p\leq 1$.

3. *Признак Даламбера.*

Пусть $a_n>0$ общий член ряда (3) и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=k$ (может быть $k = +\infty$). Тогда: 1) если $k<1$, то ряд (3) сходится; 2) если $k>1$, то ряд (3) расходится; 3) если $k=1$, то признак Даламбера не даёт ответ о сходимости ряда и необходимо применять другие признаки.

Заметим, что признак Даламбера следует применять тогда, когда общий член ряда содержит сомножители вида $n!$, a^n.

Пример. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n!2^n}$ с помощью признака Даламбера. Имеем, $a_n=\frac{(n+1)!}{n!2^n}$, $a_{n+1}=\frac{(n+2)!}{(n+1)!2^{n+1}}$ (a_{n+1} получается из a_n заменой n на $n+1$), $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)!2^n n!}{(n+1)!2^n(n+1)!} = \frac{n+2}{2(n+1)}$. Следовательно,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2(n+1)}=\dfrac{1}{2}<1$ и исследуемый ряд сходится.

4. *Радикальный признак Коши.*

Пусть $a_n>0$ общий член ряда (3) и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$ (может быть $k=+\infty$). Тогда: 1) если $k<1$, то ряд (3) сходится; 2) если $k>1$, то ряд (3) расходится; 3) если $k=1$, то признак Коши не даёт ответ о сходимости ряда и необходимо применять другие признаки.

Отметим, что для практического применения этого признака необходимо знать следующие пределы: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1$, где $p>0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p}=1$, где p – любое постоянное число, так как $\sqrt[n]{n^p}=\left(n^p\right)^{\frac{1}{n}}$ = $\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^p$ = $\left(\sqrt[n]{n}\right)^p\to1$ при $n\to\infty$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}=1$, где $a_0>0$, $a_1,\ldots,a_k$ – постоянные числа.

Пример. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n^4+5n^3-n+1}{(n+3)2^n}$. По признаку Коши $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3n^4+5n^3-n+1}{(n+1)2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{3n^4+5n^3-n+1}}{2\sqrt[n]{n+1}}$ = $\dfrac{1}{2}<1$ и рассматриваемый ряд сходится.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+1}{2n+3}\right)^n$ расходится так как, по признаку Коши, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ = $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{3n+1}{2n+3}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{2n+3}\right)=\dfrac{3}{2}>1$.

Отметим, что если учесть очевидное неравенство $1<\ln n<n$, которое выполняется для любых $n\geq3$, получим неравенство $1<\sqrt[n]{\ln n}<\sqrt[n]{n}$. А так как 1 и $\sqrt[n]{n}\to1$, если $n\to\infty$, то, по достаточному признаку существования предела, существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}=1$. Из последнего равенства следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln^p n}=1$ для любого постоянного числа p.

Поэтому с помощью радикального признака Коши можно исследовать сходимость рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^p n}{a^n}$, которые сходятся, если $a > 1$, и расходятся, если $a < 1$, так как $\sqrt[n]{\frac{\ln^p n}{a^n}} \to \frac{1}{a}$, если $n \to \infty$.

5. *Интегральный признак Коши.*

Если общий член ряда (3) убывает, то есть $a_{n+1} \le a_n$ для любых $n \ge N$, функция *f(x)* убывает на промежутке $(1,+\infty)$ и $f(n) = a_n$. Тогда несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Чтобы исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$, где постоянная $p > 0$, рассмотрим несобственный интеграл $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}$. После замены переменной $t = \ln x, dt = \frac{dx}{x}$ в этом интеграле получаем $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x} = \int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^p} =$

$$(p \ne 1) = \left(\frac{t^{1-p}}{1-p}\right)\Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{1-p}}{1-p}\right) - \frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} +\infty, \textit{если } 1-p>0, \\ \dfrac{(\ln 2)^{1-p}}{p-1}, \textit{если } 1-p<0, \end{cases}$$ так

как $t^{1-p} \to +\infty$, если $1-p > 0\,(p<1)$, и $t^{1-p} \to 0$, если $1-p<0\,(p>1)$. В случае $p=1$ имеем $\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t} = \ln t\Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty}\ln t - \ln(\ln 2) = +\infty$.

Следовательно, несобственный интеграл, а значит и рассматриваемый ряд, сходятся, если $p>1$, и расходятся, если $p \le 1$.

Пример. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$.

Докажем сначала, что последовательность $\frac{\ln n}{n^2}$ убывает. Для этого рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Имеем, $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' =$ $\frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3} <$ 0, если будет выполнено неравенство $1-2\ln x < 0$ или $\ln x > \frac{1}{2}$, или $x > \sqrt{e}$. Следовательно, функция $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ монотонно убывает для $x > 2$, а значит, убывает и последовательность $\frac{\ln n}{n^2}$.

Для вычисления несобственного интеграла $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\ln x dx}{x^2}$ применим формулу интегрирования по частям: $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\ln x dx}{x^2} = \begin{vmatrix} u=\ln x, du=\frac{dx}{x}, \\ dv=\frac{dx}{x^2}, v=-\frac{1}{x} \end{vmatrix} = -\frac{\ln x}{x}\Big|_{2}^{+\infty} + \int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$

$=$ (так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$) $=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{x}\Big|_{2}^{+\infty}=\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}$ (так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$). Следовательно, несобственный интеграл сходится, а значит, сходится и рассматриваемый ряд.

Знакопеременные ряды

Числовой ряд (3) называется знакопеременным, если у него существуют как положительные, так и отрицательные слагаемые со сколь угодно большими номерами.

Кроме знакопеременного ряда (3) будем рассматривать положительный ряд из абсолютных величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (3), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (4).$$

Говорят, что знакопеременный ряд (3) сходится абсолютно, если сходится ряд из абсолютных величин (4); если же ряд (4) расходится, а сам ряд (3) сходится, то говорят, что знакопеременный ряд (3) сходится не абсолютно или условно.

Отметим, что из сходимости ряда (4) следует сходимость ряда (3), то есть из абсолютной сходимости знакопеременного ряда следует его сходимость. Абсолютно и условно сходящиеся ряды сильно отличаются по своим свойствам: 1) сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется при любой перестановке его членов, 2) для любого действительного числа S можно так переставить местами члены условно сходящегося ряда, что сумма нового ряда будет равна S. По этой причине важно уметь различать абсолютно и условно сходящиеся ряды.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ является знакопеременным рядом, так как $\sin n$ принимает как отрицательные, так и положительные значения. Ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$ сходится, так как справедливо неравенство $\frac{|\sin n|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Следовательно, по мажорантному признаку сравнения, сходится ряд из абсолютных величин, а значит, рассматриваемый знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Важным частным случаем знакопеременных рядов являются знакочередующиеся ряды вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \,, \qquad (4)$$

где $a_n > 0$ для всех значений n.

Для исследования сходимости таких рядов используют *признак Лейбница*: если общий член ряда (4) удовлетворяет условиям:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 2) $a_{n+1} \le a_n$ (последовательность a_n убывает), тогда знакочередующийся ряд (4) сходится.

Пример. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$. Исследуем сначала абсолютную сходимость этого ряда. Ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$ расходится, так как $\dfrac{\ln n}{n} > \dfrac{1}{n}$ для всех $n \ge 3$, а гармонический ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится. Проверим выполнение условий признака Лейбница. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Так как $f^{/}(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{/} = \dfrac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x} < 0$ для всех $x \ge 3$, то функция $f(x)$ монотонно убывает, а значит, убывает и последовательность $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Далее, по правилу Лопиталя, имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^{/}}{(x)^{/}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$. Таким образом, выполнены все условия признака Лейбница и рассматриваемый ряд сходится условно.

Степенные ряды. Ряды Тейлора

Задание 7. *Степенные ряды*. Функциональный ряд вида

$$C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n + \cdots, \qquad (5)$$

где a – данное действительное число, C_n – последовательность действительных чисел, называется степенным рядом.

Для фиксированных значений x ряд (5) является числовым рядом, а значит, сходится или расходится. Множество значений x, для которых ряд (5) сходится, называется областью сходимости степенного ряда (5). Для степенного ряда возможны три случая:

а) ряд (5) сходится только для $x = a$ и его сумма равна 0;

б) ряд (5) сходится для любых действительных значений x;

с) существует число $R>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<R$, ряд (5) сходится абсолютно, а для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|>R$, ряд (5) расходится.

Число R называют радиусом сходимости степенного ряда, а интервал $(a-R, a+R)$ называют интервалом сходимости этого ряда. В случае а) полагают $R=0$, а в случае б) полагают $R=+\infty$. Сходимость степенного ряда в точках $x=a\pm R$ (на границе интервала сходимости) проверяется непосредственной подстановкой этих чисел в степенной ряд (5). Так как внутри интервала сходимости степенной ряд сходится абсолютно, то, для определения интервала сходимости, исследуется ряд из абсолютных величин, который является положительным рядом и для его исследования можно применять признаки сходимости положительных рядов.

Пример. Найдём область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(x-1)^n$.

Ряд из абсолютных величин имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}|x-1|^n$. Применив радикальный признак Коши, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n}|x-1|^n} = 2|x-1|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 2|x-1|$. Из признака Коши следует, что ряд из абсолютных величин сходится для тех x, для которых выполняется неравенство $2|x-1|<1$ или $|x-1|<\frac{1}{2}$. Следовательно, радиус сходимости $R=\frac{1}{2}$, а интервалом сходимости является интервал $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$. В точке $x=\frac{1}{2}$ рассматриваемый ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(\frac{1}{2}-1)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Этот знакочередующийся ряд сходится условно, так как ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (это гармонический ряд), а сам ряд сходится по признаку Лейбница
($a_n=\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$, а последовательность $\frac{1}{n}$ убывает). В точке $x=\frac{3}{2}$ данный степенной ряд является числовым рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(\frac{3}{2}-1)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. Следовательно, областью сходимости рассматриваемого степенного ряда является промежуток $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Приведём разложения в ряд Тейлора (степенной ряд) основных элементарных функций и укажем области сходимости соответствующих степенных рядов.

1. $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n, \quad x\in(-1,1)$.

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$

4. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1].$

6. $(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!} x^n + \cdots =$

$= 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1, 1)$, где $\mu \neq 1, 2, 3, \ldots$.

Стандартные разложения 1– 6 позволяют разлагать в ряд Тейлора более сложные функции и находить области сходимости полученных разложений.

Пример. Разложить в ряд Тейлора по степеням x ($a = 0$) функцию $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$ и указать область сходимости этого разложения.

Преобразуем данную функцию: $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{11}{3}\frac{1}{1-3x} = \frac{2}{3}\frac{3x - 1 + \frac{11}{2}}{3x-1} =$ $\frac{2}{3}\left(1 + \frac{11}{2}\frac{1}{3x-1}\right) = \frac{2}{3} - \frac{11}{3}\frac{1}{1-3x}$. Чтобы получить требуемое разложение используем равенство 1, заменив в нём x на $3x$: $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{11}{3}\frac{1}{1-3x} =$ $= \frac{2}{3} - \frac{11}{3}\left(1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \cdots\right) = -3 - 11x - 33x^2 - 99x^3 - \ldots$. Для того чтобы найти область сходимости полученного разложения нужно в неравенство $|x| < 1$ вместо x подставить $3x$: $|3x| < 1$ или $|x| < \frac{1}{3}$.

Пример. Разложить в ряд Тейлора по степеням $x - 2$ функцию $f(x) = \ln x$. С помощью тождественных преобразований и разложения 5 получим: $\ln x = \ln(2 + x - 2) = \ln 2\left(1 + \frac{x-2}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right) =$

$= \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} - \cdots$. Для определения области сходимости полученного разложения имеем неравенство $-1 < \frac{x-2}{2} \leq 1$, которое эквивалентно неравенству $-2 < x - 2 \leq 2$ или $0 < x \leq 4$.

Ряды Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, a+T]$. Система функций

$$\frac{1}{2}, \cos\omega x, \sin\omega x, \cos 2\omega x, \sin 2\omega x, \cdots, \cos n\omega x, \sin n\omega x, \cdots, \text{ где } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

называется основной тригонометрической системой. Легко убедиться в том, что все функции этой системы являются периодическими с наименьшим положительным периодом *T*. Действительно, $\cos n\omega(x+T) =$
$= \cos n(\omega x + \omega T) = \cos(n\omega x + 2n\pi) = \cos n\omega x.$

Рядом Фурье для функции $f(x)$ по основной тригонометрической системе называют функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\,\omega x + b_n \sin n\omega x\right), \tag{6}$$

коэффициенты a_n, b_n которого определяются равенствами

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cos n\omega x\,dx,\ n = 0,1,2,\ldots;\ b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\sin n\omega x\,dx,\ n = 1,2,3,\cdots \tag{7}$$

Определение. Функция $f(x)$ называется кусочно монотонной на промежутке $[a, a+T]$, если этот промежуток конечным числом точек $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ можно разбить на части $[a, c_1), (c_1, c_2), \cdots, (c_n, a+T]$, на каждой из которых функций $f(x)$ будет возрастать или убывать.

Теорема *Дирихле*. Если функция $f(x)$ кусочно монотонна и ограничена на промежутке $[a, a+T]$, тогда ряд Фурье (6) сходится для любого $x \in [a, a+T]$ *к функции* $S(x)$; при этом, если $f(x)$ непрерывна в точке *x*, то $S(x) = f(x)$, если же x_0 является точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, то в этой точке $S(x_0) = \dfrac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$, где $f(x_0+)$, $f(x_0-)$ – правосторонний и левосторонний пределы функции $f(x)$, при $x \to x_0$.

Из этой теоремы видно, что класс функций представимых рядом Фурье гораздо шире, чем класс функций представимых степенным рядом.

Замечание 1. Так как все функции основной тригонометрической системы имеют период *T*, то и частичные суммы ряда Фурье тоже имеют период *T*, то есть $S_n(x+T) = S_n(x)$. Из определения суммы ряда следует, что $S(x+T) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x+T) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, то есть сумма ряда Фурье так же имеет период *T*.

Замечание 2. Если $f(x)$ непрерывна и кусочно монотонна на промежутке $[a, a+T]$, тогда для всех $x \in [a, a+T]$ будет $S(x) = f(x)$ и можно считать, что сумма $S(x)$ ряда Фурье является продолжением функции $f(x)$ по периоду *T* на всю числовую прямую. Если, при этом, выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$, то продолженная функция $f_{\text{T}}(x)$ будет непрерывна на всей числовой прямой, и для всех x будет выполняться равенство $f_{\text{T}}(x)=S(x)$.

Замечание 3. При вычислении коэффициентов ряда Фурье по формулам (7) часто использоваться свойства определённого интеграла от чётной и нечётной функции по симметричному промежутку, а именно: а) если $f(x)$ является нечётной функцией $f(-x)=-f(x)$, тогда $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0$;

б) если $f(x)$ является чётной функцией $f(-x)=f(x)$, тогда $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=$

$= 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$

Пример. Разложить функцию $f(x)=x^2$ в ряд Фурье на промежутке $[-1,1]$.

Очевидно, рассматриваемая функция непрерывна на заданном промежутке, убывает на промежутке $[-1,0)$ и возрастает на промежутке $(0,1]$, а значит, кусочно монотонна на $[-1,1]$. Вычислим коэффициенты Фурье по формулам (7). Имеем: $T=1-(-1)=2, \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$. При $n=0$ из (7) получаем $a_0=\int\limits_{-1}^{1} x^2dx=2\int\limits_{0}^{1} x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}$. Для всех $n=1,2,3,\ldots$ из (7) получаем $a_n=\int\limits_{-1}^{1} x^2\cos n\pi x\,dx=2\int\limits_{0}^{1} x^2\cos n\pi x\,dx=\begin{vmatrix} u=x^2, & du=2xdx \\ dv=\cos n\pi x\,dx, & v=\dfrac{\sin n\pi x}{n\pi}\end{vmatrix}=$

$x^2\dfrac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1-\dfrac{2}{n\pi}\int\limits_0^1 x\sin n\pi x\,dx=$(подстановка 0) $\begin{vmatrix} u=x, & du=dx \\ dv=\sin n\pi x\,dx, & v=-\dfrac{\cos n\pi x}{n\pi}\end{vmatrix}$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[-x\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1+\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^1\cos n\pi x\,dx\right]=-\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos n\pi}{n\pi}+\frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\Big|_0^1\right]=\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^2}.$$

Аналогично, из формул (7) для всех $n=1,2,3,\ldots$ получаем, что $b_n=$ $=\int\limits_{-1}^{1} x^2\sin n\pi x\,dx=0$ (подинтегральная функция является нечётной).

Следовательно, для всех $x\in[-1,1]$ справедливо разложение функции x^2 в ряд Фурье $x^2=\dfrac{1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^n\cos n\pi x}{(n\pi)^2}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cos n\pi x}{n^2}$.

Замечание. С помощью разложения функций в ряд Фурье удаётся вычислить суммы многих сходящихся рядов. Например, положив в последнем разложении $x=0$, получим равенство $0=\frac{1}{3}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, из которого находим, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Часто возникает необходимость разложить функцию, заданную на промежутке $[0,l]$, в ряд Фурье по косинусам или синусам.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[0,l]$. Продолжим её на промежуток $[-l,0)$ чётным образом $g(x)=\begin{cases} f(x), \text{если} x\in[0,l], \\ f(-x), \text{если} x\in[-l,0). \end{cases}$ Отметим, что функция $g(x)$ будет кусочно монотонной и непрерывной на промежутке $[-l,l]$, если $f(x)$ кусочно монотонна и непрерывна на промежутке $[0,l]$. Разложим теперь продолженную функцию $g(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[-l,l]$.

Из равенств (7) следует, что $T=2l, \omega=\frac{2\pi}{2l}=\frac{\pi}{l}$,

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0,\ n=1,2,\ldots,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}g(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=0,1,2,\ldots,$$

так как функция под знаком первого интеграла является нечётной, а функция под знаком второго интеграла является чётной на промежутке $[-l,l]$. Следовательно, разложение чётной на промежутке $[0,l]$ функции в ряд Фурье (в точках непрерывности) по косинусам имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \text{ где } a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=0,1,\ldots$$

Для того чтобы разложить заданную на промежутке $[0,l]$ функцию $f(x)$ в ряд Фурье по синусам доопределим эту функцию на промежуток $[-l,0)$ нечётным образом $g(x)=\begin{cases} f(x), \text{если} x\in[0,l], \\ -f(-x), \text{если} x\in[-l,0). \end{cases}$ Заметим, что функция $g(x)$ будет кусочно монотонной на промежутке $[-l,l]$, если $f(x)$ кусочно монотонна на $[0,l]$ и $g(x)$ будет непрерывной на промежутке $[-l,l]$, если $f(x)$ непрерывна на $[0,l]$ и $f(0)=0$. А теперь разложим нечётную функцию $g(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[-l,l]$. Из формул (7) получаем $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}g(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0$, $n=0,1,\ldots$, так как подинтегральная функция $g(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ является нечётной на промежутке $[-l,l]$, а $b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\ \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$, $n=1,2,\ldots$, так как функция $g(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ является чётной на промежутке $[-l,l]$.

Следовательно, ряд Фурье в разложении функции $f(x)$ на промежутке $[0,l]$ по синусам имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\ \text{где}\ b_n=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,2,\ldots$$

Пример. Пусть требуется разложить в ряд Фурье на промежутке $[0,2)$ функцию $f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\in[0,1],\\ x, \text{ если } x\in(1,2)\end{cases}$ по косинусам, а функцию $g(x)=x-1$ по синусам.

Очевидно, что рассматриваемые функции возрастают и непрерывны на промежутке $[0,2)$, $g(0)\neq 0$. Следовательно, сумма ряда Фурье будет совпадать со значениями функции $f(x)$ на всём промежутке $[0,2)$, а для функции $g(x)$ на всём промежутке, кроме точки $x=0$.

а) Имеем $a_0=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)dx=\int\limits_{0}^{2}f(x)dx=\int\limits_{0}^{1}dx+\int\limits_{1}^{2}xdx=1+\left.\frac{x^2}{2}\right|_{1}^{2}=\frac{5}{2}$.

Для всех $n=1,2,\ldots$ получаем $a_n=\int\limits_{0}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\int\limits_{0}^{1}\cos\frac{n\pi x}{2}dx\ +$ $\int\limits_{1}^{2}x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$ (второй интеграл вычисляем интегрированием по частям) $=$ $\left.\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right|_{0}^{1}+\left(\left.\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2}\right|_{1}^{2}-\frac{2}{n\pi}\int\limits_{1}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+$ $\left.\frac{4}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right|_{1}^{2}=\ \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\ \frac{4}{(n\pi)^2}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right)$. Следовательно, для всех $x\in[0,2)$ справедливо разложение

$$f(x)=\frac{5}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{(n\pi)^2}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right)\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

Заметим, что в последнем равенстве удобно суммировать слагаемые с чётными **и** нечётными номерами отдельно, так как для $n=2k$ будет $\sin\frac{n\pi}{2}=\sin k\pi=0$, $\cos n\pi=1, \cos\frac{n\pi}{2}=\cos k\pi=(-1)^k$, а для $n=2k-1$ будет

$\sin\frac{n\pi}{2}=\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos k\pi=(-1)^{k+1},\cos n\pi=-1,$

$\cos\frac{n\pi}{2}=\cos\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin k\pi=$ 0. С учётом сказанного, наше разложение примет вид

$$f(x)=\frac{5}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^k\right)}{(k\pi)^2}\cos k\pi x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\left((-1)^{k+1}-\frac{1}{(2k-1)\pi}\right)\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}$$

б) Для функции $g(x)=x-1$ и $n=1,2,\ldots$ имеем $b_n=\int_0^2(x-1)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$ (интегрируем по частям) $=-\frac{2}{n\pi}(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}=$ $-\frac{2}{n\pi}\cos n\pi-\frac{2}{n\pi}+\frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2=-\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n+1\right)$. Следовательно, для всех $x\in(0,2)$ разложение функции $x-1$ в ряд Фурье имеет вид

$$x-1=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n+1\right)}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Так как в полученном разложении слагаемые с нечётными номерами равны 0, то, положив $n=2k$, окончательно получим

$$x-1=-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin k\pi x.$$

Дифференциальные уравнения первого и второго порядков

Задание 8. В этом задании требуется найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения либо решить задачу Коши. Определим сначала эти понятия.

Определение. Обыкновенным дифференциальным уравнением называется функциональное равенство, связывающее независимую переменную $x\in(a,b)$ функцию $y(x)$ и её производные $y^{|},y^{||}$, …; порядком дифференциального уравнения называют порядок старшей производной входящей в уравнение.

Общее дифференциальное уравнение порядка n имеет вид

$$F(x,y,y^{|},\ldots,y^{(n)})=0. \qquad (7)$$

Определение. Функция $y=\varphi(x)$ называется решением уравнения (7) на интервале (a,b), если $\varphi(x)$ непрерывна на этом интервале вместе со своими производными до порядка n включительно и для любых $x\in(a,b)$ выполняется равенство $F(x,\varphi(x),\varphi^{/}(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x))=0$.

Определение. Функция $y=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$ называется общим решением уравнения (7), если: 1) функция $\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$ является решением этого уравнения при любых значениях произвольных постоянных $C_1,\ldots,C_n$; 2) для любого решения $y=g(x)$ уравнения (7) существуют числа $C_1^0,\ldots,C_n^0$, для которых $g(x)=\varphi(x,C_1^0,\ldots,C_n^0)$.

Из этого определения следует, что общее решение уравнения (7) содержит столько произвольных постоянных каков порядок этого уравнения.

Определение. Пусть $x_0,y_0,y_1,\ldots,y_{n-1}$ заданные действительные числа. Задачей Коши называют задачу отыскания решения $y=\varphi(x)$ уравнения (7), которое удовлетворяет начальным условиям $\varphi(x_0)=y_0, \varphi^{|}(x_0)=y_1,\ldots,$ $\varphi^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$; числа $x_0,y_0,y_1,\ldots,y_{n-1}$ называются начальными данными.

Далее рассмотрим основные типы дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Уравнение вида $f(x)dx+g(y)dy=0$ называют уравнением с *разделёнными переменными* в форме дифференциалов.

Чтобы найти общее решение необходимо проинтегрировать это уравнение $\int f(x)dx+\int g(y)dy=C$, где C – произвольная постоянная, а затем разрешить полученное равенство относительно y.

Пример. Найдём общее решение уравнения $2xdx-e^{2y}dy=0$. Интегрируя это равенство, получим $\int 2xdx-\int e^{2y}dy=C$ или $x^2-\frac{1}{2}e^{2y}=C$. Разрешим последнее равенство относительно y: $e^{2y}=2x^2-2C=2x^2-C_1$, где $C_1=2C$, $2y=\ln(2x^2-C_1)$, $y=\frac{1}{2}\ln(2x^2-C_1)$– общее решение рассматриваемого уравнения.

2. Дифференциальное уравнение вида

$$y^{/}=f(x)g(y) \qquad (8)$$

называют уравнением с *разделяющимися переменными*.

Для отыскания общего решения этого уравнения разделим переменные: заменим $y^{|}$ на $\frac{dy}{dx}$, затем, умножив уравнение на dx и поделив на

$g(y)$, получим уравнение $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ или $f(x)dx - \frac{dy}{g(y)} = 0$. Интегрируя последнее уравнение, которое является уравнением с разделёнными переменными, получим общий интеграл $\int f(x)dx - \int \frac{dy}{g(y)} = C$.

Пример. Решить задачу Коши для уравнения $y' = e^{x+y}$ с начальным условием $y(0) = 0$.

Имеем $y' = e^x e^y$ или $\frac{dy}{dx} = e^x e^y$. Разделив переменные, получим $\frac{dy}{e^y} = e^x dx$ или $e^x dx - e^{-y} dy = 0$. Интегрируя последнее уравнение, получим $\int e^x dx - \int e^{-y} dy = C$ или $e^x + e^{-y} = C$. Разрешив последнее равенство относительно y, получим $e^{-y} = C - e^x$, $-y = \ln(C - e^x)$, $y = -\ln(C - e^x)$ – общее решение. Используя начальное условие $y(0) = 0$, получим $0 = -\ln(C - 1)$, $C - 1 = 1, C = 2$. Следовательно, функция $y = -\ln(2 - e^x)$ является решением рассматриваемой задачи Коши.

Замечание. Часто уравнение с разделяющимися переменными записывают в форме дифференциалов

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0. \tag{9}$$

Это уравнение приводится к уравнению с разделёнными переменными делением на функцию $f_2(x)g_1(y)dx$:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(x)}{f_1(x)}dy = 0.$$

Пример. Найти общее решение уравнения с разделяющимися переменными $x(1 + y^2)dx + (1 + x^2)ydy = 0.$

Разделив данное уравнение на $(1 + y^2)(1 + x^2)$, получим уравнение с разделёнными переменными $\frac{xdx}{1 + x^2} + \frac{ydy}{1 + y^2} = 0$. Интегрируем последнее равенство $\int \frac{xdx}{1 + x^2} + \int \frac{ydy}{1 + y^2} = C$, $\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = C$ или $\ln(1 + x^2) + \ln(1 + y^2) = 2C = \ln C_1$, где $C_1 > 0$, $(1 + x^2)(1 + y^2) = C_1$. Разрешим последнее равенство относительно y: $1 + y^2 = \frac{C_1}{1 + x^2}$, $y = \pm\sqrt{\frac{C_1}{1 + x^2} - 1}$ – общее решение рассматриваемого уравнения.

3. *Однородное уравнение.*

Определение. Функция $f(x,y)$ называется однородной нулевой степени, если для любого числа $t>0$ выполняется равенство $f(tx,ty)$ = $f(x,y)$. Дифференциальное уравнение вида $y^{|}=f(x,y)$ называется однородным, если функция $f(x,y)$ однородна нулевой степени.

Так как в однородном уравнении функция $f(x,y)$ является однородной нулевой степени, то $f(x,y)$ = $f(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x}) = f\left(1,\frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ и однородное уравнение всегда можно привести к виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{10}$$

Уравнение (10) заменой $z(x)=\frac{y}{x}$ или $y=xz$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, из формулы замены получаем $y'=z+xz'$, а уравнение (10) примет вид $z+xz'=\varphi(z)$ или $z'=\frac{\varphi(z)-z}{x}$ – уравнение с разделяющимися переменными. Найдя общее решение $z=g(x,C)$ полученного уравнения с разделяющимися переменными, из формулы замены найдём общее решение однородного уравнения (10) $y=xz=xg(x,C)$.

Пример. Найдём общее решение уравнения $y'=\frac{x^2+y^2}{xy}$.

После преобразования правой части данного уравнения $y'=\frac{x^2+y^2}{xy}$ = $\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ видно, что данное уравнение $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$ является однородным. После замены $y=xz$, $y'=z+xz'$ получим уравнение с разделяющимися переменными $z+xz'=z+\frac{1}{z}$ или $z'=\frac{1}{xz}$. Разделим переменные: $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{xz}$, $zdz=\frac{dx}{x}$, $\frac{dx}{x}-zdz=0$. Интегрируя последнее равенство, получим $\int\frac{dx}{x}-\int z\,dz=C$ или $\ln|x|-\frac{1}{2}z^2=C$. Разрешим последнее равенство относительно z: $\frac{1}{2}z^2=\ln|x|-C$, $z^2=2\ln|x|-2C$ = $z^2=2\ln|x|-C_1$,

$z = \pm\sqrt{2\ln|x| - C_1}$. Из формулы замены получаем теперь общее решение исходного уравнения $y = xz = z = \pm x\sqrt{2\ln|x| - C_1}$.

4. *Линейным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{11}$$

где $p(x), q(x)$ – заданные функции.

Линейное уравнение (11) приводится к уравнению вида $z' = f(x)$ следующей заменой $y = z(x)e^{-\int p(x)dx}$, где $z(x)$ является новой искомой функцией.

Пример. Решить задачу Коши для уравнения $y' + y\cos x = \cos x$ с начальным условием $y(0) = 1$.

Произведём в данном уравнении замену $y = z(x)e^{-\int \cos x dx} = ze^{-\sin x}$. Для новой искомой функции $z(x)$ получим уравнение $z'e^{-\sin x} - ze^{-\sin x}\cos x + ze^{-\sin x}\cos x = \cos x$. После сокращения второго и третьего слагаемых в левой части последнего равенства, получим уравнение $z'e^{-\sin x} = \cos x$ или $z' = e^{\sin x}\cos x$. Следовательно, $z = \int e^{\sin x}\cos x dx = e^{\sin x} + C$, то есть общее решение данного уравнения $y = ze^{-\sin x} = \left(e^{\sin x} + C\right)e^{-\sin x} = 1 + Ce^{-\sin x}$. Для того, чтобы найти решение задачи Коши, подставим в общее решение $y = 1, x = 0$ и получим 1= 1 + C, $C = 0$. Из общего решения с $C = 0$ получаем решение задачи Коши $y = 1$.

5. *Уравнением Бернулли* называют уравнение следующего вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^k,\ k \neq 0, k \neq 1. \tag{12}$$

Уравнение (11) заменой $y = z(x)e^{-\int p(x)dx}$, приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример. Найти общее решение уравнения $y' - 3x^2y = x^4e^{\frac{x^3}{2}}\sqrt{y}$.

Это уравнение является уравнением Бернулли. Произведя в этом уравнении замену $y = z(x)e^{-\int(-3x^2)dx} = ze^{x^3}$, $y' = z'e^{x^3} + ze^{x^3}3x^2$, получим уравнение $z'e^{x^3} + ze^{x^3}3x^2 - 3x^2ze^{x^3} = x^4e^{\frac{x^3}{2}}\sqrt{z}e^{\frac{x^3}{2}}$ или $z'e^{x^3} = x^4e^{x^3}\sqrt{z}$, $z' = x^4\sqrt{z}$ – уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные: $\frac{dz}{dx} = x^4\sqrt{z}$, $\frac{dz}{\sqrt{z}} = x^4dx$, $\frac{dz}{\sqrt{z}} - x^4dx = 0$. Интегрируя последнее равенство, получаем $\int\frac{dz}{\sqrt{z}} - \int x^4dx = C$, $2\sqrt{z} - \frac{x^5}{5} = C$, $\sqrt{z} = \frac{x^5}{10} + C_1$,

$z=\left(\frac{x^5}{10}+C_1\right)^2$. Из формулы замены находим теперь, что $y=ze^{x^3}=e^{x^3}+\left(\frac{x^5}{10}+C_1\right)^2$ – общее решение данного уравнения.

Линейные дифференциальные уравнения более высокого порядка

Уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}y^{|}+a_ny=f(x), \qquad (13)$$

где $a_1,a_2,\ldots,a_n$ – данные действительные числа, $f(x)$ – данная функция, называют линейным дифференциальным уравнением порядка n с постоянными коэффициентами. Если в уравнении (13) $f(x)\equiv 0$, тогда это уравнение называется однородным и имеет вид

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}y^{|}+a_ny=0. \qquad (14)$$

Рассмотрим функцию $y=e^{\lambda x}$. Подставив эту функцию в уравнение (14), получим равенство $e^{\lambda x}\left(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n\right)=0$, из которого видно, что функцию $y=e^{\lambda x}$ является решением однородного уравнения (14) тогда и только тогда когда число λ является решением алгебраического уравнения

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \qquad (15)$$

Уравнение (15) называется характеристическим уравнением, соответствующим уравнениям (13), (14).

Определение. Система n линейно независимых решений однородного уравнения (14) называется фундаментальной системой решений этого уравнения. Отметим, что такая система всегда существует и общие решения уравнений (13), (14) определяются фундаментальной системой решений.

Теорема. Пусть функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (14). Тогда: 1) функция $y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x)$, где $C_1,C_2,\ldots,C_n$ – произвольные постоянные, является общим решением однородного уравнения (14); 2) функция $y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x)+\psi(x)$, где $\psi(x)$ – частное решение неоднородного уравнения (13), является общим решением уравнения (13).

Для построения фундаментальной системы решений сначала находятся все корни характеристического уравнения, которые могут быть двух типов: 1) действительные корни кратности k (k=1,2,…); 2) комплексные корни кратности k (k=1,2,…). Если λ действительный корень характеристического уравнения кратности k, тогда k функций $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ включаются в фундаментальную систему. Если комплексное число $\lambda = a + bi$ является корнем кратности k характеристического уравнения, тогда и комплексно сопряжённое к нему число $\overline{\lambda} = a - bi$ также будет корнем характеристического уравнения кратности k (это следует из того, что коэффициенты уравнения (15) являются действительными числами). Этой паре комплексно сопряжённых корней соответствует $2k$ действительных решений однородного уравнения (14) вида $e^{ax}\sin bx, e^{ax}\cos bx$, $xe^{ax}\sin bx, xe^{ax}\cos bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\sin bx, x^{k-1}e^{ax}\cos bx$, которые также включаются в фундаментальную систему решений. Так как полином степени n имеет ровно n комплексных корней с учётом кратности, то построенная фундаментальная система будет содержать ровно n линейно независимых решений однородного уравнения (14).

Рассмотрим теперь более подробно случай уравнений второго порядка, которые чаще встречаются в приложениях. Уравнения (13),(14) в этом случае имеют вид

$$y'' + by' + cy = f(x), \quad y'' + by' + cy = 0, \tag{16}$$

а характеристическое уравнение является квадратным уравнением $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Возможны три случая.

1. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня λ_1, λ_2, то есть дискриминант этого уравнения $D = b^2 - 4c > 0$. В этом случае функции $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ образуют фундаментальную систему решений, а функция $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ является общим решением однородного уравнения (16).

Пример. Найдём общее решение уравнения $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Данному уравнению соответствует характеристическое уравнение $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, которое имеет два различных действительных корня $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$. Следовательно, $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$ – общее решение.

2. Характеристическое уравнение имеет один действительный корень λ кратности 2, то есть дискриминант этого уравнения $D = b^2 - 4c = 0$. В этом случае функции $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$ образуют фундаментальную систему решений, а функция $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$ является общим решением однородного уравнения (16).

Пример. Найдём общее решение уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Данному уравнению соответствует характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, которое имеет корень $\lambda = 3$ кратности 2. Следовательно, $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ – общее решение.

3. Характеристическое уравнение имеет пару комплексно сопряжённых корней $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$, то есть дискриминант этого уравнения $D = b^2 - 4c < 0$. В этом случае действительные функции $e^{ax}\sin bx, e^{ax}\cos bx$ образуют фундаментальную систему решений, а функция $y = C_1 e^{ax}\sin bx + C_2 e^{ax}\cos bx$ является общим решением однородного уравнения (16).

Пример. Найдём общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$. Данному уравнению соответствует характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$, которое имеет два комплексно сопряжённых корня $\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$. Следовательно, $y = C_1 e^{2x}\sin 3x + C_2 e^{2x}\cos 3x$ – общее решение.

Отыскание общего решения неоднородного уравнения

1. *Уравнение со специальной правой частью первого типа.*

Теорема. Пусть функция $f(x)$ в правой части неоднородного уравнения (13) имеет вид $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, где $P_n(x)$ – полином степени *n*.
Тогда уравнение (13) имеет частное решение вида $\psi(x) = Q_n(x)x^k e^{ax}$, где $Q_n(x)$ – полином степени *n* с неопределёнными коэффициентами (эти коэффициенты находят подстановкой функции $\psi(x)$ в уравнение (13)), *k*– кратность числа *a* как корня характеристического уравнения (если *a* не является корнем этого уравнения, то *k* = 0).

Пример. Найдём общее решение неоднородного уравнения второго порядка $y'' - 4y' + 3y = (2x^2 - 1)e^{3x}$.

Это уравнение со специальной правой частью, которая содержит полином второй степени $2x^2 - 1$ и *a* = 3. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ имеет два действительных корня $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Следовательно, $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ – общее решение однородного уравнения, а частное решение неоднородного уравнения нужно искать в следующем виде $\psi(x) = (bx^2 + cx + d)xe^{3x} = (bx^3 + cx^2 + dx)e^{3x}$ (в рассматриваемом случае *k* = 1, так как число *a* = 3 является корнем характеристического уравнения кратности 1). Вычислим производные $\psi'(x) = (3bx^2 + 2cx + d)e^{3x} + (bx^3 + cx^2 + dx)3e^{3x}$, $\psi''(x) = (6bx + 2c)e^{3x} + (3bx^2 + 2cx + d)3e^{3x} + (3bx^2 + 2cx + d)3e^{3x} + (bx^3 + cx^2 + dx)9e^{3x}$. Заменив в данном уравнении

$y, y^{/}, y^{//}$ функциями $\psi, \psi^{/}, \psi^{//}$ и сократив на e^{3x}, получим равенство двух полиномов $6bx + 2c$ + $(3bx^2 + 2cx + d)3$ + $(3bx^2 + 2cx + d)3$ + $(bx^3 + cx^2 + dx)9 - 4(3bx^2 + 2cx + d) - 4(bx^3 + cx^2 + dx)3 + 3(bx^3 + cx^2 + dx) =$ $2x^2 - 1$. Приведя в последнем равенстве подобные члены, получим $(6b + 8c)x^2 + (6b + 4c)x + 2c + 2d = 2x^2 - 1$. Для определения коэффициентов b, c, d приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x, и получаем систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 6b = 2, \\ 6b + 4c = 0, \\ 2c + 2d = -1, \end{cases}$$

из которой находим $b = \frac{1}{3}, c = -\frac{1}{2}, d = 0$. Следовательно, частное решение неоднородного уравнения $\psi(x) = (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2)e^{3x}$, а общее решение рассматриваемого уравнения $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2)e^{3x}$.

Пример. Найдём общее решение уравнения $y^{//} - 4y^{/} + 4y = e^{2x}$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ имеет действительный корень $\lambda = 2$ кратности 2. Следовательно, $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$ – общее решение однородного уравнения, а частное решение неоднородного уравнения нужно искать в виде $\psi(x) = Ax^2 e^{2x}$ (в этом случае $k = 2$, так как число $a = 2$ является корнем характеристического уравнения кратности 2). Имеем $\psi^{/}(x) = 2Axe^{2x} + 2Ax^2 e^{2x}$, $\psi^{//}(x) = 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Ax^2 e^{2x}$. Подставив $\psi, \psi^{/}, \psi^{//}$ в уравнение, и сократив на e^{2x}, получим равенство $2A + 4Ax + 4Ax + 4Ax^2 - 8Ax - 8Ax^2 + 4Ax^2 = 1$ или, после привидения подобных членов, $2A = 1$, $A = \frac{1}{2}$. Следовательно, частное решение неоднородного уравнения $\psi(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$, а общее решение рассматриваемого неоднородного уравнения $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$.

2. *Уравнение со специальной правой частью второго типа.*

Теорема. Пусть функция $f(x)$ в правой части неоднородного уравнения (13) имеет вид $f(x) = \left(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right)e^{ax}$, где $P_n(x), Q_m(x)$ – полиномы степени n и m соответственно. Тогда уравнение (13) имеет частное решение вида $\psi(x) = \left(M_p(x)\cos bx + N_p(x)\sin bx\right)x^k e^{ax}$, где $M_p(x), N_p(x)$ – полиномы степени $p = \max\{n, m\}$ с неопределёнными коэффициентами (эти коэффициенты находят подстановкой функции $\psi(x)$

в уравнение (13)), k– кратность комплексного числа $\lambda = a + bi$ как корня характеристического уравнения (если λ не является корнем этого уравнения, то $k = 0$).

Пример. Найдём общее решение неоднородного уравнения $y'' - 2y' + 2y = (2\cos x - x\sin x)e^x$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ имеет пару комплексно сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ кратности 1. Следовательно, $y = e^x\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right)$ – общее решение однородного уравнения, а частное решение неоднородного уравнения нужно искать в виде $\psi(x) = ((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)xe^x$ (в этом случае $P_n(x) = 2, Q_m(x) = x, n = 0$, $m = 1$, $p = \max\{0,1\} = 1$, $k = 1$, так как $a = 1$, $b = 1$, а комплексное число $\lambda = a + bi = 1 + i$ является корнем характеристического уравнения кратности 1). Подставив ψ, ψ', ψ'' в уравнение, и сократив на e^x, получим равенство $(4Cx + 2A + 2D)\cos x + (-4Ax - 2B + 2C)\sin x = 2\cos x - x\sin x$ или $(2A + 2D - 2)\cos x + 4Cx\cos x + (-2B + 2C)\sin x + (1 - 4A)x\sin x = 0$. Так как функции $\cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x$ линейно независимы, то их линейная комбинация может быть равна 0 только с нулевыми коэффициентами. Следовательно, неизвестные A, B, C, D удовлетворяют системе

$$\begin{cases} A + D - 1 = 0, \\ C = 0, \\ -B + C = 0, \\ 1 - 4A = 0, \end{cases}$$

из которой находим $A = \frac{1}{4}, B = 0, C = 0, D = \frac{3}{4}$. Таким образом, функция $y = e^x\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + \left(\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{3}{4}x\sin x\right)e^x$ – общее решение рассматриваемого уравнения.

Пример. Найдём общее решение уравнения $y'' + y = 3\cos 5x$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет пару комплексно сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \pm i$ кратности 1. Следовательно, $y = C_1\cos x + C_2\sin x$ – общее решение однородного уравнения, а частное решение неоднородного уравнения нужно искать в виде $\psi(x) = A\cos 5x + B\sin 5x$ (в этом случае $P_n(x) = 3, Q_m(x) = 0, n = 0$, $m = 0$, $p = \max\{0,0\} = 0$, $k = 0$, так как $a = 0$, $b = 5$, а комплексное число $\lambda = a + bi = 5i$ не является корнем характеристического уравнения). Имеем, $\psi'(x) = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x$, $\psi''(x) = -25A\cos 5x - 25B\sin 5x$ и после подстановки ψ, ψ', ψ'' в уравнение, получим равенство

$-24A\cos 5x - 24B\sin 5x = 3\cos 5x$, из которого следует, что $-24A = 3$, $-24B = 0$ или $A = -\frac{1}{8}, B = 0$. Следовательно, $\psi(x) = -\frac{1}{8}\cos 5x$ – частное решение данного уравнения, а $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{8}\cos 5x$ – общее решение этого уравнения.

3. *Метод вариации произвольных постоянных.*

Этот метод является наиболее общим методом отыскания частного решения неоднородного уравнения. Пусть функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (14). Частное решение неоднородного уравнения (13) ищется в виде $\psi(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n(x)$, а неизвестные функции $C_1(x) + \cdots + C_n(x)$ находят из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1^{/}(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n^{/}(x)\varphi_n(x) = 0, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1^{/}(x)\varphi_1^{n-2}(x) + \cdots + C_n^{/}(x)\varphi_n^{n-2}(x) = 0, \\ C_1^{/}(x)\varphi_1^{n-1}(x) + \cdots + C_n^{/}(x)\varphi_n^{n-1}(x) = f(x). \end{cases} \tag{17}$$

В частности, система (17) для уравнения второго порядка (16) будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} C_1^{/}(x)\varphi_1(x) + C_2^{/}(x)\varphi_2(x) = 0, \\ C_1^{/}(x)\varphi_1^{/}(x) + C_2^{/}(x)\varphi_2^{/}(x) = f(x). \end{cases}$$

Пример. Найдём общее решение уравнения $y^{//} + y = \sin^2 x.$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет пару комплексно сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \pm i$ кратности 1. Следовательно, $\varphi_1(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) = \sin x$ – фундаментальная система решений однородного уравнения, а частное решение неоднородного уравнения нужно искать в виде $\psi(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Система (17) для рассматриваемого уравнения имеет вид $\begin{cases} C_1^{/}(x)\cos x + C_2^{/}(x)\sin x = 0, \\ -C_1^{/}(x)\sin x + C_2^{/}(x)\cos x = \sin^2 x. \end{cases}$ Умножив первое уравнение этой системы на $\sin x$, а второе уравнение на $\cos x$, и сложив полученные равенства имеем $C_2^{/}(x)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = \sin^2 x\cos x$ или $C_2^{/}(x) = \sin^2 x\cos x$. Из первого уравнения системы находим $C_1^{/}(x) = -C_2^{/}(x)tgx = -\sin^2 x\cos x\, tgx = -\sin^3 x$. Интегрируя функции $C_1^{/}(x), C_2^{/}(x)$, получим $C_1(x) = \int\left(-\sin^3 x\right)dx = \int \sin^2 x d(\cos x) = \int (1-\cos^2 x)d(\cos x) = \cos x - \frac{\cos^3 x}{3}$, $C_2(x) = \int\left(\sin^2 x\cos x\right)dx =$

$\int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3}$. Следовательно, частное решение $\psi(x) = \left(\cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{3}\right) + \left(\frac{\sin^4 x}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \cos^2 x\right)$, а общее решение данного уравнения $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}\left(1 + \cos^2 x\right)$.

ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 4

Задание 1. Решите задачу Коши для данных дифференциальных уравнений или систем с помощью преобразования Лапласа.

0. $y'' + 9y = 6e^{3t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

1. $y'' - 4y' + 5y = 2t^2 e^t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

2. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

3. $y'' + y = 2\cos t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4. $y'' + 4y = \sin t$, $y(0) = y'(0) = 1$.

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4(x + y), \\ \dfrac{dx}{dt} + 4\dfrac{dy}{dt} = -4y, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = x + y, \end{cases}$ $x(0) = -1$, $y(0) = 0$.

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y, \end{cases}$ $x(0) = 6$, $y(0) = -2$.

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2t, \end{cases}$ $x(0) = -\dfrac{7}{9},\ y(0) = -\dfrac{5}{9}$.

Задание 2. Решите данные задачи при помощи формулы классической вероятности.

0. В записанном номере телефона стёрлись три последние цифры. В предположении, что все комбинации стёршихся цифр равновероятны, найти вероятности следующих событий: A = {стёрлись различные цифры, отличные от 1,2,6}, B = {стёрлись одинаковые цифры}, C = {две из стёршихся цифр совпадают}.

1. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Имея запас из 4 снарядов, стреляют по цели до первого попадания. Найти вероятности следующих событий: A = {произвели ровно 3 выстрела}, B = {произвели не менее двух выстрелов}, C = {израсходовали все снаряды}.

2. Номер случайного автомобиля в большом городе имеет 4 цифры. Найти вероятности событий: A = {все цифры номера различны}, B = {только две цифры номера одинаковы}, C = {номер имеет хотя бы две одинаковые цифры}.

3. В урне содержится 4 белых, 3 чёрных и 2 красных шара. Два игрока поочерёдно вытаскивают по одному шару без возвращения. Выигрывает тот игрок, который первым вытащит белый шар. Если вытаскивается красный шар, то объявляется ничья. Найти вероятности событий: A = {выиграл игрок, начавший игру}, B = {выиграл второй участник}, C = {игра закончилась вничью}.

4. Студент выучил 10 из 20 экзаменационных вопросов. Билет содержит два вопроса. Найти вероятности событий: A = {студент знает оба вопроса}, B = {студент не знает оба вопроса}, C = {студент знает хотя бы один вопрос}.

5. Из колоды в 36 карт вытащили наудачу 4 карты. Найти вероятности событий: A = {все карты разной масти}, B = {хотя бы 2 карты одной масти}, C = {среди выбранных карт ровно 2 туза}.

6. В ящике находятся билеты с номерами 1, 2, 3, 4. Из ящика, по одному, вытащили все билеты без возвращения. Найти вероятности следующих событий: A = {ровно у двух билетов порядковый номер совпадает с собственным}, B = {хотя бы у одного билета порядковый номер совпал с собственным}, C = {не менее чем у трёх билетов порядковый номер совпал с собственным}.

7. В лотерее из 20 билетов 10 выигрышных. Три человека приобрели по одному билету. Найти вероятности событий A = {никто не выиграл}, B = {хотя бы один билет выиграл}, C = {выиграл только один билет}.

8. Вероятности попадания в цель при одном выстреле у трех стрелков равны 0,9; 0,8; и 0,7. Все стрелки произвели по одному выстрелу. Найти вероятности событий: A = {только один стрелок поразил цель}, B = {все три стрелка поразили цель}, C = {хотя бы один стрелок поразил цель}.

9. Из урны, содержащей 5 белых, 3 чёрных и 2 красных шара, вытащили наугад 3 шара. Найти вероятности событий: A = {вытащили только 1 белый шар}, B = {вытащили хотя бы 1 красный шар}, C = {вытащили разноцветные шары}.

Задание 3. Решите данные задачи с помощью формул полной вероятности или Байеса.

0. Больному с четвёртой группой крови можно перелить кровь любой группы; больному со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; больному с первой группой крови можно переливать только кровь первой группы. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора, если среди населения 33%; 37%; 22%; 8% имеют соответственно первую, вторую, третью и четвёртую группы крови.

1. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулёзом у больного туберкулёзом равна 0,9; вероятность принять здорового человека за больного равна 0,01; доля больных туберкулёзом по отношению ко всему населению равна 0,001. Найти вероятность того, что здоровый человек признан больным при обследовании.

2. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле у трёх стрелков равны 0,6; 0,7; и 0,8. Один из трёх стрелков произвёл два выстрела. Найти вероятность того, что в мишени будет две пробоины.

3. Имеется 10 одинаковых урн. Известно, что в семи урнах находится по 3 белых и 5 чёрных шара, а в трёх урнах – по 2 белых и 6 чёрных шара. Из случайно выбранной урны вытащили 1 шар. Найти вероятность того, что этот шар вытащили из урны, содержащей 3 белых 5 чёрных шара, если извлечённый шар оказался белым.

4. Из первой урны, содержащей 3 белых и 4 чёрных шара, переложили наудачу 2 шара во вторую урну, содержащую 5 белых и 3 чёрных шара. Далее, из второй урны наугад вытащили 2 шара. Найти вероятность того, что из второй урны извлекли шары разного цвета.

5. Из первой урны, содержащей 2 белых и 3 чёрных шара, переложили наудачу 2 шара во вторую урну, содержащую 3 белых и 2 чёрных шара.

Далее, из второй урны наугад вытащили 2 шара. Найти вероятность того, что из первой во вторую урну переложили 2 белых шара, если извлечённые из второй урны шары оказались оба чёрными.

6. Магазин получил партию одинаковых изделий трёх фабрик. Изделия этих фабрик составляют 20%, 30% и 50% всей партии. В общем объёме продукции этих фабрик брак составляет, соответственно, 2%, 3% и 5%. Найти вероятность того, что купленное в этом магазине изделие будет бракованным.

7. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для стрелков А, В равны 0,6 и 0,8. Один из стрелков произвел два выстрела в мишень. Найти вероятность того, что стрелял стрелок А, если в мишени обнаружена одна пробоина.

8. Из одной колоды в 36 карт наугад переложили 1 карту в такую же колоду из 36 карт. Затем из второй колоды наугад вытащили 2 карты. Найти вероятность того, что из второй колоды извлекли 2 трефы.

9. В двух одинаковых коробках находятся лотерейные билеты. В одной коробке 20% выигрышных билетов, а во второй – 30%. Из наугад взятой коробки вытащили 1 билет. Найти вероятность того, что этот билет вытащили из коробки с 20% выигрышных билетов, если он оказался выигрышным.

Задание 4. Решите следующие задания при помощи формулы Бернулли либо (если число испытаний велико) при помощи локальной и интегральной теорем Муавра ─ Лапласа.

0. Найти вероятность того, что пятизначный номер случайного автомобиля содержит не менее трёх пятёрок.

1. Игральная кость бросается пять раз. Найти вероятность того, что цифра 6 выпадет не менее одного и не более трёх раз.

2. Вероятность осуществления события А в каждом из независимых испытаний равна 0,1. Найти вероятность того, что в 1000 испытаниях событие А произойдёт не менее 100 и не более 110 раз.

3. Вероятность искажения одного знака при передаче сообщений равна 0,005. Найти вероятность того, что в сообщении из 1000 знаков будет искажено не более трёх знаков.

4. Вероятность искажения одного знака при передаче сообщений равна 0,07. Найти вероятность того, что в сообщении из 1400 знаков будет искажено ровно 28 знаков.

5. Вероятность брака при изготовлении кинескопов равна 0,1. Найти вероятность того, что при проверке 600 кинескопов будет забраковано не более 65.

6. Вероятность выхода из строя конденсатора за время работы Т равна 0.25. Найти вероятность того, что за время работы Т из 200 конденсаторов выйдет из строя не менее 50.

7. При штамповке изделий из пластмассы на каждые 10 изделий приходится два дефектных. Найти вероятность того, что из 100 изготовленных изделий число стандартных изделий будет не менее 70 и не более 95.

8. Найти вероятность того, что пятизначный номер случайного автомобиля содержит хотя бы одну цифру 2.

9. Вероятность осуществления события А в каждом из независимых испытаний равна 0,04. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие А произойдёт ровно 5 раз.

Задание 5. Из урны, содержащей m белых и n чёрных шаров, извлекли наугад k шаров. Случайная величина Х — число извлечённых белых шаров. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины Х; 2) вычислить математическое ожидание и дисперсию Х; 3) вычислить Р $\{X \le k-1\}$.

0) $m = 5,\ n = 4,\ k = 2$;

1) $m = 4,\ n = 3,\ k = 3$;

2) $m = 6,\ n = 2,\ k = 3$;

3) $m = 5,\ n = 4,\ k = 2$;

4) $m = 3,\ n = 4,\ k = 2$;

5) $m = 6,\ n = 5,\ k = 4$;

6) $m = 5,\ n = 4,\ k = 3$;

7) $m = 5,\ n = 5,\ k = 4$;

8) $m = 6,\ n = 4,\ k = 3$;

9) $m = 7,\ n = 4,\ k = 2$.

Задание 6. Заданы функция распределения вероятностей $F(x)$ непрерывной случайной величины X либо плотность $f(x)$ распределения вероятностей этой случайной величины. Требуется: 1) найти неизвестный параметр a; 2) найти $f(x)$ либо $F(x)$; 3) вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

0. $F(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x \le 1, \\ \dfrac{x^2 - x}{a} \ \textit{при} \ 1 < x \le 2, \\ 1 \ \textit{при} \ x > 2. \end{cases}$ 1. $F(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{a} \ \textit{при} \ 0 < x \le 1, \\ 1 \ \textit{при} \ x > 1. \end{cases}$

2. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x\le 0, \\ ax^2 \text{ } при \text{ } 0<x\le 3, \\ 1 \quad при \text{ } x>3. \end{cases}$ 3. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x\le 0, \\ 3x^2+ax \text{ } при \text{ } 0<x\le \frac{1}{3}, \\ 1 \quad при \text{ } x>\frac{1}{3}. \end{cases}$

4. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x\le 0, \\ ax^3 \text{ } при \text{ } 0<x\le 1, \\ 1 \quad при \text{ } x>1. \end{cases}$ 5) $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x\le 1, \\ a(1-x^2) \text{ } при \text{ } 1<x\le 3, \\ 1 \quad при \text{ } x>3. \end{cases}$

6. $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x\le -\frac{\pi}{2}, \\ a\cos x \text{ } при \text{ } -\frac{\pi}{2}<x\le 0, \\ 1 \quad при \text{ } x>0. \end{cases}$ 7. $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x\le 0, \\ ae^{-x} \text{ } при \text{ } x>0. \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x\notin[-1,1], \\ x^2-a \text{ } при \text{ } x\in[-1,1]. \end{cases}$ 9. $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x\notin[0,1], \\ ax^2 \text{ } при \text{ } x\in[0,1]. \end{cases}$

Задание 7. Совместное распределение дискретных случайных величин X,Y задано указанием их возможных значений и вероятностей $P_{ij}=P\{X=x_i; Y=y_j\}$. Требуется: 1) составить законы распределения случайных величин X и Y; 2) вычислить математические ожидания суммы $X + Y$ и произведения $X\ Y$ этих случайных величин; 3) вычислить коэффициент корреляции.

0. $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=1$; $y_1=-3$, $y_2=-2$, $y_3=1$; (p_{ij}) $=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0.05 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

1. $x_1=-3$, $x_2=-2$, $x_3=1$; $y_1=-3$, $y_2=-1$, $y_3=0$; (p_{ij}) $=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}15 \\ 0.05 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

2. $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; $y_1 = -3$, $y_2 = 2$, $y_3 = 1$; $\left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0.15 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

3. $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$; $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 4$; $\left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}06 & 0{,}15 & 0{,}04 \\ 0.05 & 0{,}15 & 0{,}25 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}05 \end{pmatrix}$.

4. $x_1 = -5$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$; $y_1 = -3$, $y_2 = -1$, $y_3 = 0$; $\left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0.1 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

5. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$; $y_1 = -3$, $y_2 = -2$, $y_3 = -1$; $\left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}13 & 0{,}15 & 0{,}07 \\ 0.08 & 0{,}15 & 0{,}12 \\ 0{,}14 & 0{,}06 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

6. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$; $y_1 = -4$, $y_2 = -2$, $y_3 = 2$; $\left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0.05 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}13 & 0{,}1 & 0{,}07 \end{pmatrix}$.

7. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$; $y_1 = -4$, $y_2 = -1$, $y_3 = 3$; $\left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}11 & 0{,}14 & 0{,}05 \\ 0.1 & 0{,}15 & 0{,}15 \\ 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

8. $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$; $y_1 = -3$, $y_2 = -2$, $y_3 = 3$; $\left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}11 & 0{,}1 & 0{,}09 \\ 0.1 & 0{,}15 & 0{,}15 \\ 0{,}17 & 0{,}03 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

9. $x_1 = -5$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$; $y_1 = -3$, $y_2 = 2$, $y_3 = 1$; $\left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0.1 & 0{,}1 & 0{,}15 \\ 0{,}13 & 0{,}07 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 4

Преобразование Лапласа и его свойства

Задание 1. Комплекснозначная функция $f(t)$ действительной переменной t называется *оригиналом*, если она удовлетворяет условиям:

1. На любом конечном интервале (a,b) функция $f(t)$ непрерывна кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода.
2. $f(t) < 0$ при $t < 0$.
3. Существуют действительные числа $C > 0, \alpha$ такие, что $|f(t)| \le Ce^{\alpha t}$.

Преобразованием Лапласа оригинала $f(t)$ или её *изображением* называется функция комплексной переменной

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt. \tag{18}$$

Пример. Найдём изображение функции Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \ge 0. \end{cases}$$

Из (18) имеем $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$, так как для $a = \operatorname{Re} p > 0$ $|e^{-pt}| = e^{-at} \to 0$ при $t \to +\infty$.

Отметим, что если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 3, но не удовлетворяет условию 2, то функция

$$g(t) = \theta(t)f(t) = \begin{cases} f(t), & t \ge 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

условию 2 удовлетворяет, а значит, является оригиналом. Например, функции $\theta(t)t, \theta(t)\sin t$ являются оригиналами. На практике принято опускать множитель $\theta(t)$ в записи функции, считая эти функции равными нулю при $t < 0$. Например, вместо $\theta(t)1, \theta(t)\sin t$ пишут $1, \sin t$. Следовательно, с учётом сказанного выше, 1 имеет изображение $\frac{1}{p}$. Тот факт, что оригинал $f(t)$ имеет изображение $F(p)$ принято записывать так $f(t) \div F(p)$.

Свойства преобразования Лапласа

1. *Смещение изображения.* Если $f(t) \div F(p)$, то для любого комплексного λ будет $e^{\lambda t} f(t) \div F(p - \lambda)$.

Так как $1 \div \frac{1}{p}$, то $e^{\lambda t} \div \frac{1}{p-\lambda}$.

2. *Линейность.* Если $f(t) \div F(p)$, $g(t) \div G(p)$, то для любых комплексных α, β будет $\alpha f(t) + \beta g(t) \div \alpha F(p) + \beta G(p)$.

Из равенства $\sin \omega t = \dfrac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$, используя свойства 1 и 2 преобразования Лапласа, получим, что $\sin \omega t \div \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p - i\omega} - \dfrac{1}{p + i\omega}\right) = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

Аналогично, из равенств $\cos\omega t = \dfrac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$, $sh\,\omega t = \dfrac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$, $ch\,\omega t = \dfrac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$ получим $\cos\omega t \div \dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$, $sh\,\omega t \div \dfrac{\omega}{p^2 - \omega^2}$, $ch\,\omega t \div \dfrac{p}{p^2 - \omega^2}$, где $sh\,\omega t, ch\,\omega t$ – гиперболический синус и косинус.

3. *Дифференцирование изображения.* Если $f(t) \div F(p)$, тогда $t^n f(t) \div (-1)^n F^n(p)$.

Так как $1 \div \frac{1}{p}$, то $t^n \div (-1)^n \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$. Из свойства смещения изо–бражения следует, что $t^n e^{\lambda t} \div \dfrac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$. Из свойства 3при $n = 1$ получаем, что $t \sin \omega\, t \div -\left(\dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}\right)^{/} = \dfrac{p\omega}{\left(p^2 + \omega^2\right)^2}$, $t \cos\omega\, t \div \dfrac{p^2 - \omega^2}{\left(p^2 + \omega^2\right)^2}$.

4. *Дифференцирование оригинала.* Если $f(t), f^{/}(t), \ldots, f^{n}(t)$ оригиналы и $f(t) \div F(p)$, то

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f^{/}(0) - \cdots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Свойство дифференцирования оригинала используется для отыска–ния решений дифференциальных уравнений и систем. Для этого составим таблицу изображений.

	Оригинал	Изображение
1.	1	$\frac{1}{p}$
2.	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
3.	$e^{\lambda t}$	$\dfrac{1}{p-\lambda}$

4.	$t^n e^{\lambda t}$	$\dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
5.	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
6.	$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
7.	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
8.	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
9.	$t\sin\omega t$	$\dfrac{p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
10.	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
11.	$sh\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
12.	$ch\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$

Для удобства преобразование Лапласа функции $f(t)$ будем обозначать так: $F(p)=L(f(t))$.

Решение дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа

Пример. Решим задачу Коши $y'' + 2y' + y = t^2, y(0)=0, y'(0)=1$.

Обозначим $Y(p)=L(y(t))$ – изображение оригинала $y(t)$. Применим к левой и правой частям данного уравнения преобразование Лапласа $L\left(y'' + 2y' + y\right) = L\left(t^2\right)$. По свойству линейности преобразования Лапласа имеем $L\left(y'' + 2y' + y\right) = L(y'') + 2L(y') + L(y)$. По свойству дифференцирования оригинала $L(y'') = p^2Y(p) - p\,y(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1$, $L(y') = pY(p)$, $L\left(t^2\right) = \dfrac{2}{p^3}$. Следовательно, для изображения $Y(p)$ выполнено равенство $p^2Y(p) - 1 + 2\,pY(p) + Y(p) = \dfrac{2}{p^3}$, из которого получаем

$$(p^2+2p+1)Y(p) = \frac{2}{p^3} + 1 \text{ или } Y(p) = \frac{2}{p^3(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Разложим правильную дробь $\dfrac{2}{p^3(p+1)^2}$ на простейшие дроби: $\dfrac{2}{p^3(p+1)^2} = \dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p^2}+\dfrac{C}{p^3}+\dfrac{D}{p+1}+\dfrac{E}{(p+1)^2}$. Сложив дроби в правой части равенства, получим

$$\frac{2}{p^3(p+1)^2} = \frac{Ap^2(p+1)^2+Bp(p+1)^2+C(p+1)^2+Dp^3(p+1)+Ep^3}{p^3(p+1)^2}.$$

Приравняв числители этих дробей, получим равенство двух полиномов $Ap^2(p+1)^2+Bp(p+1)^2+C(p+1)^2+Dp^3(p+1)+Ep^3 = 2$, из которого при $p=0$ получаем $C=2$, а при $p=-1$ получаем $E=-2$. Для отыскания оставшихся неизвестных A,B,D, приравняв коэффициенты при p^4, p^3 и p^2, получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} A+D=0, \\ 2A+B+D=2, \\ A+2B=-2. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения системы первое и второе уравнения, находим $B=-4, A=6, D=-6$. Следовательно, $Y(p) = \dfrac{2}{p^3(p+1)^2}+\dfrac{1}{(p+1)^2}=\dfrac{6}{p}-\dfrac{4}{p^2}+\dfrac{2}{p^3}-\dfrac{6}{p+1}-\dfrac{1}{(p+1)^2}$. Используя свойство линейности обратного преобразования Лапласа и таблицу изображений, находим решение задачи Коши $y(t)=L^{-1}\left(\dfrac{6}{p}-\dfrac{4}{p^2}+\dfrac{2}{p^3}-\dfrac{6}{p+1}-\dfrac{1}{(p+1)^2}\right)= 6L^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\right) - 4L^{-1}\left(\dfrac{1}{p^2}\right) + L^{-1}\left(\dfrac{2}{p^3}\right)-6L^{-1}\left(\dfrac{1}{p+1}\right)-L^{-1}\left(\dfrac{1}{(p+1)^2}\right) = 6-4t+t^2-6e^{-t}-te^{-t}$.

Пример. Решить задачу Коши для системы уравнений

$$x'' + y=0, \quad y''+4x=0$$

с начальными данными $x(0)=y(0)=0, x'(0)=y'(0)=1$.

Обозначим $X(p)$, $Y(p)$ – изображения искомого решения $x(t), y(t)$ рассматриваемой системы. Применив к каждому уравнению системы преобразование Лапласа, получим систему двух алгебраических уравнений с неизвестными X, Y

$$p^2X(p)-1+Y(p)=0, p^2Y(p)-1+4X(p)=0.$$

Выразив из первого уравнения $Y(p) = 1 - p^2 X(p)$, и подставив это выражение во второе уравнение, получим $X(p) = \dfrac{p^2 - 1}{p^4 - 4}$, $Y(p) = \dfrac{p^2 - 4}{p^4 - 4}$.

Очевидно, каждую из этих дробей можно представить в следующем виде

$$X(p) = \frac{p^2 - 1}{p^4 - 4} = \frac{A}{p^2 - 2} + \frac{B}{p^2 + 2}, \quad Y(p) = \frac{p^2 - 4}{p^4 - 4} = \frac{C}{p^2 - 2} + \frac{D}{p^2 + 2}.$$

Для определения неизвестных A, B, C, D используем равенства $A(p^2 + 2) + B(p^2 - 2) = p^2 - 1, \quad C(p^2 + 2) + D(p^2 - 2) = p^2 - 4$. Из этих равенств, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p, получим $A + B = 1,\ 2A - 2B = -1,\ C + D = 1,\ 2C - 2D = -4$, откуда следует, что $A = \frac{1}{4}, B = \frac{3}{4}, C = -\frac{1}{2}, D = \frac{3}{2}$. Следовательно, $X(p) = \dfrac{1}{4(p^2 - 2)} + \dfrac{3}{4(p^2 + 2)}$, $Y(p) = -\dfrac{1}{2(p^2 - 2)} + \dfrac{3}{2(p^2 + 2)}$. Из таблицы изображений и оригиналов получим решение рассматриваемой задачи Коши

$$x(t) = \frac{1}{4\sqrt{2}} sh\left(\sqrt{2}t\right) + \frac{3}{4\sqrt{2}} \sin\left(\sqrt{2}t\right),\ y(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} sh\left(\sqrt{2}t\right) + \frac{3}{2\sqrt{2}} \sin\left(\sqrt{2}t\right).$$

Формула классической вероятности

Задание 2. *Формула классической вероятности.*

Событием называют один из возможных исходов случайного эксперимента.

Например, возможными исходами случайного эксперимента, который состоит в бросании двух игральных костей, могут быть следующие события: $A = \{$выпали 6 и 5$\}$, $B = \{$выпали два чётных числа$\}$, $C = \{$сумма выпавших очков не менее 11$\}$.

Над событиями определены действия сложение и умножение.

Определение. Суммой $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют событие, состоящее в том, что осуществилось хотя бы одно из этих событий. Произведением $A_1 A_2 \cdots A_n$ событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют событие, состоящее в том, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ произошли одновременно.

Определение. Событие A благоприятствует событию B (используется обозначение $A \subset B$), если из того что произошло событие A следует, что произошло и событие B.

Например, при бросании одной игральной кости, событие $A = \{$выпала цифра 6$\}$ благоприятствует событию $B = \{$выпало чётное число$\}$.

Определение. Достоверным называется событие, которое осуществляется при любом исходе случайного эксперимента (будем обозначать буквой U). Невозможным называется событие, которое не осуществляется не при каком исходе случайного эксперимента (будем обозначать буквой V).

Например, при бросании двух игральных костей, событие U={сумма выпавших очков не превосходит 12} является достоверным, а событие V= {сумма выпавших очков равна 13} является невозможным.

Для любого события A справедливы равенства

$$A+U=U,\ A+V=A,\ AU=A,\ AV=V.$$

Определение. Событие, состоящее в том, что событие A не произошло, называют противоположным событию A и обозначают $\overline{A}$.

Например, при бросании одной игральной кости, событие $\overline{A}=\{$выпало чётное число$\}$ является противоположным событию A= {выпало нечётное число}.

Очевидно, что $A+\overline{A}=U,\ A\,\overline{A}=V$. Справедливы также формулы двойственности

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n},\quad \overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\cdots+\overline{A_n}. \qquad (19)$$

Определение. События A и B называют несовместными, если они не могут произойти одновременно (то есть $A\,B = V$). Например, события A и $\overline{A}$ несовместны.

Действия над событиями обладают следующими свойствами:

1) $A+B=B+A$, 2) $(A+B)+C=A+(B+C)$, 3) $AB=BA$,

4) $(AB)C=A(BC)$, 5) $(A+B)C=AC+BC$.

Под вероятностью события A понимают численную характеристику возможности осуществления этого события в данном случайном эксперименте. Чтобы вычислить вероятность некоторого события в рассматриваемом случайном эксперименте сначала нужно в этом эксперименте выделить группу *элементарных событий* $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) эти события равновозможны;
2) попарно несовместны, то есть $\omega_i\,\omega_j=V$, если $i\neq j$;
3) образуют полную группу событий, то есть $\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n=U$ (хотя бы одно из этих событий осуществляется при любом исходе эксперимента);
4) для любого события A существуют события $\omega_i\subset A$.

Определение. Вероятностью $p(A)$ события A называют число

$$p(A)=\frac{m}{n}, \qquad (20)$$

где m – число элементарных событий, благоприятствующих событию A, n – общее число элементарных событий.

Пример. Найдём вероятность того, что при бросании двух игральных костей сумма выпавших очков будет не менее 11.

В данном случайном эксперименте элементарными событиями являются пары чисел (p,q), где p,q – цифры от 1 до 6, выпавшие на первом и втором кубиках. Так как каждая грань одного кубика может выпасть с любой гранью второго, то общее число элементарных событий равно $n = 6 \times 6 = 36$. Элементарными событиями, благоприятствующими событию A = {сумма выпавших очков ≥ 11} будут события (5,6), (6,5), (6,6), то есть m = 3. Следовательно, $p(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

Перечислим основные свойства вероятности:

1. Вероятность достоверного события $p(U) = 1$, так как все элементарные события благоприятствуют достоверному событию и $m = n$.
2. Вероятность невозможного события $p(V) = 0$, так как число элементарных событий, благоприятствующих этому событию $m = 0$.
3. Если события A, B несовместны, тогда $p(A+B) = p(A) + p(B)$.
4. Если событие A благоприятствует событию B, тогда $p(A) \leq p(B)$.
5. Так как события A и $\overline{A}$ несовместны, а $A + \overline{A} = U$, то справедливы равенства $1 = p(U) = p(A + \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A})$, откуда следует, что вероятность противоположного события $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Условная вероятность. Независимые события

Определение. Условной вероятностью события A при условии события B называют вероятность события A, вычисленную в предположении, что событие B уже произошло. Условная вероятность события A обозначается $p(A\,|\,B)$ и вычисляется по формуле $p(A\,|\,B) = \dfrac{m_{AB}}{m_B}$, где m_B – число элементарных событий, благоприятствующих событию B, m_{AB} – число элементарных событий, благоприятствующих событиям A и B одновременно.

Определение. События A и B называются независимыми, если вероятность каждого события не зависит от того произошло или нет другое событие, то есть полная вероятность каждого события равна условной вероятности. В противном случае эти события называются зависимыми. Таким образом, независимость событий A и B эквивалентна выполнению равенств $p(A) = p(A\,|\,B), p(B) = p(B\,|\,A)$.

Пример. Рассмотрим события $A = \{$выпала цифра 5 или 6$\}$, $B = \{$выпало чётное число$\}$ при бросании игральной кости. Имеем $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $p(A \mid B) = \frac{1}{3}$, то есть $p(A) = p(A \mid B)$, $p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $p(B \mid A) = \frac{1}{2}$, то есть $p(B) = p(B \mid A)$. Следовательно, события A и B независимы.

Теорема о вероятности произведения событий

Вероятность произведения событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ равна

$$p(A_1 A_2 \cdots A_n) = p(A_1) p(A_2 \mid A_1) p(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots p(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1}).$$

Это равенство называют теоремой о вероятности событий. В частности, если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы, то есть условные вероятности равны полным вероятностям, последнее равенство принимает следующий вид

$$p(A_1 A_2 \cdots A_n) = p(A_1) p(A_2) p(A_3) \cdots p(A_n).$$

Пример. Из урны, содержащей 3 белых, 4 чёрных и 5 красных шаров, извлекли наугад 3 шара. Найти вероятность того, что все извлечённые шары были красного цвета.

Можно считать, что шары извлекались по одному. Введём события $A_1 = \{$первый извлечённый шар красный$\}$, $A_2 = \{$второй извлечённый шар красный$\}$, $A_3 = \{$третий извлечённый шар красный$\}$. Тогда событие $A = \{$все три шара были красного цвета$\}$ равно произведению событий A_1, A_2, A_3, а $p(A) = p(A_1 A_2 A_3) = p(A_1) p(A_2 \mid A_1) p(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{5}{12} \frac{4}{11} \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$.

Пример. Докажем, что несовместные события $A_1, A_2, \dots, A_n$ (их произведение есть невозможное событие) с ненулевыми вероятностями зависимы.

Действительно, если бы эти события были независимы, то по теореме о вероятности произведения для независимых событий выполнялось бы равенство $0 = p(A_1 A_2 \cdots A_n) = p(A_1) p(A_2) p(A_3) \cdots p(A_n) \neq 0$, что невозможно. Следовательно, рассматриваемые события зависимы.

Теорема о вероятности суммы событий

Вероятность суммы двух событий A и B вычисляется по формуле

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB),$$

которую называют теоремой о вероятности суммы двух событий.

Пример. Студент знает 20 из 30 экзаменационных вопросов. Экзаменационный билет содержит два вопроса. Найти вероятность того, что студент знает хотя бы один вопрос билета.

Введём события A_1 = {студент знает первый вопрос билета}, A_2 = {студент знает второй вопрос}. Тогда событие A = {студент знает хотя бы один вопрос билета} = $A_1 + A_2$, а $p(A) = p(A_1 + A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 A_2)$ = $p(A_1) + p(A_2) - p(A_1)p(A_2 \mid A_1) = \frac{20}{30} + \frac{20}{30} - \frac{20}{30}\frac{19}{29} = \frac{26}{29}$.

Отметим, что этот пример можно решить с использованием двойственности (19). Действительно $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A_1 + A_2}) = 1 - p(\overline{A_1}\ \overline{A_2})$ $1 - p(\overline{A_1})p(\overline{A_2} \mid \overline{A_1}) = 1 - \frac{10}{30}\frac{9}{29} = \frac{26}{29}$.

Теорема о вероятности суммы более двух событий имеет сложный вид и ей трудно пользоваться на практике. Поэтому в таких случаях используются формулы двойственности (19): $p(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = 1 - p(\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}) = 1 - p(\overline{A_1}\ \overline{A_2} \cdots \overline{A_n})$.

Пример. Вероятности поразить цель при одном выстреле у трёх стрелков равны 0,7; 0,8; 0,9 соответственно. Стрелки произвели по одному выстрелу. Найти вероятность того, что хотя бы один стрелок поразил цель.

Введём события A_1 = {первый стрелок поразил цель}, A_2 = {второй стрелок поразил цель}, A_3 = {третий стрелок поразил цель}. Тогда событие $A = A_1 + A_2 + A_3$, а вероятность $p(A) = p(A_1 + A_2 + A_3) = 1 -$ $p(\overline{A_1 + A_2 + A_3}) = 1 - p(\overline{A_1}\ \overline{A_2} \cdots \overline{A_3})$ = (так как события A_1, A_2, A_3 независимы) = $1 - p(\overline{A_1})p(\overline{A_2})p(\overline{A_3})$ = $1 - 0{,}3 \times 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}994$, так как $p(\overline{A_k}) = 1 - p(A_k)$, $k =$ 1,2,3.

Число размещений, перестановок и сочетаний

1. *Число размещений* A_n^k.

Пусть требуется разместить k различных предмета в n ячейках ($k \le n$). Число различных способов размещения k предметов в n ячейках обозначают A_n^k. Для размещения первого предмета имеем n возможностей, для размещения второго предмета имеем $n - 1$ возможностей,…, для размещения k–го предмета имеется $n - (k-1) = n - k + 1$ возможностей. Перемножив количества возможностей размещения всех k предметов, получаем число размещений $A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Пример. В группе туристов из 10 человек, среди которых 3 родственника, случайным образом распределили 10 лотерейных билета, три из которых содержат выигрыши 10, 15 и 20 тысяч рублей. Найти вероятность того, что все выигрышные билеты достанутся родственникам.

Элементарными событиями являются всевозможные размещения трёх выигрышных билетов среди 10 туристов, их общее количество равно A_{10}^{3} = $10 \times 9 \times 8$= 720. Элементарными событиями, благоприятствующими событию A = {все выигрышные билеты достанутся родственникам} являются всевозможные размещения трёх выигрышных билетов между тремя родственниками, их количество равно $A_3^3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$. Следовательно, вероятность $p(A) = \frac{6}{720} = \frac{1}{120}$.

2. *Число перестановок* P_n.

В частном случае размещение n предметов в n ячейках называют перестановкой и число перестановок из n предметов P_n = A_n^n = $n(n-1)\cdots(n-n+1) = n!$.

Пример. Гостей, среди которых 4 женщины и 6 мужчин, случайным образом разместили за 10 местным круглым столом. Найти вероятность того, что все женщины окажутся рядом.

Общее число элементарных событий равно числу перестановок из 10 гостей P_{10}= 10!. Подсчитаем количество перестановок, в которых 4 женщины окажутся рядом. Пронумеруем все места за столом числами от 1 до 10. Все женщины окажутся рядом, если будут занимать (1,2.3,4), (2.3,4.5),…, (10,1,2.3) места. В каждом из этих 10 случаев имеем 4! перестановок женщин на четырёх местах, и каждую такую перестановку можно брать с каждой из 6! перестановок мужчин на 6 местах. Следовательно, число элементарных событий, благоприятствующих событию A = {все женщины окажутся рядом} равно $10 \times 4! \times 6!$, а вероятность этого события $p(A) = \frac{10 \times 4! \times 6!}{10!} = \frac{2 \times 3 \times 4}{7 \times 8 \times 9} = \frac{1}{21}$.

3. *Число сочетаний* C_n^k.

Числом сочетаний из n по k называют количество различных наборов по k предметов, которые можно составить из n различных предметов и обозначают C_n^k. Справедливо равенство C_n^k = $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Два набора по k предметов считаются различными, если они отличаются хотя бы одним предметом. Если в каждом из C_n^k наборов по k предметов выполнить $k!$ перестановок, то получим число размещений A_n^k, то есть справедливо равенство $A_n^k = k!\ C_n^k$.

Пример. Из урны, содержащей 3 белых, 4 чёрных и 5 красных шара наугад извлекли 6 шаров. Найти вероятность того, что извлекли 1белый, 2 чёрных и 3 красных шара.

Элементарными событиями являются различные наборы по 6 шаров, которые можно составить из 12 шаров, их количество равно C_{12}^{6} =

$\frac{12!}{6!6!}=\frac{7\times8\times9\times10\times11\times12}{2\times3\times4\times5\times6}$ $=7\times11\times12$. Элементарными событиями, благоприятствующими событию $A=\{$извлекли 1белый, 2 чёрных и 3 красных шара$\}$, являются различные наборы по 6 шаров, содержащие 1белый, 2 чёрных и 3 красных шара. Количество таких наборов равно $3\times C_4^2\times C_5^3=$ $3\times6\times10$. Следовательно, $p(A)=\frac{3\times6\times10}{7\times11\times12}=\frac{15}{77}$.

Формула полной вероятности и формула Байеса

Задание 3. *Формула полной вероятности и формула Байеса.*

1. *Формула полной вероятности.*

Пусть события $H_1,H_2,\ldots,H_n$ образуют полную группу попарно не совместных событий (гипотез), то есть $H_1+H_2+\cdots+H_n=U$ и $H_iH_j=V$, если $i\neq j$. Тогда вероятность событий можно вычислять по формуле

$$p(A)=p(H_1)p(A\,|\,H_1)+\cdots+p(H_n)p(A\,|\,H_n)=\sum_{k=1}^{n}p(H_k)p(A\,|\,H_k),$$

которая называется формулой полной вероятности.

Пример. Из 28 костей домино поочерёдно вытащили наугад 2 кости. Найти вероятность того, что вторую кость домино можно приставить к первой согласно правилам игры.

Чтобы внести определённость рассмотрим возможные гипотезы $H_1=$ $\{$первая извлечённая кость является дублем$\}$, $H_2=$ $\{$первая извлечённая кость не является дублем$\}$. Имеем $p(H_1)=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$, $p(H_2)=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$. Найдём условные вероятности: $p(A\,|\,H_1)=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$, $p(A\,|\,H_2)=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$. Из формулы полной вероятности находим, что $p(A)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{9}+\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$.

2. *Формула Байеса.*

Эта формула используется для пересчёта вероятностей гипотез H_k, (k = 1, 2, … , n), после того, как произошло некоторое событие A. Пусть, как в предыдущем пункте, события $H_1,H_2,\ldots,H_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий (гипотез). Тогда справедливо равенство (формула Байеса)

$$p(H_k\,|\,A)=\frac{p(H_k)p(A\,|\,H_k)}{\sum_{i=1}^{n}p(H_i)p(A\,|\,H_i)}.$$

Пример. Имеется 3 урны, в которых находятся 1 белый и 2 чёрных, 2 белых и 2 чёрных, 3 белых и 2 чёрных шара соответственно. Из первой урны переложили во вторую 1 шар, затем из второй урны переложили в третью 1 шар, после чего из третьей урны извлекли наугад один шар. Найти вероятность того, что из второй урны в третью переложили белый шар, если шар, извлечённый из третьей урны, оказался чёрным.

Введём две пары гипотез $H_1 =$ {из первой урны во вторую переложили белый шар}, $H_2 =$ {из первой урны во вторую переложили чёрный шар}; $\overline{H_1} =${из второй урны в третью переложили белый шар}, $\overline{H_2} =${из второй урны в третью переложили чёрный шар}. Введём также событие A = {из третьей урны извлекли чёрный шар}. Вероятности гипотез $\overline{H_1}$, $\overline{H_2}$ найдём по формуле полной вероятности. Имеем $p(H_1) = \frac{1}{3}$, $p(H_2) = \frac{2}{3}$, $p(\overline{H_1} \mid H_1) = \frac{3}{5}$, $p(\overline{H_1} \mid H_2) = \frac{2}{5}$. Следовательно, $p(\overline{H_1}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$. Аналогично, $p(\overline{H_2} \mid H_1) = \frac{2}{5}$, $p(\overline{H_2} \mid H_2) = \frac{3}{5}$, а $p(\overline{H_2}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{8}{15}$. Найдём теперь условные вероятности события A при условии, что собы– тия $\overline{H_1}$, $\overline{H_2}$ произошли: $p(A \mid \overline{H_1}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $p(A \mid \overline{H_2}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Следовательно, искомая вероятность $p(\overline{H_1} \mid A) = \dfrac{\frac{7}{15} \times \frac{1}{3}}{\frac{7}{15} \times \frac{1}{3} + \frac{8}{15} \times \frac{1}{2}} = \dfrac{7}{19}$.

Повторные испытания. Формула Бернулли

Задание 4. *Повторные испытания. Формула Бернулли.*

Пусть некоторый случайный эксперимент (испытание) повторяется n раз в одинаковых условиях, а вероятность $p(A)$ осуществления события A в каждом испытании равна p и не зависит от испытания. Число осуществлений события A в n независимых испытаниях называют частотой события A и обозначают μ_n. Обозначим $q = p(\overline{A}) = 1 - p$, P_n^k – вероятность того, что в n испытаниях событие A произойдёт ровно k раз, то есть $P_n^k = p(\mu_n = k)$. Справедливо равенство, которое называют формулой Бернулли

$$P_n^k = C_n^k \, p^k \, q^{n-k}. \tag{21}$$

Пример. Две игральных кости бросают 5 раз. Найти вероятность того, что ровно 3 раза выпадет хотя бы одна шестёрка.

В этом случае событие A = {выпала хотя бы 1 шестёрка} и вероятность этого события в каждом из 5 испытаний $p = p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$. Из (21), для n = 5, k = 3, получаем $P_5^3 = C_5^3 \left(\frac{11}{36}\right)^3 \left(\frac{25}{36}\right)^2 = 0{,}138$ (результат округлён до тысячных).

Формула Бернулли используется для вычисления вероятностей следующих событий

$$p(\mu_n \le k),\ p(\mu_n \ge m),\ p(m \le \mu_n \le k), k > m.$$

Так как события $A_k=\{\mu_n=k\}$, $k=0,1,2,\ldots,n$, несовместны, а событие $A=\{\mu_n\le k\}=A_0+A_1+\cdots+A_k$, то из формулы Бернулли следует, что $p(A)=p(\mu_n\le k)=P_n^0+P_n^1+\cdots+P_n^k$. Аналогично получим, что $p(\mu_n\ge k)=P_n^k+P_n^{k+1}+\cdots+P_n^n$, $p(m\le\mu_n\le k)=P_n^m+P_n^{m+1}+\cdots+P_n^{k-1}+P_n^k$.

Пример. Найти вероятность того, что шестизначный номер телефона содержит не менее двух и не более пяти девяток (считать, что любая цифра номера может принимать любое значение от 0 до 9).

В этом случае каждая цифра номера является случайным испытанием $n=6$, а событие A = {цифра номера является 9}. Из сказанного выше следует, что $p(A)=\frac{1}{10}$, $p(2\le\mu_6\le 5)=P_6^2+P_6^3+P_6^4+P_6^5=C_6^2\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^4+C_6^3\left(\frac{1}{10}\right)^3\left(\frac{9}{10}\right)^3+C_6^4\left(\frac{1}{10}\right)^4\left(\frac{9}{10}\right)^2+C_6^5\left(\frac{1}{10}\right)^5\left(\frac{9}{10}\right)^1=15\times 0{,}006561+20\times 0{,}000729+15\times 0{,}000081+6\times 0{,}000009=0{,}114264$.

Локальная теорема Лапласа

При больших значениях *n* формула (21) не удобна в применении, так как C_n^k может быть очень большим числом. В этом случае для вычисления P_n^k пользуются локальной теоремой Лапласа: если $0<p<1$, $C_1\le t_k=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}\le C_2$, $n\to\infty$, тогда

$$P_n^k=p(\mu_n=k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{1}{2}t_k^2}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Иначе говоря, при больших значениях числа испытаний можно пользоваться приближённым равенством

$$P_n^k=p(\mu_n=k)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{1}{2}t_k^2}. \qquad (22)$$

Замечание. Чаще всего формулой (22) пользуются при $npq>20$, когда *n* достаточно велико, а *p* и *q* не очень близки к нулю.

Пример. Две игральные кости подбросили 100 раз. Найти вероятность того, что ровно 55 раз сумма выпавших цифр будет делиться на 2.

Обозначим A = {сумма выпавших очков при одном бросании делится на 2}. Событие *A* осуществляется в тех случаях, когда на обоих кубиках выпадают нечётные либо чётные числа. На каждом кубике 3 чётных и три нечётных числа. Следовательно, событие *A* осуществляется в $3\times 3+3\times 3=18$ из 36 случаях и вероятность $p=p(A)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$, $q=1-p=\frac{1}{2}$.

Имеем $npq = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$, $\frac{1}{\sqrt{npq}} = 0{,}2$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}4$, $t_k = \frac{55–50}{5} = 1$. Следовательно, $P_{100}^{55} = 0{,}2 \times 0{,}4 \times e^{-\frac{1}{2}} = 0.049$.

Интегральная теорема Лапласа

При больших *n* для вычисления вероятности $p(m \le \mu_n \le k)$ того, что в *n* независимых испытаниях событие *A* произойдёт не менее *m* и не более *k* раз используется приближённая формула

$$p(m \le \mu_n \le k) \approx \Phi(t_k) - \Phi(t_m), \qquad (23)$$

где $t_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $t_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$ – функция Лапласа. Значения функции Лапласа для $0 \le t \le 3$ приводятся в специальных таблицах в учебниках по теории вероятности и математической статистике (в конце книги). Для отрицательных значений аргумента $\Phi(-t) = -\Phi(t)$, так как функция Лапласа является нечётной, $\Phi(0) = 0$, а для значений аргумента $t > 3$ полагают приближённо $\Phi(t) = 0{,}5$.

Пример. При передаче сообщения телеграфом вероятность искажения одного знака $p = 0{,}1$. Найти вероятность того, что в сообщении из 900 знаков будет искажено а) не мене 80 и не более 100 знаков; б) не более 90 знаков.

В нашем примере $n = 900$, $q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$; $np = 900 \times 0{,}1 = 90$; $npq = 81$. В случае а) $m = 80$, $k = 100$, и находим $t_m = \frac{80 - 90}{9} = -\frac{10}{9}$, $t_k = \frac{100 - 90}{9} = \frac{10}{9}$. Следовательно, $p(80 \le \mu_n \le 100) \approx \Phi\left(\frac{10}{9}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{9}\right) = 2\,\Phi\left(\frac{10}{9}\right) = 2\,\Phi(1{,}11) = 2 \times 0{,}3665 =$ 0.733. В случае б) $m = 0$, $k = 90$, $t_m = \frac{0–90}{9} = -10$, $t_k = \frac{90 - 90}{9} = 0$. Следовательно, $p(\mu_n \le 90) = \Phi(0) - \Phi(-10) = \Phi(10) = 0{,}5$.

Дискретные случайные величины

Задание 5. Случайную величину, множество возможных значений которой (это действительные числа) конечно или счётно, называют *дискретной случайной величиной*, кратко ДСВ.

ДСВ *X* считается заданной, если известны все её возможные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и вероятности $p_k = p\{X = x_k\}, k = 1, 2, \ldots, n$, с которыми случайная величина принимает эти значения. В таком случае говорят, что задан закон распределения этой случайной величины. Вероятности

$p_k, k = 1,2,\ldots,n$ удовлетворяют условию нормировки $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. Рассмотрим пример выполнения задания 5.

Пример. В урне находится 15 лотерейных билетов, 5 из которых являются выигрышными. Из урны извлекли наугад 3 билета. Пусть ДСВ X – число извлечённых выигрышных билетов. Составить закон распределения X, вычислить математическое ожидание, дисперсию X и $p\{X \geq 2\}$.

Возможными значениями рассматриваемой случайной величины являются числа 0,1,2,3. Найдём вероятности этих возможных значений: $p_0 = p\{X = 0\} = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{120}{35 \times 13} = \frac{24}{91}$, $p_1 = p\{X = 1\} = \frac{5 \times C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{5 \times 45}{35 \times 13} = \frac{45}{91}$,

$p_2 = p\{X = 2\} = \frac{10 \times C_5^2}{C_{15}^3} = \frac{100}{35 \times 13} = \frac{20}{91}$, $p_3 = p\{X = 3\} = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{10}{35 \times 13} = \frac{2}{91}$.

Проверим выполнение условия нормировки: $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = \frac{24}{91} + \frac{45}{91} + \frac{20}{91} + \frac{2}{91} = 1$. Математическое ожидание $M(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k = \frac{24}{91} \times 0 + \frac{45}{91} \times 1 + \frac{20}{91} \times 2 + \frac{2}{91} \times 3 = 1$, дисперсия $D(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \left(x_k - M(X)\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^2 - M(X)^2 = \frac{24}{91} \times 0 + \frac{45}{91} \times 1 + \frac{20}{91} \times 4 + \frac{2}{91} \times 9 - 1 = \frac{52}{91}$, вероятность $p\{X \geq 2\} = p_2 + p_3 = \frac{20}{91} + \frac{2}{91} = \frac{22}{91}$.

Непрерывные случайные величины

Задание 6. Пусть X – случайная величина (кратко СВ). *Функцией распределения вероятностей* СВ X называют функцию $F(x)$, которая определяется равенством $F(x) = p\{X < x\}$ для любого действительного числа x.

Под непрерывной случайной величиной (кратко НСВ) понимают такую случайную величину, множество возможных значений которой заполняют целый промежуток, а функция распределения вероятностей $F(x)$ является непрерывной функцией. Из определения функции $F(x)$ выводятся следующие основные её свойства:

1) $0 \leq F(x) \leq 1$ для любых действительных значений x;
2) $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$, то есть функция $F(x)$ возрастает;
3) $F(x)$ непрерывна слева, то есть $\lim\limits_{x \to a, x < a} F(x) = F(a)$ (в случае, если X является непрерывной СВ, то $F(x)$ непрерывна);
4) $F(x) = p\{X \in (a,b]\} = F(b) - F(a)$;
5) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Для непрерывной случайной величины вводится ещё *функция плотности распределения вероятностей* $f(x)$, которая определяется равенством $f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{p\{X \in (x, x+\Delta x]}{\Delta x}, \Delta x > 0$.

Из определения плотности распределения $f(x)$ вытекают её основные свойства:

1) $f(x) \geq 0$ для любых x;

2) условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

3) $p\{X \in (a,b]\} = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$;

4) из определения $f(x)$ и свойства 4) $F(x)$ устанавливается связь между плотностью распределения и функцией распределения вероятностей, а именно $f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{p\{X \in (x, x+\Delta x]}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F^{/}(x)$ в точках дифференцируемости $F(x)$ (то есть $F(x)$ является первообразной для $f(x)$);

5) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Пример. Найти неизвестные параметры a, b, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ случайной величины X и вероятность того, что $\{X \in (0,2)\}$, если функция распределения вероятностей $F(x)$ непрерывной случайной величины X задана следующими равенствами

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{1+x} \ \ \textit{при} \ \ x < -1, \\ a + bx \ \text{ при } \ -1 \leq x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{2x^3} \quad \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Параметры a, b определим из непрерывности функции $F(x)$. Из непрерывности функции $F(x)$ в точке $x = -1$ следует, что левосторонний предел $F(-1-) = \lim\limits_{x \to -1, x < -1} F(x) = \lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{2} e^{1+x} = \frac{1}{2}$ равен правостороннему пределу $F(-1+) = \lim\limits_{x \to -1, x > -1} F(x) = \lim\limits_{x \to -1} (a+bx) = a - b$, а значит справедливо равенство $a - b = 0{,}5$. Аналогично, из непрерывности $F(x)$ в точке $x = 1$, приравнивая односторонние пределы функции $F(x)$ в этой точке, получим второе уравнение $a + b = 0{,}5$. Следовательно, a и b удовлетворяют линейной системе $\begin{cases} a - b = 0{,}5, \\ a + b = 0{,}5. \end{cases}$ Решив полученную систему, находим $a = 0{,}5$, а

$b = 0$. Следовательно, с учётом найденных значений a и b, получаем

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{1+x} \text{ при } x<-1,\\ 0{,}5 \text{ при } -1\le x\le 1,\\ 1-\frac{1}{2x^3} \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Из свойства 4) находим $f(x)= F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{1+x} \text{ при } x<-1,\\ 0 \text{ при } -1\le x\le 1,\\ \frac{3}{2x^4} \text{ при } x>1.\end{cases}$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X найдём из равенства $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{x}{2}e^{1+x}dx+\int\limits_{-1}^{1}0dx+\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{3}{2x^3}dx$ = (первый интеграл интегрируем по частям, второй интеграл равен 0, а третий интеграл является табличным) = $\frac{1}{2}\left((x-1)e^{1+x}\Big|_{-\infty}^{-1}\right)-\frac{3}{4x^2}\Big|_{1}^{+\infty}=-1+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$, так как $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x-1)e^{1+x}\right)=0$, и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{4x^2}=0$.

Для вычисления дисперсии X воспользуемся формулой $D(X)=M(X^2)-M(X)^2$, из которой получаем $M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=$ (с учётом функции плотности распределения вероятностей $f(x)$) =
$\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{x^2}{2}e^{1+x}dx+\int\limits_{-1}^{1}0dx+\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{3}{2x^2}dx$ = (интегрируем по частям первый интеграл) $=\frac{1}{2}x^2e^{1+x}\Big|_{-\infty}^{-1}-\int\limits_{-\infty}^{-1}xe^{1+x}dx-\frac{3}{4x}\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{1}{2}+2+\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$, так как $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x^2e^{1+x}=0$.

Следовательно, $D(X)=\frac{13}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{51}{16}$.

Вероятность $p\{X\in(0,2)\}=F(2)-F(0)=\left(1-\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{2}=\frac{7}{16}$.

Пример. Найти неизвестный параметр a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X и вероятность того, что $\{X\in(-1,1)\}$, если её плотность распределения вероятностей $f(x)$ задана равенством $f(x)=ae^{-|x|}$.

Из условия нормировки имеем $\int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-|x|}dx = 2a\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = -2ae^{-x}\Big|_{0}^{+\infty} =$ $2a = 1$. Следовательно, $a = \frac{1}{2}$. $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}xe^{-|x|}dx = 0$ (интеграл от нечётной функции $xe^{-|x|}$ по симметричному промежутку $(-\infty,+\infty)$).

Так как $M(X) = 0$, то $D(X) = M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}x^2e^{-|x|}dx = \int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx =$ (интегрируем по частям) $= -x^2e^{-x}\Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} 2xe^{-x}dx = \int_{0}^{+\infty} 2xe^{-x}dx =$ $-2xe^{-x}\Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} 2e^{-x}dx = -2e^{-x}\Big|_{0}^{+\infty} = 2$.

Найдём функцию распределения вероятностей $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Если $x \le 0$, тогда $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|t|}dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{t}dt = \frac{1}{2}e^{t}\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}e^{x}$. Если $x > 0$, то, по свойству аддитивности интеграла, имеем $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|t|}dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{t}dt$ $+\int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-t}dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}\Big|_{0}^{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$. Следовательно, функция распределения $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} \; при \; x \le 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} \; при \; x > 0. \end{cases}$ Из свойства 4) функции распределения находим $p\{X \in (-1,1) = F(1) - F(-1) = 1 - \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-1} = 1 - e^{-1}$.

Совместное распределение дискретных случайных величин

Задание 7. Пусть известны законы распределения двух ДСВ *X,Y*:

$$\begin{bmatrix} x_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ p_i & p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_j & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ q_j & q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}.$$

Определение. Пусть $\varphi(x, y)$ – функция двух переменных. Функцией $Z = \varphi(X,Y)$ ДСВ X и Y называется такая дискретная случайная величина Z, возможными значениями которой являются числа $z_{ij} = \varphi(x_i, y_j)$, а вероятности $p\{Z = z_{ij}\} = p_{ij} = p\{X = x_i, Y = y_j\}$ для всех $i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n$.

Вероятности p_{ij} характеризуют совместное распределение случайных величин *X,Y*. Перечислим основные свойства этих вероятностей:

1) условие нормировки $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$;

2) $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_i = p\{X = x_i\}$; 3) $\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = q_j = p\{Y = y_j\}$.

Определение. ДСВ X, Y называются независимыми, если для всех $i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n$ выполняются равенства $p_{ij} = p_i q_j$.

Для определения степени зависимости случайных величин *X,Y* используется коэффициент корреляции $r(X,Y) = \dfrac{k(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$, где $k(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y)$ – корреляционный момент, а $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$, $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}$ – средне квадратичные отклонения СВ *X,Y.* Известно, что $|r(X,Y)| \le 1$ и $|r(X,Y)| = 1$ в случае линейной зависимости между случайными величинами *X* и *Y*.

Пример. Найти законы распределения случайных величин *X*, *Y*, *X* + *Y*, *XY*, математические ожидания и дисперсии случайных величин *X*, *Y*, *X* + *Y*, *XY* и коэффициент корреляции $r(X,Y)$, если даны возможные значения СВ *X*, *Y* и матрица вероятностей p_{ij}: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$; $y_1 = 3$, $y_2 = -2$, $y_3 = 1$, $\left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0.1 & 0{,}15 & 0{,}15 \\ 0{,}17 & 0{,}03 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

Для нахождения вероятностей $p_i = p\{X = x_i\}$ воспользуемся свойством 2): $p_1 = p\{X = 2\} = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}3$; $p_2 = p\{X = -1\} = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}15 = 0{,}4$; $p_3 = p\{X = -3\} = 0{,}17 + 0{,}03 + 0{,}1 = 0{,}3$. Следовательно, закон распределения ДСВ *X* имеет вид $\begin{bmatrix} x_i & 2 & -1 & -3 \\ p_i & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix}$. Для нахождения вероятностей $q_j = p\{Y = y_j\}$ воспользуемся свойством 3): $q_1 = p\{Y = 3\} = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}17 = 0{,}37$; $q_2 = p\{Y = -2\} = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}03 = 0{,}28$; $q_3 = p\{Y = 1\} = 0.1 + 0{,}15 + 0.1 = 0{,}35$. Следовательно, закон распределения ДСВ *Y* имеет

вид $\begin{bmatrix} y_j & 3 & -2 & 1 \\ q_j & 0{,}37 & 0{,}28 & 0{,}35 \end{bmatrix}$. Возможные значения $z_{ij} = x_i + y_j$ случайной величины Z = $X + Y$ запишем в виде матрицы $\begin{bmatrix} X \backslash Y & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -5 & -2 \end{bmatrix}$. Сложив соответствующие вероятности 0,1 + 0,15 + 0,17 = 0,42 для повторяющегося возможного значения 0 случайной величины Z, получим закон распределения ДСВ Z = $X + Y$: $\begin{bmatrix} -5 & -3 & -2 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0{,}03 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0.42 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$. Найдём сначала в виде матрицы возможные значения $z_{ij} = x_i y_j$ случайной величины Z = $X\,Y$: $\begin{bmatrix} X \backslash Y & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & -9 & 6 & -3 \end{bmatrix}$. Сложив соответствующие вероятности 0,1 + 0,1 = 0,2; 0,1 + 0,15 = 0,25; 0,1 + 0,03 = 0,13 для повторяющихся возможных значений –3; 2; 6 случайной величины Z, получим закон распределения ДСВ Z = $X\,Y$: $\begin{bmatrix} -9 & -4 & -3 & -1 & 2 & 6 \\ 0.17 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}13 \end{bmatrix}$.

Математические ожидания $M(X) = 2\times 0{,}3 - 1\times 0{,}4 - 3\times 0{,}3 = -0{,}7$; $M(Y)$ = $3\times 0{,}37 - 2\times 0{,}28 + 1\times 0{,}35 = 0{,}9$. По свойству математического ожидания имеем $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$= – 0,7 + 0,9 = 0,2; $M(XY)$ = $-9\times 0{,}17 - 4\times 0{,}1 - 3\times 0{,}2 - 1\times 0{,}15 + 2\times 0{,}25 + 6\times 0{,}13 = -1{,}4$.

Дисперсии $D(X) = M(X^2) - M(X)^2$= $4\times 0{,}3 + 1\times 0{,}4 + 9\times 0{,}3 -$ 0,49 = 4,3 – 0,49 = 3,81; $D(Y) = 9\times 0{,}37 + 4\times 0{,}28 + 1\times 0{,}35 - (0{,}9)^2 = 3{,}99$; $D(X+Y) = M(X+Y)^2 - [M(X+Y)]^2$= $M(X^2 + 2XY + Y^2) - [M(X+Y)]^2$ = $M(X^2)$ + $2M(XY)$ + $M(Y^2)-$ $[M(X+Y)]^2$= 4,3 + $2\times(-1{,}4) + 4{,}8 - 0.04$= 6,26;

$D(XY) = M(XY)^2 - M[XY]^2 = 81\times 0{,}17 + 16\times 0{,}1 + 9\times 0{,}2 + 1\times 0{,}15 +$
$4\times 0{,}25 + 36\times 0{,}13 -$ $(-1{,}4)^2$ = 4,68 – 1,96 = 2,72.

Вычислим теперь коэффициент корреляции $r(X,Y)$: корреляционный момент $k(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y)$= – 1,4 – (–0,7) ×0,9 = – 0,77; σ_x = $\sqrt{D(X)} = \sqrt{3{,}81} = 1{,}95$; σ_y = $\sqrt{D(Y)} = \sqrt{3{,}99} = 1{,}997$; $r(X,Y) = \dfrac{k(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$= $\dfrac{-0{,}77}{1{,}95\times 1.997} = -0.198$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гмурман, В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика./ В.Е.Гмурман. – М.: Высшая школа. 2008.
2. *Данко, П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1, Т.2/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 2003.– 460с.
3. *Матвеев, Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2003.–832с.
4. *Пискунов, Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. пособие для вузов. В 2 т.Т.1. и Т.2. – М.: Интеграл-Пресс, 2002.- 415 с. и 544с.
5. *Фихтенгольц, Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник в 3-х т. / Г. М. Фихтенгольц. - 9-е изд., стер. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2009.–608,800, 672с.
6. *Шипачев, В.С.* Высшая математика: учеб. пособие для студентов вузов. -5-е изд.,стер./ В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2009г.

ОГЛАВЛЕНИЕ